

球面上の行列式点過程とその周辺

平尾 将剛 (愛県大・情報)

2021年8月19日

九州大学IMI共同利用研究・ワークショップ

「実社会に見られる複雑なネットワークと無限粒子系の交差点 II」

* 本研究は JSPS 科研費 20K03736 の助成を受けています.

1. 球面デザインとQMCデザイン

2. 球面上の行列式点過程とQMCデザイン
3. 球面上の行列式点過程とタイト・フレーム

球面デザイン

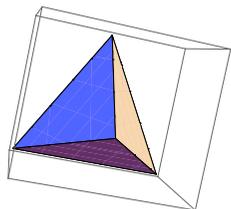
$\mathbb{S}^d = \{x \in \mathbb{R}^{d+1} \mid \|x\| = 1\}$, σ : (正規化された) \mathbb{S}^d 上の一様測度.

Def. (Delsarte et al., 1977) A set $X_N = \{x_1, \dots, x_N\} \subset \mathbb{S}^d$ ($N < \infty$) is called a spherical t -design of \mathbb{S}^d , if the following eq. holds

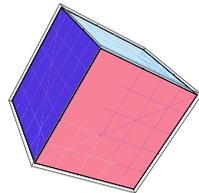
$$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f(x_i) = \int_{x \in \mathbb{S}^d} f(x) d\sigma(x), \quad \forall f \in \mathcal{P}_t(\mathbb{R}^{d+1}).$$

* 坂内-坂内 ('09), Seidel(2001) などでは他の球面デザインの定義も紹介されている.

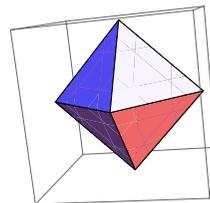
Ex. 単位円に内接する正多面体の頂点配置は t -design of \mathbb{S}^2 をなす.



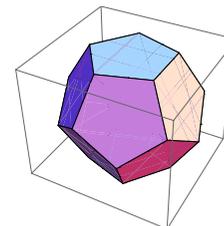
$t = 2$



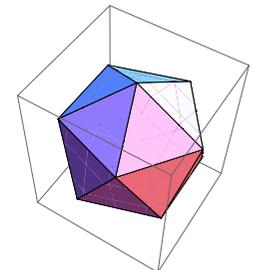
$t = 3$



$t = 3$



$t = 5$



$t = 5$

球面デザインの研究課題

- 点数の下界（非存在問題）： Delsarte et al. (1977), Yudin(1997)
- 存在問題: Tchakaloff(1957), Seymour-Zaslavsky(1984),
Bondarenko et al(2013)
↑ 近年の球面デザインの研究におけるブレイクスルー
- 構成問題: （特に小さい t に対して）代数的/解析的方法が多数知られている
- 応用研究: - QMCデザイン (Brauchart et al., 2014)
 - Banach 空間への等長埋め込み \rightsquigarrow finite frames (H., 2021a, b)
 - 統計的実験計画法 (Sawa et al., 2019)
 - カーネル法における特徴写像の近似 (Dao-De Sa-Ré, 2017)
 - Wiener 空間上の cubature 公式 (Lyons-Victoir, 2004) など

Rem. 近年, Cohn-Kumar(2006)による universally optimality を持つ球面点配置の分類など, 離散ポテンシャル・エネルギーの観点からの研究が盛ん.

* Brauchart-Grabner(2015), Bilyk et al (2019), ...

球面デザインの存在問題

Thm. (Seymour-Zaslavsky, 1984).

自然数のペア (d, t) を固定する. 点数が**十分大**ならば, t -design of \mathbb{S}^d はいいつでも存在する.

Thm. (Bondarenko et al, 2013). 自然数 $d \geq 2$ を固定する. このとき, 任意の $N \geq c_d t^d$ に対して, N 点での t -design of \mathbb{S}^d が存在する.

* Korevaar-Meyers (1993) の予想: 「 t -design of \mathbb{S}^d で点数が $N \asymp t^d$ のものが常に存在する」を解決.

$$(a_n \asymp b_n \Leftrightarrow \exists c_1, c_2 > 0, \text{ s.t.}, c_1 a_n \leq c_2 b_n, \forall n)$$

* Bondarenko et al. (2015): “well-separated” spherical design について同様の事実を証明.

* Etayo et al. (2016): コンパクト代数多様体上の積分に対して拡張.

彼らの主張は, **構成法については何ら述べていない.**

Prob. t -design of \mathbb{S}^d で点数が $N = \mathcal{O}(t^d)$ ($t \rightarrow \infty$) の構成法を与えよ.

QMC デザイン

- 先の要請を満たす design of \mathbb{S}^d を代数的/解析的な構成法は未解決.
そこで正確値から近似値に変更し, 良い性質を持つ $X_N \subset \mathbb{S}^d$ を見つけたい.

$$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f(x_i) \approx \int_{x \in \mathbb{S}^d} f(x) d\sigma(x).$$

⇒ $\mathbb{H}^s(\mathbb{S}^d)$ に対する QMC デザイン系列: Brauchart et al. (2014)

★ $W_p^s(\mathbb{S}^d)$: Brauchart et al. (2015), $\mathbb{H}^{(s,\gamma)}(\mathbb{S}^d)$: Grabner-Stepaniuk(2019)

Rem. 数値的に design of \mathbb{S}^2 を探索する研究は数多くある: Hardin-Sloane (1996) 予想.

「 t -design of \mathbb{S}^2 で点数が $N \geq \frac{1}{2}t^2 + o(t^2)$ ($t \rightarrow \infty$) となるものが常に存在する」

- * Chen-Womersley (2006): $t \leq 100$ に対し, 数値実験により, $(t+1)^2$ 点での t -design.
 - Chen et al. (2011): 存在性の証明. $t \geq 101$ に関しては未解決.
- * Sloan-Womersley (2009): 数値実験により, H.-S. の予想の正しさを述べている. 実際には $N \geq \frac{1}{2}(t+1)^2$?
- * Gräf-Potts (2011, 2013): $t \leq 1000$ に対し, 数値実験により, t -design を求める (高速フーリエ変換の手法).

しかしながら, (私の知る限り) $d \geq 4$ 以上の計算結果は小さい t の場合を除き知られていない.

QMC design for $\mathbb{H}^s(\mathbb{S}^d) (\subset L^2(\mathbb{S}^d))$

$\{Y_{l,k} : k = 1, \dots, Z(d, l)\}$: spherical harmonics of deg. l ,

$\{\alpha_l^{(s)}\}$ with $\alpha_l^{(s)} \asymp (1+l)^{2s}$, $Z(d, l) := \dim \text{Harm}_l(\mathbb{S}^d)$

- For $f \in \mathbb{H}^s(\mathbb{S}^d)$ ($s > d/2$),

$$\|f\|_{\mathbb{H}^s} := \sum_{l=0}^{\infty} \alpha_l^{(s)} \sum_{k=1}^{Z(d,l)} |\hat{f}_{l,k}|^2 < \infty, \quad \hat{f}_{l,k} = \int_{\mathbf{x} \in \mathbb{S}^d} f(\mathbf{x}) Y_{l,k}(\mathbf{x}) d\sigma(\mathbf{x})$$

- $K^{(s)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{Z(d,l)} \alpha_l^{(s)} Y_{l,k}(\mathbf{x}) Y_{l,k}(\mathbf{y})$.

Thm. (General distance kernel, Brauchart et al., 2014)

For $d/2 < s < d/2 + 1$,

$$K^{(s)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := 2V_{d-2s}(\mathbb{S}^d) - |\mathbf{x} - \mathbf{y}|^{2s-d}, \quad \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{S}^d$$

where $V_{d-2s}(\mathbb{S}^d) := \iint_{\mathbb{S}^d \times \mathbb{S}^d} |\mathbf{x} - \mathbf{y}|^{2s-d} d\sigma(\mathbf{x}) d\sigma(\mathbf{y})$

* See also Brauchart-Wormersly (preprint): 一般の s についても扱っている。(後述)

$$Q[X_N](f) := \frac{1}{N} \sum_{\mathbf{x} \in X_N} f(\mathbf{x}), \quad I(f) := \int_{\mathbb{S}^d} f(\mathbf{x}) d\sigma(\mathbf{x}).$$

$$\text{wce}(Q[X_N]; \mathbb{H}^s(\mathbb{S}^d)) := \sup_{\substack{f \in \mathbb{H}^s(\mathbb{S}^d) \\ \|f\|_{\mathbb{H}} \leq 1}} |Q[X_N](f) - I(f)|$$

★ Koksma-Hlawka 型不等式: for any $f \in \mathbb{H}^s(\mathbb{S}^d)$,

$$|Q[X_N](f) - I(f)| \leq \text{wce}(Q[X_N]; \mathbb{H}^s(\mathbb{S}^d)) \|f\|_{\mathbb{H}}.$$

★ 後述するが, $\text{wce}(Q[X_N; \mathbb{H}^s(\mathbb{S}^d)])$ は再生核 $K^{(s)}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ を用いて具体的に表される.

Def. (Brauchart et al., '14). Given $s > d/2$, a sequence (X_N) of N -point configurations on \mathbb{S}^d with $N \rightarrow \infty$ is said to be a **QMC design sequence for $\mathbb{H}^s(\mathbb{S}^d)$** if there exists $c(s, d) > 0$, independent of N , s.t.,

$$\text{wce}(Q[X_N]; \mathbb{H}^s(\mathbb{S}^d)) \leq \frac{c(s, d)}{N^{s/d}}.$$

Thm. (Brauchart et al, '14) For $N = 1, 2, \dots$, there exist N -point spherical t -designs Y_N of \mathbb{S}^d with $t \asymp N^{1/d}$. These form a sequence of “**generic**” QMC designs.

Brauchart et al. ('14): $\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f(x_i) \approx \int_{\mathbb{S}^2} f(x) d\sigma(x)$

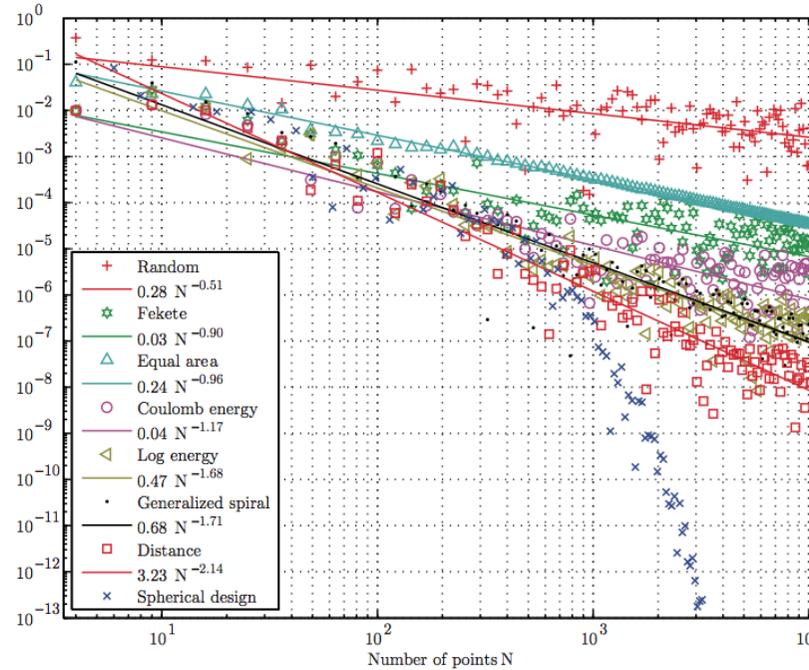


FIGURE 3. Numerical integration errors for the Franke function

- Franke1 function: $f(x, y, z) = \frac{3}{4} \exp\left\{-\frac{(9x-2)^2}{4} - \frac{(9y-2)^2}{4} - \frac{(9z-2)^2}{4}\right\} + \frac{3}{4} \exp\left\{-\frac{9x+1}{49} - \frac{9y+1}{10} - \frac{9z+1}{10}\right\}$
 $+ \frac{1}{2} \exp\left\{-\frac{(9x-7)^2}{4} - \frac{(9y-3)^2}{4} - \frac{(9z-5)^2}{10}\right\} + \frac{1}{5} \exp\left\{-(9x-4)^2 - (9y-7)^2 - \frac{(9z-5)^2}{10}\right\}.$

Jittered sampling PP

Def. $\mathcal{D}_N := \{D_{i,N}\}_{i=1}^N$: an equal area partition of \mathbb{S}^d into N pairwise distinct subsets. Namely,

$$\sigma(D_{j,N} \cap D_{k,N}) = 0, \quad \forall j, k = 1, \dots, N \text{ with } j \neq k,$$

$$\sigma(D_{j,N}) = 1/N,$$

$$\text{diam} D_{j,N} \leq c/N^{1/d}.$$

Let $\mathbf{x}_i = \mathbf{x}_{i,N}$ be a point selected randomly from $D_{i,N}$ w.r.t. uniform meas. on $D_{i,N}$. Then, $X_N = \{\mathbf{x}_i\}_{i=1}^N$ is called a **jittered sampling PP**.

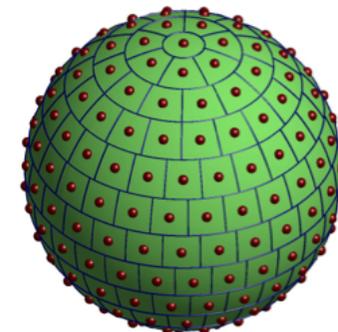
- The jittered sampling PP は DPP

(Brauchart et al., '20).

$$\star K(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = N \sum_{i=1}^N \mathbf{1}_{D_{i,N}}(\mathbf{x}) \mathbf{1}_{D_{i,N}}(\mathbf{y}).$$

- Leopardi('09): 分割 \mathcal{D}_N の存在性を保証

★ Brandolini et al.(2014): コンパクト多様体上の jittered sampling PP.



Fauchereau et al. ('08) より.

Thm. (Brauchart et al. '14). If \mathcal{X}_N denotes an N -point jittered sampling PP on \mathbb{S}^d , it holds that, for $d/2 < s < d/2 + 1$,

$$\frac{\beta'}{N^{s/d}} \leq \mathbf{E} \left[\text{wce}(Q[X_N]; \mathbb{H}^s(\mathbb{S}^d))^2 \right]^{1/2} \leq \frac{\beta}{N^{s/d}}$$

Rem. (Brauchart et al. '14). Given $s > d/2$,

$$\mathbf{E} \left[\text{wce}(Q[X_N]; \mathbb{H}^s(\mathbb{S}^d))^2 \right]^{1/2} = \frac{b(s, d)}{N^{1/2}}$$

for some $b(s, d) > 0$, where $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N$ are indep. and uniformly dist. on \mathbb{S}^d .

Prob. Jittered sampling PPの他に, QMC designを生成する確率点過程はあるか?

Brauchart et al. ('14): “For fixed $s > d/2$, there exist many sequences of QMC designs for $H^s(\mathbb{S}^d)$ that are not composed of spherical designs.”

2. 球面上の行列式点過程とQMCデザイン

- Macchi(1974, 1975)
- Kulesza-Taskar(2012):
§2.5.4 Quasirandom processes ← MC・QMCとの関連を指摘
- \mathbb{S}^d 上のDPP:
 - spherical ensemble of \mathbb{S}^2 : Krishnapur('09), Alishahi-Zamani('15)
 - harmonic ensemble of \mathbb{S}^d : Beltrán et al.('16)
 - generalized spherical ensemble of \mathbb{S}^{2d} : Beltrán and Etayo('18)
(● projection ensemble of \mathbb{S}^{2d+1} : Beltrán and Etayo('17))
 - jittered sampling on \mathbb{S}^d : Brauchart et al.('20)

\mathbb{S}^d 上の行列式点過程 (DPP)

- $K : \mathbb{S}^d \times \mathbb{S}^d \rightarrow \mathbb{C}$: カーネル関数

Def. A simple point process on \mathbb{S}^d is called a **determinantal point process (DPP)** with kernel K if its k -point joint intensity functions $\rho_k : (\mathbb{S}^d)^k \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ (w.r.t. the measure σ) are given by

$$\rho_k(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k) = \det(K(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j))_{1 \leq i, j \leq k}, \quad \forall k \geq 1.$$

- $\mathcal{X}_N = \{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N\}$ が \mathbb{S}^d 上の N -point DPP ならば,

$$\begin{aligned} \mathbf{E}\left[\sum_{i \neq j} f(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j)\right] &= \int_{\mathbb{S}^d} \int_{\mathbb{S}^d} \rho_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\sigma(\mathbf{x}) d\sigma(\mathbf{y}) \\ &= \int_{\mathbb{S}^d} \int_{\mathbb{S}^d} \left(K(\mathbf{x}, \mathbf{x})K(\mathbf{y}, \mathbf{y}) - |K(\mathbf{x}, \mathbf{y})|^2 \right) f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\sigma(\mathbf{x}) d\sigma(\mathbf{y}) \end{aligned}$$

特に今日扱う DPPs については,

$$\mathbf{E}\left[\sum_i f(\mathbf{x}_i)\right] = \int_{\mathbb{S}^d} \rho_1(\mathbf{x}, \mathbf{x}) f(\mathbf{x}) d\sigma(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{S}^d} K(\mathbf{x}, \mathbf{x}) f(\mathbf{x}) d\sigma(\mathbf{x}) = N.$$

Spherical & harmonic ensembles

spherical ensemble

• well-known ensemble on \mathbb{S}^2 (e.g., Krishnapur('06))

$$\bullet K(x, y) = \frac{N(1 + g(x)\overline{g(y)})^{N-1}}{(1 + g(x))^{(N-1)/2}(1 + g(y))^{(N-1)/2}},$$

ただし, $g(x_1, x_2, x_3) = \frac{x_1 + \sqrt{-1}x_2}{1 - x_3}$ for $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{S}^2$: \mathbb{S}^2 を北極から \mathbb{C} にステレオ射影する写像.

$$\bullet \rho_2(x, y) = N^2 \left\{ 1 - \left(\frac{\|x - y\|^2}{4} \right)^{N-1} \right\} \quad (\text{Alishahi-Zamani, '14}).$$

Harmonic ensemble

• $K(x, y) = R_L(\langle x, y \rangle)$: 多項式空間 $\mathcal{P}_L(\mathbb{S}^d)$ の再生核,

$$R_L(x) = \frac{(2L + d) \binom{d+L-1}{L}}{d \binom{L+d/2}{L}} P_L^{(d/2, d/2-1)}(x) \quad (\text{scaled Jacobi 多項式})$$

$$\bullet \rho_2(x, y) = R_L(1)^2 - R_L(\langle x, y \rangle)^2.$$

• 点の数は (確率 1 で) $N = \dim(\mathcal{P}_L(\mathbb{S}^d)) = R_L(1) = \binom{d+L}{d} + \binom{d+L-1}{d}$.

最悪誤差の評価

Thm. (H., '18: (i), (ii)-(2), Marzo '18+: (ii)-(1)) (i) Let $d = 2$ and \mathcal{X}_N be an N -point spherical ensemble. For $1 < s < 2$,

$$\mathbf{E}\left[\text{wce}(Q[\mathcal{X}_N]; \mathbb{H}^s(\mathbb{S}^2))^2\right] = 2^{2s-2} B(s, N) \left(\sim 2^{2s-2} \frac{\Gamma(s)}{N^s}\right)$$

where $B(s, N)$ is the beta function.

(ii) Let \mathcal{X}_N be an N -point Harmonic ensemble on \mathbb{S}^d , with $N = \dim(\mathcal{P}_L(\mathbb{S}^d))$ points.

(1) For $d/2 < s < d/2 + 1/2$, there exists $c_1(s, d) > 0$, s.t.,

$$\mathbf{E}\left[\{\text{wce}(Q[\mathcal{X}_N]; \mathbb{H}^s(\mathbb{S}^d))\}^2\right]^{1/2} \leq \frac{c_1(s, d)}{N^{s/d}}.$$

(2) For $d/2 + 1/2 < s < d/2 + 1$, there exists $c_2(s, d) > 0$, s.t.,

$$\mathbf{E}\left[\{\text{wce}(Q[\mathcal{X}_N]; \mathbb{H}^s(\mathbb{S}^d))\}^2\right]^{1/2} \leq \frac{c_2(s, d)}{N^{1/2+1/(4d)}}.$$

追記

- (Brauchart et al., 2014, Brauchart-Womersly, preprint).

For $d/2 + L < s < d/2 + L + 1$ with L is a positive integer,

$$K^{(s)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := \left(1 - (-1)^{L+1}\right) V_{d-2s}(\mathbb{S}^d) + \mathcal{Q}_L(\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}) + (-1)^{L+1} |\mathbf{x} - \mathbf{y}|^{2s-d},$$

where

$$\mathcal{Q}_L(\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}) := \sum_{l=1}^L \left((-1)^{L+1-l} - 1 \right) \alpha_l^{(s)} Z(d, l) P_l^{(d)}(\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}).$$

$\text{wce}(Q[X_N]; \mathbb{H}^s(\mathbb{S}^d))^2$

$$= (-1)^{L+1} \frac{1}{N^2} \overbrace{\sum_{1 \leq i, j \leq N} |\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i|^{2s-d}}^{\text{Riesz } (2s-d)\text{-energy}} + \frac{1}{N^2} \overbrace{\sum_{1 \leq i, j \leq N} \mathcal{Q}_L(\mathbf{x}_j \cdot \mathbf{x}_i)}^{\text{L-th polynomial energy}} - (-1)^{L+1} V_{d-2s}(\mathbb{S}^d).$$

- Brauchart et al. ('20): “hyperuniformity” による特徴付け.

1. 球面デザインと QMC デザイン

2. 球面上の行列式点過程と QMC デザイン

3. 球面上の行列式点過程とタイト・フレーム

Frame potential

- 球面デザインと p -frame potential の相互間研究.

Def. (p -frame potential). $X_N = \{x_1, \dots, x_N\} \subset \mathbb{S}^d$, $0 < p < \infty$

$$\text{FP}_p(X_N) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N |\langle x_i, x_j \rangle|^p$$

Prop. (Seidelnikov's inequality).

$$\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \langle x_i, x_j \rangle^p \geq \begin{cases} N^2 \text{PFP}(p), & p: \text{ even} \\ 0, & p: \text{ odd} \end{cases}$$

where $\text{PFP}(p) = \iint_{\mathbb{S}^d \times \mathbb{S}^d} \langle x, y \rangle^p d\sigma(x) d\sigma(y)$, and

X_N is t -design of $\mathbb{S}^d \Leftrightarrow$ “=” holds for any $p = 1, \dots, t$

- Bilyk et al. (2020): p -frame potential の minimizer の分類.

Results of p -frame potential

Thm. (H., 2021b). (i) Let X_N be an N -point spherical ensemble (on \mathbb{S}^2). Then,

$$\mathbf{E}(\text{FP}_p(\mathcal{X}_N)) = N^2 \text{PFP}(p) + N - \frac{N^2 \{(-1)^{p+1} B(-1; p+1, N) + B(N, p+1)\}}{2^N},$$

where $B(z; a, b) = \int_0^z t^{a-1} (1-t)^{b-1} dt$ is the incomplete beta function.

(ii) Let \mathcal{X}_N be an N -point harmonic ensemble on \mathbb{S}^d with $N = \dim(\mathcal{P}_L(\mathbb{S}^d)) = \binom{d+L}{d} + \binom{d+L-1}{d}$. Then,

$$\mathbf{E}(\text{FP}_p(\mathcal{X}_N)) = N^2 \text{PFP}(p) + o(N) \quad (N \rightarrow \infty).$$

(iii) Let \mathcal{X}_N be an N -point jittered sampling PP $+\alpha$. Then,

$$\mathbf{E}(\text{FP}_p(\mathcal{X}_N)) \leq N^2 \text{PFP}(p) + N - N \left(1 - \frac{c^2}{2N^{2/d}}\right)^{p/2}.$$

2-frame potentialの応用

$$X_N = \{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N\} \subset \mathbb{S}^d, \quad N < \infty$$

Def. A finite set X_N is called a **finite unit norm tight frame (FUNTF)** for \mathbb{R}^{d+1} , if there is a positive constant A satisfying

$$\sum_{i=1}^N |\langle \mathbf{x}, \mathbf{x}_i \rangle|^2 = A \|\mathbf{x}\|^2, \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^{d+1}$$

* A spherical 2-design is also a FUNTF.

$F : \mathbb{R}^{d+1} \rightarrow \mathbb{R}^N, \quad \mathbf{x} \mapsto (\langle \mathbf{x}, \mathbf{x}_i \rangle)_{i=1}^N$: analysis op.

$F^* : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^{d+1}, \quad (c_i)_{i=1}^N \mapsto \sum_{i=1}^N c_i \mathbf{x}_i$: adjoint op. of F

Prop. (Cf. Christensen, '03).

$$X_N \text{ is a FUNTF for } \mathbb{R}^{d+1} \iff \frac{1}{N} F^* F = \frac{1}{d+1} \mathcal{I}_{d+1} \quad (\mathcal{I}_{d+1}: \text{identity mat.})$$

Prob. Find more applications of p -frames!

Thm. (Ehler, '12). Let $\mathcal{X}_N = \{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N\} \subset \mathbb{S}^d$ be a set of random points, **independently** distributed according to **prob. unit norm tight frames** $\{\mu_k\}_{k=1}^N$, respectively. Then

Ex. $\mu_k =$ the surface meas. σ on \mathbb{S}^d

$$\mathbf{E}(\|\frac{1}{N}F^*F - \frac{1}{d+1}\mathcal{I}_{d+1}\|_{\mathcal{F}}^2) = \frac{1}{N} \frac{d}{d+1}$$

where $\|\cdot\|_{\mathcal{F}}$ denotes the Frobenius norm.

Lem. $\mathbf{E}(\|\frac{1}{N}F^*F - \frac{1}{d+1}\mathcal{I}_{d+1}\|_{\mathcal{F}}^2) = \frac{1}{d+1} - \frac{1}{N^2}\mathbf{E}(\text{FP}_2(\mathcal{X}_N))$

Cor. (H., 2021a). (i) If \mathcal{X}_N stands for the N -point spherical ensemble on \mathbb{S}^2 , then

$$\mathbf{E}(\|\frac{1}{N}F^*F - \frac{1}{3}\mathcal{I}_3\|_{\mathcal{F}}^2) = \frac{4}{(N+1)(N+2)}$$

(ii) If \mathcal{X}_N stands for the N -point harmonic ensemble on \mathbb{S}^d with $N = \dim(\mathcal{P}_L(\mathbb{S}^d))$, then

$$\mathbf{E}(\|\frac{1}{N}F^*F - \frac{1}{d+1}\mathcal{I}_{d+1}\|_{\mathcal{F}}^2) = O(N^{-\frac{d+1}{d}}) \quad (N \rightarrow \infty)$$

(iii) If \mathcal{X}_N stands for the N -point jittered sampling on \mathbb{S}^d , then

$$\mathbf{E}(\|\frac{1}{N}F^*F - \frac{1}{d+1}\mathcal{I}_{d+1}\|_{\mathcal{F}}^2) \leq \frac{c^2}{2N^{1+2/d}}$$

最後に

- \mathbb{S}^d 上の DPP:

- spherical ensemble of \mathbb{S}^2 : Krishnapur('09), Alishahi-Zamani('15)
- harmonic ensemble of \mathbb{S}^d : Beltrán et al.('16)
- generalized spherical ensemble of \mathbb{S}^{2d} : Beltrán and Etayo('18)
(- projection ensemble of \mathbb{S}^{2d+1} : Beltrán and Etayo('17))
- jittered sampling on \mathbb{S}^d : Brauchart et al.('20)

Prob. Harmonic ensemble on \mathbb{S}^d より, “より良い” Riesz energy を持つ確率点過程は何か? より効率的なシミュレーション方法は?

- 有限群, アソシエーションスキーム上での DPP

ご静聴ありがとうございました!

平尾 将剛 (愛知県立大学)

e-mail: hirao@ist.aichi-pu.ac.jp