

令和元年度 共同利用研究報告書

令和元年12月25日

九州大学 マス・フォア・インダストリ研究所長 殿

所属・職名 国立研究開発法人 海上・港湾・航空技術研究所

海上技術安全研究所・上席研究員

提案者 氏名 松尾宏平

下記の通り共同研究の報告をいたします。 記

	整理番号	20190013		
1.研究計画題目	造船における曲面幾何学の展開			
2.種目 (○で囲む)	a. プロジェクト研究	b. 若手研究	c. 一般研究	
3.種別 (○で囲む)	a. 研究集会 I	b. 研究集会 II	c. 短期共同研究	
4.研究代表者	氏名	松尾宏平		
	所属 部局名	国立研究開発法人 海上・港湾・航空技術研究所 海上技術安全研究所 産業システム系	職名	上席研究員
	連絡先	〒181-0004 東京都三鷹市新川 6-38-1		
	e-mail		TEL	
5.研究実施期間	令和元年8月19日(月曜日)～令和元年8月23日(金曜日)			
6.キーワード (複数可)	曲面幾何、造船、設計、製造			
7.参加者数	18人 *1			

*1 短期研究員は九大の共同研究者も含める。

I, II, 短期共同研究は事務局から送った参加者データを元に記入。

8.本研究で得られた成果の概要 (成果報告書を別途要添付 枚数は次頁参照)

船舶は自由曲面で構成される工業製品である。その設計及び製造の合理化のため、自由曲面をどのように表現し、取り扱うかについて研究が行われている。本短期共同研究においては、曲面幾何学の観点から船舶の曲面の表現及び取り扱い方法について検討を行った。具体的には、以下の項目について検討を行った。

①自由曲面の合理的な分類法に関する研究：非可展面を幾何的な特徴線（曲率線、Parabolic curve、Ridge curve、Sub-parabolic curve 等）で分割することを想定し、本研究期間中において、実際の船体曲面にそれらの曲線を導出し、それらの情報からどのように分割すべきかを検討した。

②曲面を有する構造物の合理的な設計法に関する研究：船体内部の区画（タンク等）を船体外板に沿って設計することを想定し、実際の船体について船体タンクの形状設計及びその製造方法について検討した。特に折り紙技術の適用可能性について検討した。

③自由曲面の平面展開に関する研究：曲率線展開法の展開原理の高度化のため、特に曲率線の最適接続ロジックについて検討を行った。

2019 年度 一般研究_短期共同研究 報告書
造船における曲面幾何学の展開

松尾宏平（国立研究開発法人 海上・港湾・航空技術研究所 海上技術安全研究所・上席研究員）

溝口佳寛（国立大学法人 九州大学 マスフォアインダストリ研究所・教授）

濱田裕康（独立行政法人 国立高等専門学校機構 佐世保工業高等専門学校・准教授）

松谷茂樹（国立大学法人 金沢大学・教授）

田中和明（国立大学法人 九州工業大学・准教授）

松岡和彦（学校法人 長崎総合科学大学 工学部 船舶工学科・准教授）

山口大介（株式会社 エス・イー・エー創研 システム開発チーム・主任）

渡邊尚彦（独立行政法人 国立高等専門学校機構 岐阜工業高等専門学校・講師）

竹澤正仁（国立研究開発法人 海上・港湾・航空技術研究所 海上技術安全研究所・研究員）

1. 始めに

船舶は自由曲面で構成される工業製品である。その設計及び製造の合理化のため、自由曲面をどのように表現し、取り扱うかについて研究が行われている。本短期共同研究においては、曲面幾何学の観点から船舶の曲面の表現及び取り扱い方法について検討を行った。具体的には、以下の項目について検討を行った。

- ①自由曲面の合理的な分類法
- ②曲面を有する構造物の合理的な設計法
- ③自由曲面の平面への展開

本報告書では、上記に関する本短期共同研究の活動内容と得られた成果について概要を報告する。

2. プログラム

本短期共同研究は、以下の通りに行われた。

■期間：令和元年 8 月 19 日（月）～ 令和元年 8 月 23 日（金）

■組織委員：9 名（本報告書の著者と同じ）

■参加者：上記組織委員に加えて、九州大学等から会期中計 18 名が参加した。

■公開日：会期中に公開日进行、講演会を実施した。

日時：8 月 21 日(水) 13:00～15:40

講演会タイトル：「造船における曲面幾何学の展開」(Explore new paradigm of geometry in shipbuilding industry)

講演会プログラム：

(0) はじめに (Opening remarks)

- (1) 造船の曲面幾何の研究紹介 (R&D on geometry in shipbuilding industry) (松尾宏平、国立研究開発法人 海上・港湾・航空技術研究所 海上技術安全研究所・上席研究員)
- (2) 成形法を考慮した曲面の幾何学的な分類法 (Classification methods of free surface for sheet metal forming in factory) (加葉田雄太朗、九州大学マス・フォア・インダストリ研究所・助教)
- (3) 折り紙に関する研究開発の近況について (Recent R&D on Origami technologies) (渡邊尚彦、独立行政法人 国立高等専門学校機構 岐阜工業高等専門学校・講師)
- (4) 内航船の設計について (Future perspective on ship design and its geometric approach) (松岡和彦、学校法人 長崎総合科学大学 工学部 船舶工学科・准教授)
- (5) おわりに (Ending remarks)

3. 成果概要

3. 1 自由曲面の合理的な分類法に関する研究

船舶は自由曲面で構成される。船舶の自由曲面は、設計において分割され、分割された曲面 1 枚ごとに、工場にて平らな鋼板から成形される。工場における施工性の観点から、曲面を合理的に分割することが求められるが、現在、その設計プロセスは設計者による経験に基づき行われており、合理的な分割手法と設計システムの整備が望まれている。

本共同研究では、曲面の施工性を考慮した非可展面の合理的な分割方法について検討を行った。造船の曲げ加工における施工性の考慮として以下の項目が挙げられる。

- ・ 作業者にとって曲面形状がイメージしやすいこと。そのため、1 枚ごとの外板の曲面形状なるべく単純になるように分割すること。
- ・ 成形加工がしやすいこと。プレス加工やガス加熱加工において、複雑な操作（プレス機の中で鋼板の位置、向きを繰り返しセットする必要がないこと等）がないこと。
- ・ 不要な板の分割は避けること。外板の分割が多いと、その分、取付作業、溶接作業が増え、工数の増大、精度の悪化に繋がる。

著者らは、曲面上の曲率線に基づく曲げ加工法^{[1], [2]}を提案しているが、曲率線の様子から自由曲面を合理的に分割できるのではとの発想に基づき、様々な幾何学的な特徴線を導くことについて検討を行った。将来的には、それらの特徴線から自由曲面を最適に分割する設計プロセスの構築を行う。

本節では、曲面の局所的な性質、特に、会期中に議論された造船に役立つと思われる幾何的な特徴線の候補を紹介する。

設定

以下、簡単に設定と用語を説明する。

- 開集合 $U \subset \mathbb{R}^2$ に対して, C^∞ 級写像

$$f: U \rightarrow \mathbb{R}^3, (x, y) \mapsto (f_1(x, y), f_2(x, y), f_3(x, y))$$

によってパラメータ表示される曲面を扱う.

- 曲面は正則であるとする(偏微分 f_x, f_y は各点で一次独立)
- 内積 \cdot はユークリッド空間 \mathbb{R}^3 の通常の内積を考える.
- $\mathbf{N} = \frac{f_x \times f_y}{\|f_x \times f_y\|}$ を曲面の単位法ベクトルとする.
- 第 1 基本量, 第 2 基本量を以下とする.

$$E = f_x \cdot f_x, \quad F = f_x \cdot f_y, \quad G = f_y \cdot f_y \tag{1}$$

$$L = f_{xx} \cdot \mathbf{N}, \quad M = f_{xy} \cdot \mathbf{N}, \quad N = f_{yy} \cdot \mathbf{N} \tag{2}$$

主曲率と主方向

曲面の各点での法方向 \mathbf{N} とある接方向 \mathbf{v} が張る平面と曲面の交点集合である平面曲線の曲率を \mathbf{v} に沿った法曲率と呼ぶ (図 1). \mathbf{v} を動かした時に法曲率が最大および最小になる方向を主方向, 対応する法曲率を主曲率と呼ぶ. 主曲率は λ に関する次の方程式

$$(EG - F^2)\lambda^2 - (EN - 2FM + GL)\lambda + (LN - M^2) = 0 \tag{3}$$

の解として得られる. この 2 次方程式が異なる 2 つの解 $\kappa_1 > \kappa_2$ を持つとき, κ_1 を第 1 主曲率, κ_2 を第 2 主曲率と呼ぶことにする.

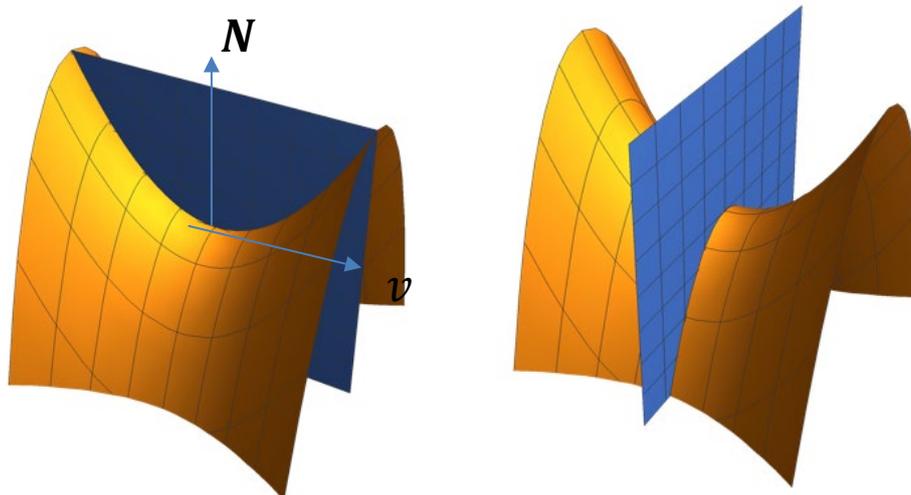


Fig.1 曲面上の法曲率と主方向

また, 主方向 (dx, dy) は U の各点で, 方程式(4)

$$\begin{vmatrix} E & L & dx^2 \\ F & M & dx dy \\ G & N & dy^2 \end{vmatrix} = 0 \tag{4}$$

の解として得られる(臍点以外では2方向存在). 2つの異なる主曲率 $\kappa_1 > \kappa_2$ が存在する時, 対応する主方向 v_1, v_2 をそれぞれ第1主方向と第2主方向と呼ぶ.

2つの主曲率が一致するような臍点(セイテン)を除いては, 主曲率と主方向ベクトルは曲面の各点で2つずつ定まる. 以降では,

$$(EG - F^2)\lambda^2 - (EN - 2FM + GL)\lambda + (LN - M^2) = 0 \quad (5)$$

により U 上に定まる関数 κ_1, κ_2 を第1, 2主曲率関数,

$$\begin{vmatrix} E & L & dx^2 \\ F & M & -dxdy \\ G & N & dy^2 \end{vmatrix} = 0, \quad dx^2 + dy^2 = 1 \quad (6)$$

により U 上に定まるベクトル場 v_1, v_2 を第1, 2主方向ベクトル場と呼ぶ.

これらの概念を用いた特徴線で, 特に造船に役立つと期待されるものを紹介する.

Parabolic curve

ガウス曲率 K は $K = \kappa_1\kappa_2$ と書ける. $K = 0$ に定まる点を **parabolic 点**と呼び, その集合を **parabolic curve** と呼ぶ. **Parabolic curve** は多くの場合で, **elliptic** (お椀型) 領域と **hyperbolic** (鞍型) 領域を分割する曲線として存在する.

図2に曲面上の **parabolic curve** の例を示す.

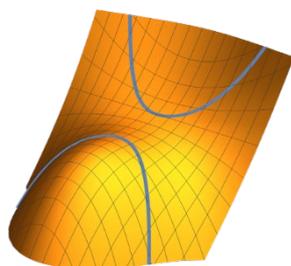


Fig.2 Parabolic curve の例

Ridge curve

曲面の尾根のような部分は, 曲率線に沿った曲率関数の極大極小点と思える.

$$v_1(\kappa_1) v_2(\kappa_2) = 0 \quad (7)$$

(7)式によって定義される点を, **ridge 点**と呼び, その集合を **ridge curve** と呼ぶ.

図3に曲面上の **ridge curve** の例を示す.

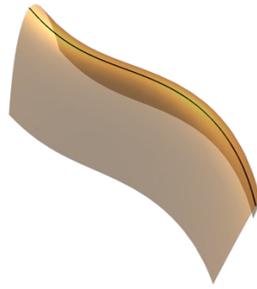


Fig.3 Ridge curve の例

Sub-parabolic curve

$$v_2(\kappa_1) v_1(\kappa_2) = 0 \quad (8)$$

(8)式によって定義される点を, sub-parabolic 点と呼び, その集合を sub-parabolic curve と呼ぶ. 曲率線の測地的変曲点 (測地曲率 0) と sub-parabolic 点に対応していることが Morris (1996) ³⁾により示されている.

具体例

1. 双曲放物面 (hyperbolic paraboloid) に対する ridge curve (図 4) と sub-parabolic curve (図 5) は下図のようになる.

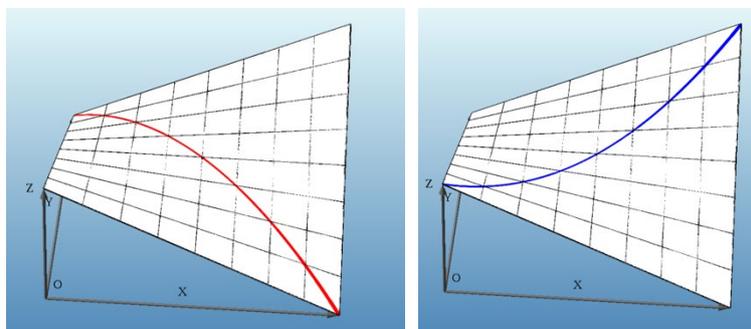


Fig.4 双曲放物面上の Ridge curves

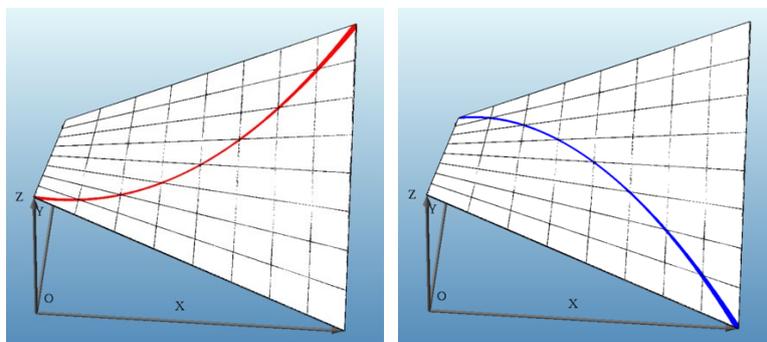


Fig.5 双曲放物面上の Sub-parabolic curve

2. 実際の船体の外板曲面の例に対する ridge curve は図 6 のようになる.

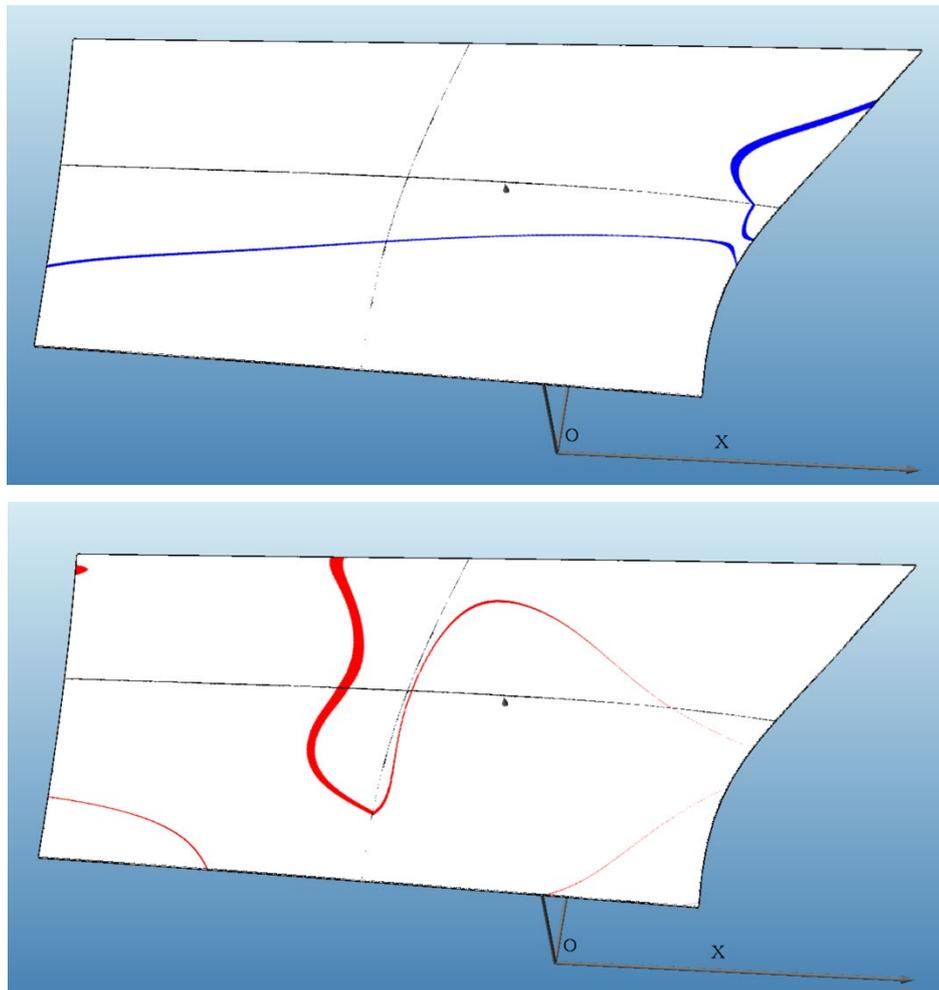
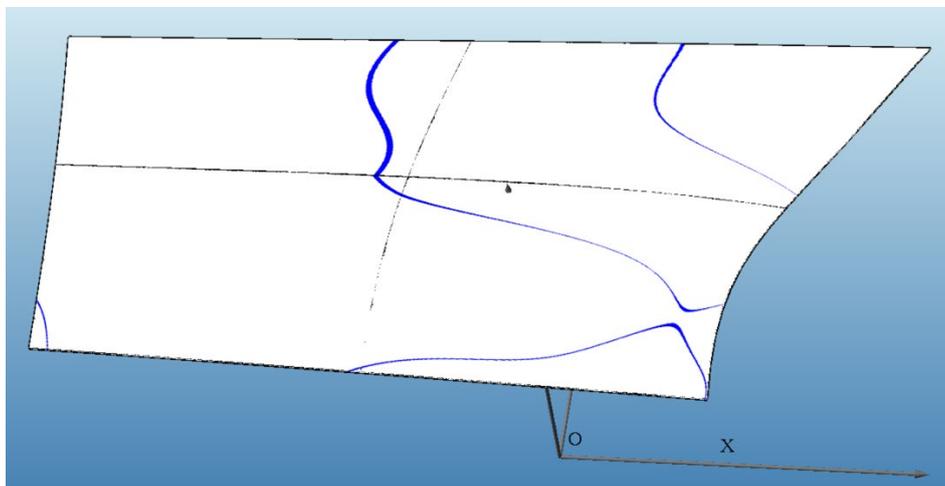


Fig.6 船体曲面上の Ridge curve

3. 実際の船体の外板曲面の例に対する sub-parabolic curve は図 7 のようになる.



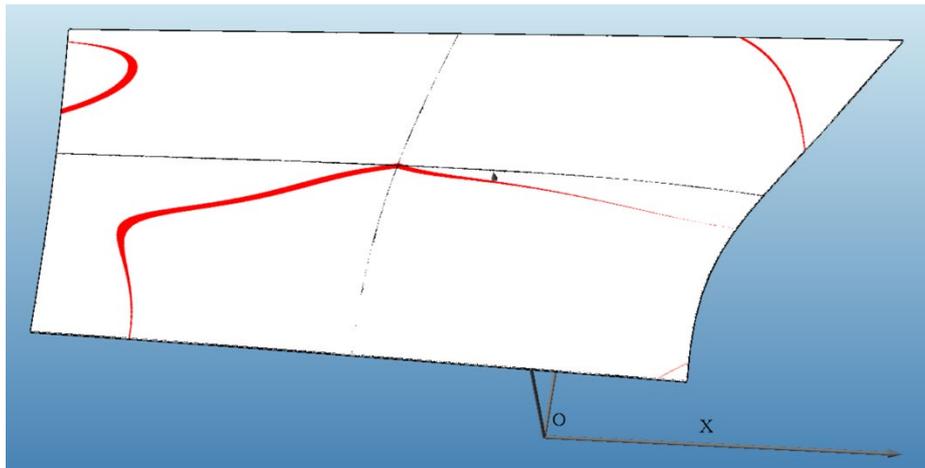


Fig.7 船体曲面上の sub-parabolic curve

今後の課題

今回の期間中の議論や研究によって今後の課題が明確化した。以下の通りである。

1. 上記のような曲面上の幾何学的特徴線を離散的な曲面上でどのように表現すべきか？
2. 上記のような曲面上の幾何学的特徴線を実際の造船の現場においてどのように役立てるべきか？

上記のような幾何学的特徴線の一部は CV, CG やものづくりの現場においても実際に利用されている。それらの分野での利用例を学ぶことで上記の課題解決の糸口を見つけられると考えている。

参考文献

- [1] 松尾宏平他, 曲率展開による新外板展開法とそのソフトウェア・パッケージ化について, 日本船舶海洋工学会講演会論文集, 第 1 号, pp.285-286, 2005.
- [2] 松尾宏平他, 曲率線を用いた新しい外板ランディング手法について, 日本船舶海洋工学会講演会論文集, 第 3 号, pp.525-526, 2006.
- [3] R Morris, The sub-parabolic lines of a surface, Institute of mathematics and its applications, 1996.

3. 2 曲面を有する構造物の合理的な設計法に関する研究

船舶は自由曲面を有する構造物であり、船舶の構造や区画（タンク、機関室等）は船舶の外形を表す自由曲面の内部に配置される。このため、自由曲面の形状に合せた合理的な設計が望まれるが、例えば区画配置について、船体の内部に配されるタンク（貨物室）は、

設計や製造の簡便性の観点から、自由曲面の内部に単純な平面体で配置されることが一般的である。このような配置の場合、空間的な無駄が生じており、自由曲面における合理的な内部区画の設計法が望まれている。

例えば図 1 は、船内のタンクを、従来の平面体形状で配置した場合（赤で表示）と、船体外板に沿って曲面形状タンクにした場合（青で表示）の様子を示したものであるが、この例の場合、曲面形状タンクにすることでタンク容積を約 1.3 倍に増すことができる。

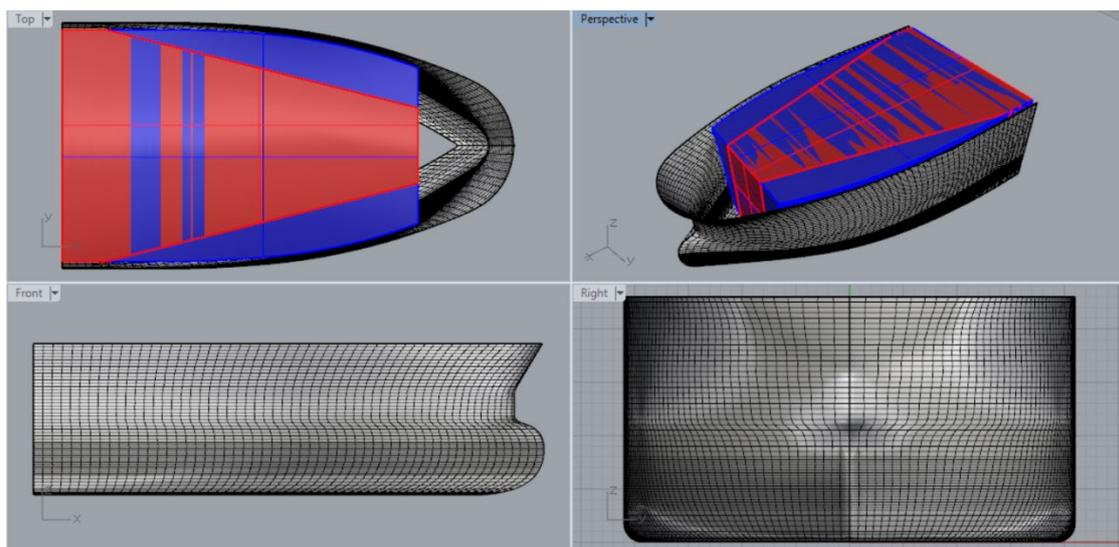


Fig.1 船内タンクの配置

一方、内部の区画を曲面形状とした場合、その成形のために工数が増加することが見込まれる。船体内部の区画の場合、平滑な曲面形状にする必要はないため、非可展面の可展面近似等による形状表現と曲げ加工の簡易化が実用化の観点から有望である。このため、本短期共同研究では、この課題について取り上げ、特に折紙技術の適用可能性について検討を行った。

折紙技術

本節では、造船に役立つと思われるこれまで折紙分野で得られている知見を紹介する。折紙は可展面であるという制約を守りながら「折り」という操作を入れることで多様な形状を生み出すものであり、造船への活用が期待できる工学的内容としては、曲面成型の理論、外板の多面体板近似、展開機能、剛性付与などが考えられる。

これまでの折紙の数理的研究については不定期に開催されている折紙の科学国際会議の内容を追っていくのが話題の変遷を把握するのに役立つ。1989年にイタリアで藤田により開かれたのにはじまり、最近では2018年第7回の会議がOxfordで開かれている。第1回～第3回にかけては作図問題、Dragon Curve、折面のGauss Map、高次元平坦折り、非平

平坦折りとは数学的課題が多かったのに対し、第4回で剛体折り、折りのシミュレーションなど数理工学的要素が入り、それ以降 Tessellation(平織り), Self-folding(自己折り), Fold core(折紙サンドイッチパネル), 曲線折り等々、扱われる対象は数理・工学・デザインの融合した話題の広がりを見せている。

ここでは、特に平面から折りを入れることにより曲面を形成する「曲面・曲線折り」に関する研究紹介と、発表者が取り組んできた「剛体折りモデル」に関して得られた成果について扱う。

曲線折りについて^{[1][2][3]}

折紙で曲面を表現する方法としては、プリーツ折り、Ron Resch のパターン^[4]等のテクニックが知られており、最近では曲面3角形メッシュを基本とした“Origamizer”^[5]、平坦可折・剛体可折条件を保持しつつ半展開形状を指定する曲面とする“Free Form Origami”^[6]といった曲面折紙作成支援のソフトウェア開発もされている。一方、折線を曲線とする「曲線折り」によっても曲面は形成され、古くは1927年のJ.AlbersによるBauhaus Modelにさかのぼる。1970年代にはRon Resch, D. Huffman^[7]といった技術者による曲線折りの分析がなされており、その後もランプシェード、金属柱カバー、車体外板デザイン等、曲線折りの製品への適用検討例もみられる。曲線折りの分析方法としては、折線となる曲線と、それによって形成される曲面を短冊状の直線面素集合 (Rule segment) として扱うというもので、折線の接触平面は折線両側接平面を二等分する、折線凸側のRuling line 山谷は折線山谷と同符号に対し凹側のRuling line 山谷は折線山谷と異符号、向い合う曲折線が凸同士・凹同士の場合は折線の山谷は同符号に対し向い合う曲折線が凸と凹の場合は折線の山谷は異符号となる、といった特徴が得られている^[8]。ここから与えられた折り曲線から曲線折りが存在するか、存在するとしたらRuling lineが決定できるかといった研究に発展している^{[2][9]}。



Fig.2 Ron Resch's pattern^[4]

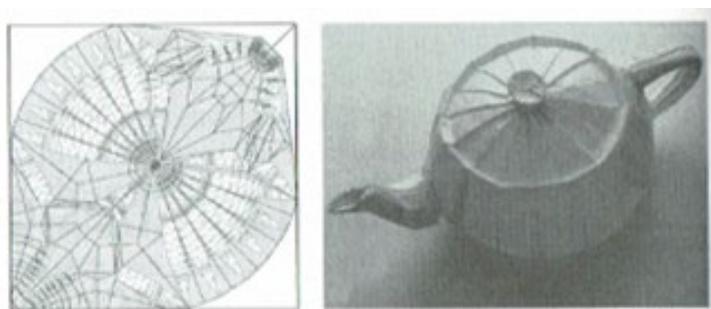


Fig.3 Origamizer^[5]

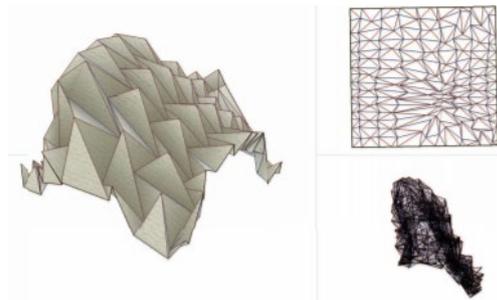


Fig.4 Free Form Origami^[6]

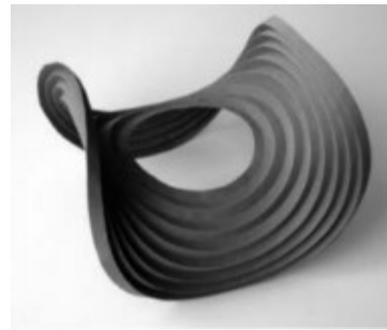


Fig.5 Bauhaus model



Fig.6 Huffman's tower^[7]

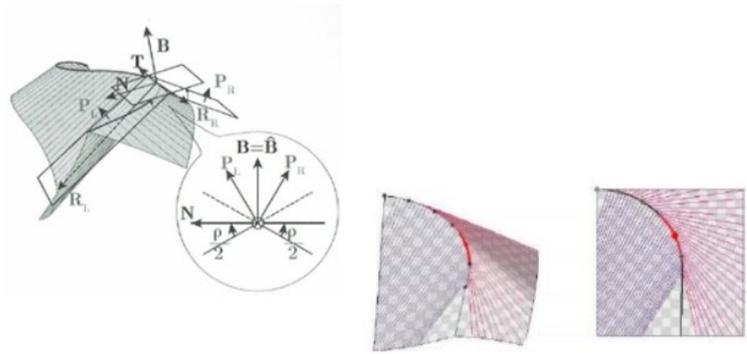


Fig.7 Ruling line^{[8][9]}

剛体折りについて^{[10][11][13]}

剛体折りモデルとは剛なパネルがヒンジによって接続されたモデルで、パネル内は曲げやひずみを発生せず変形はヒンジ回転のみで発生するとするモデルである。剛体折紙に関する問題はしたがって構造の機構的・運動学的な側面からの特徴づけとなる。展開図情報から折りの性質を読み取るものとして平坦可折性 (Flat Foldability) と比較すると、これは完全に折り畳まれた状態 (折り角 $\rho_i = \pm\pi$) の存在性を議論するものであるが、平坦可折性 (Rigid Foldability) はその状態へ到達するまでの経路の存在性を議論するものである。これは展開状態から各折線に関してどのような微小な折り角変化(ρ_i)が存在するかを扱う問題となる。(図 8)

単頂点周りに集中する折線に関して剛体折り角速度抽出法として、「可能な折り角速度 ρ_i で重みづけされた折線ベクトル \mathbf{l}_i を反時計回りに順次接続したとき、向き付けされた面積 0 となる閉じたループを描くことができる」(図 9) があるが、この条件は平坦状態であることによる特異性に由来している。比較できるものとしてリンケージモデルの変形モード抽出問題がある^[12]。これは節点変位 \mathbf{x}_i が変数、不伸長条件が拘束条件となり、 Δt 後の変形を節点位置について Taylor 展開時の 1 階微分項の考慮により変形モードが求まるが (微小範囲)、特異な状態では 2 階微分項の考慮によって変形可能性 (有限範囲) が判定される。同様に剛体折りモデルに対しては折り角 ρ_i が変数、回転行列を使った単頂点周りの周回条件が

拘束条件となり, Δt 後も拘束条件を満足するとおくと半開状態時には1階微分項の考慮のみにより可能な折角速度モードが求まるが, 平坦状態時は1階微分項考慮のみでは条件数が不足し2階微分項までの考慮が必要となる(図10). これを幾何的に解釈したものが1階微分項→「 $\rho_i l_i$ のベクトル和が0」, 2階微分項→「 $\rho_i l_i$ を順次接続してできる閉ループは向付けされた面積0」となる.

この剛体折り条件によって単頂点周りの折り角速度を特徴づけることができるが, 多頂点を持つ展開図も共有する折線の折り角速度の無矛盾性によりある程度判定することもできる. 剛体折りに関する今後の発展課題として以下のものがある.

- 可展面・非可展面の剛体折り変形経路の特徴づけ: 可展面折り経路曲線は非可展面折り経路の漸近的挙動を示すとともに, 平坦時は折り経路に関して分岐するという性質を示す.
- 複頂点折線構造の剛体折り: 高階微分項の考慮が必要か.
- 曲線折りとの関係: 曲線折りでの曲面部を **Rule Segment** として離散近似し剛体折りの知見を適用できる.

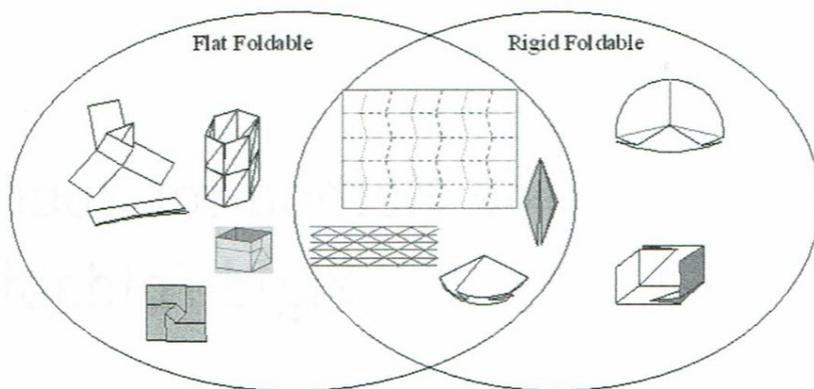


Fig.8 剛体可折と平坦可折^[10]

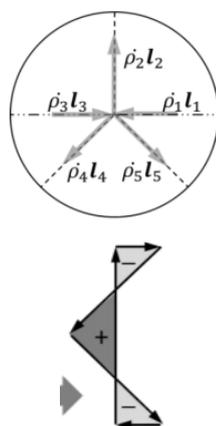


Fig.9 剛体可折図式判定^[13]

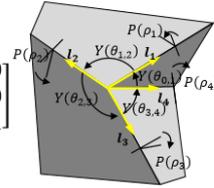
●半開状態頂点周りの角度条件式

頂点周りの折り角 ρ , 平面角 θ

$$\mathbf{R}(\rho_1, \dots, \rho_n) = \chi_1 \cdots \chi_n = \mathbf{I}$$

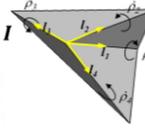
$$\chi_i = \mathbf{P}_i \mathbf{Y}_{i,i+1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \rho_i & -\sin \rho_i \\ 0 & \sin \rho_i & \cos \rho_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta_{i,i+1} & -\sin \theta_{i,i+1} & 0 \\ \sin \theta_{i,i+1} & \cos \theta_{i,i+1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(Kawasaki(1997), Belcastro, Hull(2002))



●折角速度モード条件 $\dot{\rho}_i$

$$\mathbf{R}(\rho_1, \rho_2, \dots)|_{t=0} + \mathbf{R}'\dot{\rho}|_{t=0}\Delta t + \frac{1}{2}(\mathbf{R}''\ddot{\rho} + \dot{\rho}^T \mathbf{R}''\dot{\rho})|_{t=0}\Delta t^2 + o(\Delta t^3) = \mathbf{I}$$



1階微分

$$\mathbf{R}'\dot{\rho} = \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial R_{kl}}{\partial \rho_i} \dot{\rho}_i \right) = 0$$

変形

$$\sum \dot{\rho}_i \mathbf{l}_i = 0 \quad \mathbf{l}_i: \text{折線ベクトル}$$

2階微分

$$\mathbf{R}''\ddot{\rho} + \dot{\rho}^T \mathbf{R}''\dot{\rho} = 0$$

$\dot{\rho}$ は以下を満足するか
 $[\mathbf{I} - \mathbf{R}'\mathbf{R}^+][\dot{\rho}^T \mathbf{R}''\dot{\rho}] = 0$?

$\dot{\rho}_i \mathbf{l}_i$ を結んだベクトルは
 向付けされた面積0

Fig.10 剛体折り角速度条件の各項対応

まとめ

造船への折紙理論の適用を見据えて曲線折り，剛体折りについての紹介を行った．折紙が等長変形という制約のもとでの造形であるのに対し，一般の板曲げ成形は伸び変形を伴う．目指す外板加工は板曲げ成形に対して制約付与あるいは最適化という扱いとなるが，折紙の観点からは制約を緩和するというアプローチとなり，今回の検討課題は両制約間の中間的位置づけとしてとらえることができる．厳しい条件側である折紙について得られている諸性質は効果的な外板形状形成を検討する際の参考になると考えられる．

参考文献

- [1] E. D. Demaine, M. L. Demaine, D. Koschitz, T. Tachi, "Curved Crease Folding a Review on Art, Design and Mathematics", Proceeding of 52nd Annual Symposium of IASS (2011).
- [2] D. Koschitz, "Computational Design with Curved Creases: David Huffman's Approach to Paper Folding", Ph.D. thesis, MIT (2014).
- [3] D. Koschitz, "Designing with Curved Creases", Advances in Architectural Geometry 2016(2016), 82-103.
- [4] R. Resch, H. Christiansen, "Kinematic Folded Plate System", IASS Symposium on Folded Plates and Prismatic Structures (1970).
- [5] T. Tachi, "3D Origami Design Based on Tucking Molecules", in Origami4: The Fourth International Conference on Origami in Science, Mathematics, and Education, A K Peters (2009), 259-272.

- [6] T. Tachi, "Freeform Variations of Origami", *Journal for Geometry and Graphics* Volume 14, No. 2 (2010), 203–215.
- [7] D. A. Huffman, "Curvature and Creases: A Primer on Paper", *IEEE Transaction on Computers* C-25:10, (1976), 1010-1019.
- [8] E. D. Demaine, M. L. Demaine, D. A. Huffman, T. Tachi, "Characterization of Curved Creases and Ruling: Design and Analysis of Len's Tessellations", in *Origami6: 6th International Meeting of Origami Science, Mathematics, and Education*, AMS (2011), 209-230.
- [9] Y. Watanabe, J. Mitani, "Modelling the Folding Motions of a Curved Fold", in *Origami7: The 7th International Meeting on Origami in Science, Mathematics, and Education*, Tarquin (2018), 1135-1150.
- [10] N. Watanabe, K. Kawaguchi, "The method for judging rigid foldability", in *Origami4: The Fourth International Conference on Origami in Science, Mathematics, and Education*, A K Peters (2009), 165-174.
- [11] T. Tachi, "Simulation of rigid origami", in *Origami4: The Fourth International Conference on Origami in Science, Mathematics, and Education*, A K Peters (2009), 175-187.
- [12] 田中, 半谷, "不安定トラスの剛体変位と安定化条件", *日本建築学会構造系論文集* 356(1985), 35-43.
- [13] 渡邊, "剛体折紙モデルの特異状態における可折条件", *日本応用数学会論文誌*, Vol.28, No.1(2018), 54-71.

3. 3 自由曲面の平面展開に関する研究

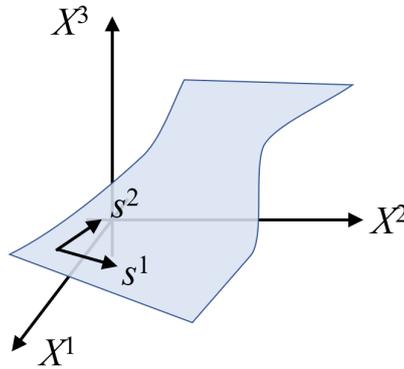
船体外板の平面展開のため、曲率線展開法が考案されている。曲率線展開法は曲率線を展開基線に平面展開する手法であるが、展開過程において最大曲率線を最小曲率線で接続する際、最小曲率線上のどの位置における最大曲率線で接続すればよいかについて合理的な手法がなかった。本共同研究においては、この問題に対する合理的な決定手法について幾何学的観点から検討を行った。

1 幾何学的設定と準備

以下、アインシュタイン慣習を使い、ギリシャ文字 α, β, γ が二度添え字が現れると $\{1, 2\}$ で和を取ることにし、 i, j, k が2度現れると $\{1, 2, 3\}$ で和を取ることにする。ユークリッド空間 \mathbb{E}^3 内の滑らかな曲面 S を考える。曲面は局所的に局所パラメーター $s = (s^1, s^2) \in I = (0, 1) \times (0, 1)$ により

$$\mathbf{X} : I \hookrightarrow \mathbb{E}^3$$

として記述されているとする。つまり、 $\mathbf{X}(s) = (X^1(s), X^2(s), X^3(s))$ となっている。



ここで、動標構 (moving frame) を

$$e_\alpha^i := \frac{\partial}{\partial s_\alpha} X^i := \partial_\alpha X^i, \quad (\alpha = 1, 2, i = 1, 2, 3),$$

で定義し、 \mathbf{e}_3 を単位法線ベクトルとする。 $\mathbf{e}_\alpha := (e_\alpha^1, e_\alpha^2, e_\alpha^3)$ と記す。また、

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$$

をユークリッド空間の内積とする。双対ベクトル場 (双対動標構) を

$$\langle \mathbf{e}^\alpha, \mathbf{e}_\beta \rangle = \delta_\beta^\alpha.$$

で導入する。ただし $(\delta_\beta^\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ とする。このとき、 $(\mathbb{E}^3|_S)$ 上の3成分のベクトル場 \mathbf{b} に対する共変微分を

$$\nabla_\alpha \mathbf{b} := \partial_\alpha \mathbf{b} - \langle \partial_\alpha \mathbf{b}, \mathbf{e}_3 \rangle \mathbf{e}_3$$

とし、

$$\nabla_\alpha \mathbf{e}_\beta = \Gamma_{\alpha, \beta}^\gamma \mathbf{e}_\gamma$$

とする. $\Gamma_{\alpha,\beta}^\gamma = \langle \nabla_\alpha \mathbf{e}_\beta, \mathbf{e}^\gamma \rangle = \langle \partial_\alpha \mathbf{e}_\beta, \mathbf{e}^\gamma \rangle$. ワインガルテン写像は

$$\partial_\alpha \mathbf{e}_3 = \Gamma_{3,\alpha}^\beta \mathbf{e}_\beta$$

と定義され. 第二種基本量は

$$\gamma_{\beta\alpha}^3 := \langle \mathbf{e}_3, \partial_\alpha \mathbf{e}_\beta \rangle$$

となる. つまり, $(\nabla_\alpha \mathbf{e}_\beta = \partial_\alpha \mathbf{e}_\beta - \gamma_{\beta\alpha}^3 \mathbf{e}_3$ である.) 計量テンソルを

$$g_{\alpha\beta} := \langle \mathbf{e}_\alpha, \mathbf{e}_\beta \rangle$$

として, その双対として $g^{\alpha\beta}$ を考える.

$$\partial_\alpha \langle \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_\beta \rangle = 0 \text{ より}$$

$$\Gamma_{\beta\alpha}^3 = -\Gamma_{3\alpha}^\gamma g_{\gamma\beta}.$$

ここで $\Gamma_3 := (\Gamma_{3\alpha}^\gamma)$ を

$$|\Gamma_3 - \lambda I_2| = 0$$

とする特性方程式を考えることで, 平均曲率 H とガウス曲率 K は

$$H = -\frac{1}{2} \text{tr} \Gamma_3, \quad K = \det \Gamma_3$$

となる.

2 ガウス曲率と経路のズレ

$u = (u^1, u^2)$ と $t = (t^1, t^2)$ に対して

$$\mathbf{b}_\gamma(u, t) := e^{u^\alpha \nabla_\alpha} e^{t^\alpha \nabla_\alpha} \mathbf{e}_\gamma$$

を考察する. $|u^\alpha| \ll 1$, $|t^\alpha| \ll 1$ のとき,

$$\mathbf{b}_\gamma(u, t) = \mathbf{e}_\gamma + u^\alpha \nabla_\alpha \mathbf{e}_\gamma + t^\alpha \nabla_\alpha \mathbf{e}_\gamma + \left(\frac{1}{2} (u^\alpha u^\beta + t^\alpha t^\beta) + u^\alpha t^\beta \right) \nabla_\alpha \nabla_\beta \mathbf{e}_\gamma + o_2(t, s)$$

ただし, $o_\ell(t, s) := o\left((\max(|t|, |s|))^\ell\right)$ とする.

$$\begin{aligned} \nabla_\alpha \nabla_\beta \mathbf{e}_\gamma &= \nabla_\alpha \Gamma_{\beta,\gamma}^\lambda \mathbf{e}_\lambda \\ &= \nabla_\alpha \Gamma_{\beta,\gamma}^\lambda \mathbf{e}_\lambda + \Gamma_{\beta,\gamma}^\lambda \nabla_\alpha \mathbf{e}_\lambda \\ &= \partial_\alpha \Gamma_{\beta,\gamma}^\lambda \mathbf{e}_\lambda + \Gamma_{\beta,\gamma}^\lambda \Gamma_{\alpha,\lambda}^\mu \mathbf{e}_\mu \end{aligned}$$

より

$$\mathbf{b}_\gamma(u, t) = \mathbf{e}_\gamma + u^\alpha \nabla_\alpha \mathbf{e}_\gamma + t^\alpha \nabla_\alpha \mathbf{e}_\gamma + \left(\frac{1}{2} (u^\alpha u^\beta + t^\alpha t^\beta) + u^\alpha t^\beta \right) \left(\partial_\alpha \Gamma_{\beta,\gamma}^\lambda \mathbf{e}_\lambda + \Gamma_{\beta,\gamma}^\lambda \Gamma_{\alpha,\lambda}^\mu \mathbf{e}_\mu \right) + o_2(u, t)$$

そこで, s, t を入れ替えたモノの差

$$\delta \mathbf{b}_\gamma(u, t) := \mathbf{b}_\gamma(u, t) - \mathbf{b}_\gamma(t, u)$$

を考え, 以下この値を計算する.

$$\delta \mathbf{b}_\gamma(u, t) = u^\alpha t^\beta (\partial_\alpha \Gamma_{\beta, \gamma}^\mu - \partial_\beta \Gamma_{\alpha, \gamma}^\mu + \Gamma_{\beta, \gamma}^\lambda \Gamma_{\alpha, \lambda}^\mu - \Gamma_{\alpha, \gamma}^\lambda \Gamma_{\beta, \lambda}^\mu) \mathbf{e}_\mu$$

となる. リーマン曲率テンソルは

$$R_{\alpha\beta\gamma}^\mu = \partial_\alpha \Gamma_{\beta\gamma}^\mu - \partial_\beta \Gamma_{\alpha\gamma}^\mu + \Gamma_{\alpha\lambda}^\mu \Gamma_{\beta\gamma}^\lambda - \Gamma_{\beta\lambda}^\mu \Gamma_{\alpha\gamma}^\lambda$$

と定義されるので,

$$\delta \mathbf{b}_\gamma(u, t) = \mathbf{b}_\gamma(u, t) - \mathbf{b}_\gamma(t, u) = u^\alpha t^\beta R_{\alpha, \beta, \gamma}^\mu \mathbf{e}_\mu$$

となる.

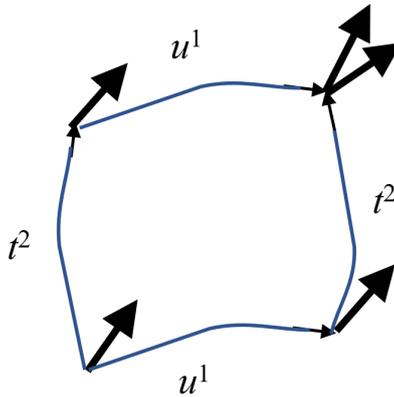
$$R_{\alpha\beta\gamma\delta} = g_{\epsilon\delta} R_{\alpha\beta\gamma}^\epsilon$$

とするとガウス曲率 K との関係は

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta} = K(g_{\alpha\gamma}g_{\beta\delta} - g_{\alpha\delta}g_{\beta\gamma})$$

となることが知られている. よって,

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{b}_\gamma(u, t) &= \mathbf{b}_\gamma(u, t) - \mathbf{b}_\gamma(t, s) \\ &= u^\alpha t^\beta K(g_{\alpha\gamma}g_{\beta\delta} - g_{\alpha\delta}g_{\beta\gamma})g^{\delta\mu} \\ &= u^\alpha t^\beta K(g_{\alpha\gamma}\delta_\beta^\mu - \delta_\alpha^\mu g_{\beta\gamma})\mathbf{e}_\mu \\ &= u^\alpha t^\beta K(g_{\alpha\gamma}\mathbf{e}_\beta - g_{\beta\gamma}\mathbf{e}_\alpha) \end{aligned} \tag{1}$$



これより, ある地点での曲率曲線方向ベクトルの基底 \mathbf{e}_1 と \mathbf{e}_2 が与えられた際に,
 1) \mathbf{e}_1 方向に $u = (u^1, 0)$ 進み, そこで \mathbf{e}_2 方向に $t = (0, t^2)$ 進んだ際の基底の方向と位置

2) \mathbf{e}_2 方向に $t = (0, t^2)$ 進み, そこで \mathbf{e}_1 方向に $u = (u^1, 0)$ 進んだ際の基底の方向と位置の方向のズレと位置のずれが計算することができ,

$$\delta \mathbf{b}_\gamma = u^1 t^2 K (g_{1,\gamma} \mathbf{e}_2 - g_{2,\gamma} \mathbf{e}_1)$$

となる.

$$(g_{\alpha,\beta}) = \begin{pmatrix} g_{11} & 0 \\ 0 & g_{22} \end{pmatrix}$$

のときは

$$\delta \mathbf{b}_1 = u^1 t^2 K g_{1,1} \mathbf{e}_2, \quad \delta \mathbf{b}_2 = -u^1 t^2 K g_{2,2} \mathbf{e}_1$$

と更にシンプルとなる. これらがガウス曲率に比例することがわかる.

この事実を利用して, 曲率線展開法において, 接続を適切に定めることができる. (例えば, $|K|$ が最も小さい場所を接続の点とすべき)

3 一般化ワイエルシュトラス関係式

曲線は共形構造を持っているとして,

$$g_{\alpha\beta} = \rho \delta_{\alpha\beta}$$

であると仮定する.

また $z = s_1 + \sqrt{-1}s_2, \bar{z} = s_1 - \sqrt{-1}s_2$ とし,

$$\partial = \frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial s_1} + \sqrt{-1} \frac{\partial}{\partial s_2} \right), \quad \bar{\partial} = \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial s_1} - \sqrt{-1} \frac{\partial}{\partial s_2} \right),$$

と定義し,

$$Z(s) = X^1(s) + \sqrt{-1}X^2(s), \quad \bar{Z}(s) = X^1(s) - \sqrt{-1}X^2(s)$$

とする.

一般化ワイエルシュトラス関係式とは

$$2\sqrt{-1}(\psi_+)^2 := -\bar{\partial}\bar{Z}, \quad 2\sqrt{-1}(\psi_-)^2 := -\partial Z,$$

と置くと, (曲面のディラック方程式)

$$\begin{pmatrix} -\rho^{1/2}H/2 & \partial \\ \bar{\partial} & \rho^{1/2}H/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_+ \\ \psi_- \end{pmatrix} = 0 \quad (2)$$

を満たし,

$$-2\psi_+\psi_- = \partial X^3$$

となることである.

よって、逆に (2) を満たす ψ_+, ψ_- が与えられると

$$X_1 = \int^z \frac{1}{2}(\partial Z + \bar{\partial} \bar{Z})dz, \quad X_2 = \int^z \frac{1}{2\sqrt{-1}}(\partial Z - \bar{\partial} \bar{Z})dz$$

$$X_3 = -2 \int^z \psi_+ \psi_- dz$$

として、曲面を再構成することができる。

1. $H = 0$ のときは、極小曲面のワイエルシュトラス関係式に一致し、複素解析関数 ($\bar{\partial}f = 0$) が極小曲面を与えるという事実に対応する。 ρ が正則関数の情報を持っていることに注意する。(コンパクトな領域に対してその境界に境界条件がある場合は、境界条件を満たすような正則関数は存在すれば一意である。)
2. (X^1, X^2, X^3) は、側面では船体座標系 (x, z, y) などとみる方がよいかもしい。 $z = z_0$ となる曲線の s_1, s_2 面での平行移動が、埋め込まれた空間での平行とならない現象は、この一般化ワイエルシュトラス関係式で取り扱える。
3. 曲率を微小変形

$$H \longrightarrow H + \delta H$$

とした際の解を

$$\psi_+ + \delta\psi_+, \quad \psi_- + \delta\psi_-$$

とすると、一次項まででは

$$-\frac{\rho^{1/2}\delta H}{2}\psi_+ - \frac{\rho^{1/2}H}{2}\delta\psi_+ + \partial\delta\psi_- = 0$$

$$\bar{\partial}\delta\psi_- + \frac{\rho^{1/2}\delta H}{2}\psi_- + \frac{\rho^{1/2}H}{2}\delta\psi_- = 0$$

を満たす。ここで、微分値は小さいと仮定すると

$$-\frac{\rho^{1/2}\delta H}{2}\psi_+ - \frac{\rho^{1/2}H}{2}\delta\psi_+ = 0, \quad \frac{\rho^{1/2}\delta H}{2}\psi_- + \frac{\rho^{1/2}H}{2}\delta\psi_- = 0$$

となり、 $\delta\psi_{\pm}$ を見積もることができ、主曲率が微小変化した際の埋め込みのズレ量なども概算できることとなる。

参考文献

- [1] S. Matsutani, "A constant mean curvature surface and the Dirac operator", J. Phys. A **30** (1997) 4019-4029.