

九州大学 IMI 共同利用・短期共同研究  
「VRを用いたインタラクティブな高次元認識」  
Interactive cognition of higher dimension with VR

2021年2月8日(月)～2021年2月12日(金)

Zoomによるオンライン開催

---

## アブストラクト

2月8日(月)

**10:00–10:30** 石井 豊 Yutaka Ishii (九州大学)

### 4次元可視化プロジェクト

*4D visualization project*

ここ数年の間、 $C^2$ におけるジュリア集合のコンピュータ・グラフィクスに触発されて、4次元空間における数学的対象の可視化について幾つかの活動を行ってきた。この講演では、それらのレビューを通して午後の議論の呼び水になりそうな話題を提供したい。

**10:45–11:15** 五十嵐 治雄 Haruo Igarashi (早稲田大学)

### 触覚フィードバックを伴う4次元空間の可視化とインタラクション

*4D Space Visualization and Interaction with Tactile Feedback*

我々が研究開発を進めている、4次元空間の物体に対して視覚と触覚の双方でインタラクションが可能なシステムを紹介する。我々の暮らす3次元空間においては、物体の2次元表面に接触することによって、触覚が知覚される。本システムでは、これを4次元空間に拡張する。すなわち、4次元空間における触覚を、4次元の物体が持つ3次元表面に触れることによる、皮膚への3次元的刺激によって創り出す。この考えに基づき、3D映像画面に投影された4次元物体に触れた際の物理刺激を、ユーザの視点から物体表面までの距離をもとに計算する。ユーザは30個の小型振動モーターを搭載した触覚グローブを装着し、モーションコントローラを握った手を3次元皮膚に見立てて、4次元空間に置かれた物体と接触を伴うインタラクションを行う。本講演では、インタラクションシステムの構成と、4次元空間の可視化および触覚フィードバックのアルゴリズムを紹介する。また、実際のシステムの動作をビデオ映像で示し、解説する。

**11:30–12:00** 寺尾 将彦 Masahiko Terao (山口大学)

### 三次元的に空間を見るということ

*Our visual system in the three-dimensional world*

我々は、3次元に広がる空間で生活しており、眼を通して、3次元空間を見ることができている。一方、眼に映る画像は2次元である。つまり、我々が見ている3次元空間は、2次元の画像から脳内で作られた空間である。2次元の空間情報から3次元の空間を構築することは不良設定問題に相当するため、眼に映った画像に含まれる2次元の空間情報からだけでは3次元の空間は原則的に再現できない。しかし、実際には、普段の生活で不自由がない程度に眼を通して見える世界は3次元的である。これまでの膨大な研究により、我々の視覚は様々な手がかりを複合的に利用することで、不良設定問題の曖昧性を解消し、3次元空間を把握していること

がわかってきた。どのようにすれば効率的に高次元の情報を視覚的に認識させることができるのかを考える上で、我々の視覚が3次元的に空間を捉える機能や特性、仕組みを知ることは有益であると思われる。そこで、3次元的に空間が見えるというのはどういうことなのかについて、視覚科学の立場から概要を紹介する。

13:30- discussion

2月9日(火)

10:00–10:30 三浦 真人 Makoto Miura (東京大学)

#### 4次元空間の計量再構成に向けて

*Towards a metric reconstruction in the 4-space*

4次元空間を視覚その他の感覚によって知覚するとき、どのような手がかりからどのような情報が得られるか、という点が理論的な興味の対象である。たとえば、ピンホールカメラによる射影を用いて可視化する場合、射影再構成、アフィン再構成、計量再構成に対応する3つのレベルの情報が基本的であるが、4次元物体を直接指し示したり、触れたりするためには、計量再構成に相当する情報の復元が不可欠になる。この講演では、計量再構成に関する話題について現状分かっていることを整理してお伝えしたい。

10:45-11:15 阿原 一志 Kazushi Ahara (明治大学)

#### 4次元空間に埋め込まれた曲面の可視化について

*On visualization of surfaces embedded in the 4-space*

本講演では、4次元空間に埋め込まれた曲面の可視化について、そのアイデアを紹介する。第1の方法は、2変数関数の零点集合としてあらわされる代数曲線の可視化であり、これは講演者が作成した Monomie というソフトウェアにて実現されている。第2の方法は、曲面結び目のモーションピクチャーを正則図形に落とし込む方法であり、これは力石優武氏の修士論文の中でアプリ構築のための基礎研究をおこなった。

11:30-12:00 稲生 啓行 Hiroyuki Inou (京都大学)

#### 4次元の回転とVRにおける操作

*Rotation in the 4-space and its controls in VR*

3次元の回転が3自由度であるのに対し、4次元の回転は6自由度もあり、感覚的に理解するのは困難である。この講演では、まず3次元の回転とそのコンピュータグラフィックスやVRにおける実装について簡単に解説し、4次元の回転とそのVRにおける操作や表現方法について、まず既存の実装のいくつかを紹介し、更に考えているいくつかのアイデアを紹介したい。

13:30- discussion

2月10日(水)

10:00–10:30 増田 康成 Yasunari Masuda (明治大学)

多面体の形状把握を促進するICT教材の検討：VR空間上の多面体への身体的関与の実現に向けて  
(阿原一志(明治大学)・小松孝徳(明治大学)・清河幸子氏(東京大学)との共同研究)

*Examination of ICT teaching materials to promote shape grasp of polyhedron: Toward the realization of physical involvement in polyhedron in VR space*

本研究では、模型として目の前に置かれた多面体の面の数を正しく数えるためには、身体的な関与を活用させることが重要であること、さらにこの問題は身体的な関与によってある種の制約を緩和する洞察問題とみなされることを報告する。先行研究において、小松、清河らは、十二面体から二十面体といった模型を準備し、その面の数を数えるように実験参加者に指示を出す実験を行った。その際、その模型を片手に持ったままで面の数を数えたり、両手の中で模型を回転させながら面の数を数えたりした参加者の正答率が低かった一方、両手の十本の指で面を押さえながら、その指の位置を変更することなく、指で押さえられなかった面の数を数えるという行動を見せた参加者の正答率が高かったことが明らかになった。本講演では、VR空間内に多面体を提示しユーザがそれらを仮想的に操作するようなシステムを開発し、実空間上にて観察された身体的な関与がVR空間でも観察されるかどうかを検討する。今回のVRシステム実装では、両手の十本の指で面を押さえるという動作を仮想化することが十分にできなかったため、満足できる結果は観察されなかったが、改良すべきポイントや認知科学的な観点について考察を行うことができたので、そのことを報告する。

10:45-11:15 中村 建斗 Kento Nakamura (明治大学)

**球面体群と擬球のVRを用いた可視化への試み**

*Sphairahedron groups and quasi-sphere in VR*

講演者は四次元クライン群の一種である球面体群から生成される、擬球とよばれる三次元空間上のフラクタル図形のVRデバイスを用いた立体視コンテンツの制作に取り組んできた。コンテンツのデータを扱うにあたり、最も簡単な方法はモデルデータを.objファイルのようなモデルデータにすることである。しかし、擬球のようなフラクタルをモデルデータにするには、ボリュームデータの計算、メッシュ化とその最適化、着彩のためのUV展開とテクスチャの生成などといった大きな手間がかかる。また、パラメータの変化による図形の変形をアニメーションさせることはできない。そこで、フラクタルの描画にレイトレーシングを用いることでモデルデータ生成を行わず、プロシージャルにレンダリングを行うことで、データ生成の手間を省くことに加え、パラメータの操作によるリアルタイムな図形の変形を可能にした。しかし、レンダリングされた画像にノイズが発生するなどの問題を抱えている部分もある。本講演ではレイトレーシングを用いたフラクタルモデルの描画について講演者の取り組みを紹介し、未解決な問題も含めて議論したい。

11:30-12:00 名取 雅生 Masaki Natori (東京大学)

**VRを用いた結び目の描画と変形**

*Drawing and deforming knots in VR*

結び目をVRで取り扱うことにより、3次元空間内で直感的に変形できる、変形する過程を静止して観察できるなど、様々な恩恵が得られる。これは射影図を書いたり紐などで工作したりする場合には得られなかったメリットである。具体的には、結び目を局所的に手動で変形する機能と結び目のエネルギーを用いて自動で整形する機能を実装した。今回紹介するソフトウェアはオープンソースで以下のページにて公開する予定である。  
<https://utms-vr.github.io>

13:30- discussion

2月12日(金)

**10:00–10:30** 前田 陽一 Yoichi Maeda (東海大学)

**行列群  $SL(2, \mathbb{R})$ ,  $SL(2, \mathbb{C})$  を 3 次元空間で視る方法**

*Visualization of  $SL(2, \mathbb{R})$  and  $SL(2, \mathbb{C})$  in three-dimensional space*

(アブストラクトは最後に添付)

**10:45–11:15** 鍛冶 静雄 Shizuo Kaji (九州大学)

**シンプルな 4 次元パストレーサーによるレンダリング**

*A simple path tracer for 4D scene rendering*

パストレーシングは光輸送をモンテカルロ法で解くことで 3 次元シーンのレンダリング画像を得る方法である。この講演では、わずか 99 行のコードでパストレーシングを実現した smallpt (<https://www.kevinbeason.com/smallpt/>) を紹介し、それが安直に 4 次元シーンのレンダリングに拡張できる (<https://github.com/shizuo-kaji/smallpt4d>) ことを述べる。

**13:30-** discussion

# 行列群 $SL(2, \mathbb{R})$ , $SL(2, \mathbb{C})$ を 3次元空間で視る方法

東海大学・理学部 前田 陽一

Yoichi Maeda, School of Science, Tokai University

本研究では、行列群の群構造を可視化することを目標に、まず 3次元空間で行列群の位相構造を可視化する。キーワードは、“極分解”と“3次元球面  $S^3$  への埋め込み”である。 $SL(2, \mathbb{R})$  の元は、正定値対称行列と  $SO(2)$  の元で極分解される。また、 $SL(2, \mathbb{R})$  は、3次元球面  $S^3$  に埋め込むことができる。3次元球面  $S^3$  は、立体射影で3次元ユークリッド空間に展開できる (図1)。正定値対称行列の集合が単

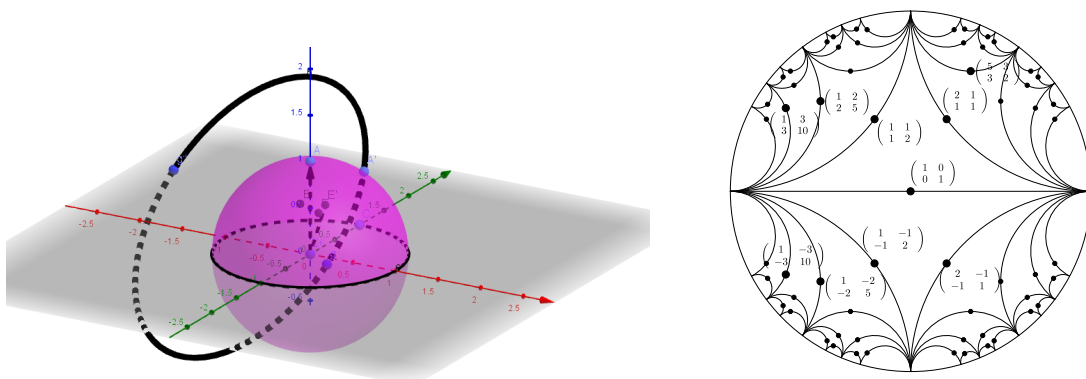


図 1:  $SL(2, \mathbb{R})$  の可視化 (左) と、対称行列が形作る双曲的パターン (右)

位円盤に対応し、 $SO(2)$  軌道は、単位円盤の一点を貫く円として可視化できる。正定値対称行列のうち、 $SL(2, \mathbb{Z})$  に注目すると、双曲的パターンが現れる。これは、 $SL(2, \mathbb{R})/SO(2) \simeq H^2$  であることの可視化になっている。

同様の発想で、 $SL(2, \mathbb{C})$  の可視化を試みる。 $SL(2, \mathbb{C})$  の元は、正定値エルミート行列と  $SU(2)$  の元で極分解される。正定値エルミート行列の集合は、3次元双曲空間  $H^3$  と同相であり、 $SU(2)$  は、3次元球面  $S^3$  と同相である。正定値エルミート行列のうち、 $SL(2, \mathbb{Z}[i])$  に注目すると、双曲的パターンが現れる (図2)。3次元のパターンを見るには、ホロ球面を用いると、 $SL(2, \mathbb{Z}[i])$  の元が2つのホロ球面の接点として可視化できる。

## 参考文献

- [1] 久保田富雄：『数論論説 メタプレクティック理論と幾何学的相互法則』。牧野書店。1999.
- [2] 前田陽一：「動的幾何学ソフトウェアによる実特殊線形変換群  $SL(2, \mathbb{R})$  の3次元モデル」, 数理解析研究所講究録 **1951**, (2015), 49–53.

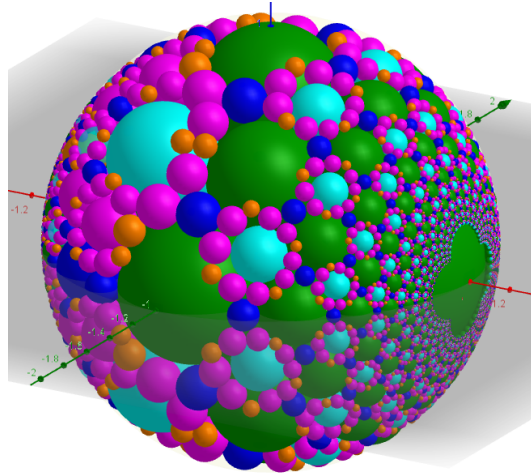


図 2: ホロ球面による可視化

- [3] Maeda, Y. : *Active Learning with Dynamic Geometry Software*. ICCSA 2017, Part IV, LNCS **10407**, (2017), 228–239.
- [4] 前田陽一 : 「実特殊線形変換群  $SL(2, \mathbb{R})$  の 3次元モデルと部分群の可視化」, 数理解析研究所講究録 **2067**, (2018), 74–84.
- [5] Maeda, Y. : *Embedding of Real Special Linear Group  $SL(2, \mathbb{R})$  into the Three-dimensional Sphere and a Hyperbolic Pattern of Symmetric Matrices of  $SL(2, \mathbb{Z})$* . Proceedings of the Sixth TKU-KMITL Joint Symposium on Mathematics and Applied Mathematics (MAM2018), (2018), 71–76. [http://data.sm.u-tokai.ac.jp/mam2018/wp-content/uploads/2018/06/Proceeding\\_MAM2018.pdf](http://data.sm.u-tokai.ac.jp/mam2018/wp-content/uploads/2018/06/Proceeding_MAM2018.pdf)
- [6] 前田陽一 : 「実特殊線形変換群  $SL(2, \mathbb{R})$  の 3次元球面への埋め込みと,  $SL(2, \mathbb{Z})$  の対称行列が形作る双曲的パターン」, 数理解析研究所講究録 **2105**, (2019), 174–180.
- [7] Pollicott, M.: *The Picard group, closed geodesics, and zeta functions*. Trans. Amer. Math. Soc. vol.344, No.2, (1994), 857–872.
- [8] 谷口雅彦, 奥村善英 : 『双曲幾何学への招待—複素数で視る—』, 培風館, 1996.