平成３０年度 共同利用研究報告書

令和１年　9月　12日

九州大学 マス・フォア・インダストリ研究所長 殿

所属・職名　大阪市立大学数学研究所　専任研究員

提案者 氏名　友田　健太郎

下記の通り共同研究の報告をいたします.　記

		※整理番号	20180004	
1.研究計画題目	ブラックホール時空上のアーノルド拡散について			
2.種目（○で囲む）	a. プロジェクト研究　ⓑ 若手研究　c. 一般研究			
3.種別（○で囲む）	a. 研究集会Ⅰ　b. 研究集会Ⅱ　c. 短期共同研究　ⓓ 短期研究員			
4.研究代表者	氏 名	友田　健太郎		
	所 属 部局名	大阪市立大学数学研究所	職名	専任研究員
	連絡先			
	e-mail		TEL	
5.研究実施期間	平成31年2月11日（月曜日）～平成31年2月16日（土曜日）			
6.キーワード（複数可）	アーノルド拡散，ブラックホール時空，KAM理論，多自由度カオス			
7.参加者数	2　人　＊1			

＊1　短期研究員は九大の共同研究者も含める.
　Ⅰ，Ⅱ，短期共同研究は事務局から送った参加者データを元に記入.

8.本研究で得られた成果の概要（**成果報告書を別途要添付**　枚数は次頁参照）

多自由度のハミルトン力学系では，大域的な不安定軌道が普遍的に発生することが知られている．特に，系の共鳴線に沿って発生する不安定軌道は「アーノルド拡散」と呼ばれる．本研究では，ブラックホール時空においてアーノルド拡散は起こるか，という問に原理的に答えることを目指した．このために， Schwarzschildブラックホール時空上の測地流が完全可積分であることに注目し，その共鳴構造を解明することを目指した．具体的には以下の点について調査・検討を行った．

1. 関連文献の整理を行い， KAM 理論やアーノルド拡散に関する研究の調査を行った．
2. 研究の素地を作るために，アーノルド模型と呼ばれる力学系で起こるアーノルド拡散について検証した．
3. Schwarzschild 時空上の測地流のハミルトニアンを，作用 - 角変数で書き下すための検証を進めた．
4. アーノルド拡散の性質解明のために Arnold web と呼ばれる構造を活用できないか検討した．

各項目に関する詳細を別紙の成果報告書で報告する．

平成30年度共同利用成果報告書
ブラックホール時空上のアーノルド拡散について

友田健太郎（大阪市立大学）, 棚橋典大（九州大学）

2019 年 9 月 12 日

1　成果の概要

多自由度のハミルトン力学系では，大域的な不安定軌道が普遍的に発生することが知られている．特に，系の共鳴線に沿って発生する不安定軌道は「アーノルド拡散」と呼ばれる．本研究では，ブラックホール時空においてアーノルド拡散は起こるか，という問に原理的に答えることを目指した．このために，Schwarzschild ブラックホール時空上の測地流が完全可積分であることに注目し，その共鳴構造を解明することを目指した．具体的には以下の点について調査・検討を行った.

1. 関連文献の整理を行い，KAM 理論やアーノルド拡散に関する研究の調査を行った．
2. 研究の素地を作るために，アーノルド模型と呼ばれる力学系で起こるアーノルド拡散について検証した．
3. Schwarzschild 時空上の測地流のハミルトニアンを，作用-角変数で書き下すための検証を進めた．
4. アーノルド拡散の性質解明のために Arnold web と呼ばれる構造を活用できないか検討した.

この各項目についての成果を本書類で報告する. 測地流のハミルトニアンを作用-角変数で表した上で，これに摂動を与えてアーノルド模型と類似の構造を持った力学モデルを実現し, そのモデルに基づいてアーノルド拡散の性質や自然界における実現可能性に関する議論を進めるのが研究期間中の方針であった.

2　無限小分母の問題

完全可積分なハミルトン力学系 H_0 に，大きさ $|\epsilon| < 1$ の摂動を与えた自由度 N のハミルトニアン H を考える．

$$H(I,\theta) \;=\; H_0(I) + \epsilon V(I,\theta)\,, \qquad\qquad (0 \;\le\; \theta \;\le\; 2\pi) \tag{1}$$

ここで $I = (I_1,\dots,I_N)$，$\theta = (\theta^1,\dots,\theta^N)$ である．式 (1) のように，完全可積分なハミルトニアンの摂動として表される力学系は近可積分系と呼ばれる．$\epsilon = 0$ での運動方程式とその解は，次のように書ける．

$$\frac{\partial I_i}{\partial t} \;=\; 0\,, \qquad\qquad \frac{\partial \theta^i}{\partial t} \;=\; \frac{\partial H_0}{\partial I_i}\,, \tag{2a}$$

$$I_i(t) \;=\; I_i(t_0) \;:\; \text{const.}\,, \qquad \theta^i(t) \;=\; \omega^i(I)\,t + \theta^i(t_0)\,, \qquad \omega^i(I) \;\equiv\; \frac{\partial H_0}{\partial I_i} \;:\; \text{const.}\,. \tag{2b}$$

ω^i は基本周波数と呼ばれる．

「可積分系 H_0 が持つ性質は，摂動系 H において成立するか」ということを問題にするのが KAM（Kolmogorov–Arnold–Moser）理論である．素朴には，ハミルトニアン (1) に正準変換 $(I,\theta) \to (J,\psi)$ $(0 \le \psi \le 2\pi)$ を施して，

$$H(I,\theta) \;=\; K(J)\,, \tag{3}$$

とできれば，近可積分系は可積分系に帰着する．そこで「近可積分系を可積分系へと変換する正準変換 (3) が存在するか」ということが一つの問となる．以下に，この問が無限小分母の問題という困難に行き当たることをみる．

ハミルトニアン (1) は $\epsilon = 0$ で完全可積分なので，式 (3) を実現するような正準変換 $S(J, \theta; \epsilon)$ として，$\epsilon = 0$ で恒等変換となるものを考えるのが自然である．したがって，

$$S(J, \theta; \epsilon) \;=\; \sum_{i=1}^{N} J_i \theta^i + \epsilon S_1(J, \theta) + \epsilon^2 S_2(J, \theta) + \cdots\,, \tag{4}$$

という形をとる正準変換 S と，新しい可積分系 K

$$K(J; \epsilon) \;=\; K_0(J) + \epsilon K_1(J) + \epsilon^2 K_2(J) + \cdots\,, \tag{5}$$

の満たす関係式を探す．Hamilton–Jacobi 方程式，

$$H\left(\frac{\partial S}{\partial \theta}, \theta\right) \;=\; K(J)\,, \tag{6}$$

を ϵ のオーダーごとに等値すると，

$$K_0(J) \;=\; H_0(J)\,, \tag{7a}$$

$$K_1(J) \;=\; V(J, \theta) + \sum_i \omega^i(J)\,\frac{\partial S_1(J, \theta)}{\partial \theta^i}\,, \tag{7b}$$

となり，V と S_1 を θ に関して多重フーリエ級数展開すると，

$$V(J, \theta) \;=\; \sum_{k_1} \cdots \sum_{k_N} V_{k_1 \cdots k_N}(J) \exp\left[\mathrm{i} \sum_i k_i \theta^i\right]\,, \tag{8a}$$

$$S_1(J, \theta) \;=\; \sum_{k_1} \cdots \sum_{k_N} (S_1)_{k_1 \cdots k_N}(J) \exp\left[\mathrm{i} \sum_i k_i \theta^i\right]\,, \tag{8b}$$

と書ける．i は虚数単位である．これを式 (7b) へと代入すれば，

$$K_1(J) \;=\; \frac{1}{(2\pi)^N} \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta^1 \cdots \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta^N\, V(J, \theta)\,, \tag{9a}$$

$$(S_1)_{k_1 \cdots k_N} \;=\; -\frac{V_{k_1 \cdots k_N}}{\mathrm{i} \sum_i \omega^i k_i}\,, \tag{9b}$$

となり，$O(\epsilon)$ の範囲で正準変換 S と新しい可積分系 K が満たすべき関係式が現れる．式 (9b) は，可積分系の基本周波数 $(\omega^1, \omega^2, \ldots, \omega^N)$ が共鳴条件

$$\omega^1 k_1 + \omega^2 k_2 + \cdots + \omega^N k_N \;=\; 0\,, \tag{10}$$

を満たすとき分母がゼロとなり発散する．したがって，共鳴条件 (10) を満たす軌道に関して，式 (3) を満たす正準変換は存在せず，十分小さな摂動 $|\epsilon| \ll 1$ であっても摂動系 H と可積分系 H_0 との性質が劇的に変化する．この結果は無限小分母の問題と呼ばれ，ハミルトン力学系におけるカオスの基本的な発生機構とされる．逆に，非共鳴条件の一つであるディオファントス条件 $\left|\sum_i \omega^i k_i\right| > \alpha(\sum_i {k_i}^2)^{-\tau/2}$ (α, τ は定数) を満たす軌道については，式 (3) に相当する正準変換が存在し，可積分系における不変トーラスの構造が近可積分系でも保たれることが KAM 定理により保証されている．

3　共鳴条件とカオス, アーノルド拡散

共鳴条件 (10) を満たす軌道に注目し，カオスが発生する様子を観察する．簡単な例として，$N = 2$ 自由度の完全可積分なハミルトン力学系を考える．

$$H_0 \;=\; \frac{I_1^2 + I_2^2}{2}\,. \tag{11}$$

基本周波数 (ω^1, ω^2) は,

$$\omega^1 \;=\; \frac{\partial H_0}{\partial I_1} \;=\; I_1\,, \qquad\qquad \omega^2 \;=\; \frac{\partial H_0}{\partial I_2} \;=\; I_2\,. \tag{12}$$

であるから, 共鳴条件は

$$k_1\, I_1 + k_2\, I_2 \;=\; 0\,, \qquad\qquad (k_1\,, k_2 \;\in\; \mathbb{Z}) \tag{13}$$

と表される．簡単のため，$k_1 = 1$，$k_2 = 0$ とすれば，$I_1 = 0$ を満たす軌道族が共鳴条件を満たすことになる．

一共鳴模型

(11) 式に基づいて

$$H \;=\; H_0 + \delta H\,, \qquad\qquad \delta H \;=\; -\,\epsilon\cos\theta^1\,, \tag{14}$$

というハミルトニアンを考える．重力振り子 $I_1^2/2 - \epsilon\cos\theta^1$ と，自由粒子 $I_2^2/2$ とが独立に運動するハミルトン力学系であり，I_1 についてのみ共鳴項が導入されていることから一共鳴模型と呼ばれる．

運動方程式

$$\frac{\partial I_1}{\partial t} \;=\; -\,\frac{\partial H}{\partial \theta^1} \;=\; -\,\epsilon\sin\theta^1\,, \qquad\qquad \frac{\partial \theta^1}{\partial t} \;=\; \frac{\partial H}{\partial I_1} \;=\; I_1\,, \tag{15a}$$

$$\frac{\partial I_2}{\partial t} \;=\; -\,\frac{\partial H}{\partial \theta^2} \;=\; 0\,, \qquad\qquad \frac{\partial \theta^2}{\partial t} \;=\; \frac{\partial H}{\partial I_2} \;=\; I_2\,, \tag{15b}$$

は厳密に解けて，その解は

$$\theta^1(t;\kappa) \;=\; 2\mathrm{am}\left(\sqrt{\frac{\epsilon}{\kappa}}\,(t-t_0);\kappa\right)\,, \qquad I_1(t;\kappa) \;=\; 2\sqrt{\frac{\epsilon}{\kappa}}\,\mathrm{dn}\left(\sqrt{\frac{\epsilon}{\kappa}}\,(t-t_0);\kappa\right)\,, \tag{16a}$$

$$\theta^2(t) \;=\; I_2(t_0)(t-t_0) + \theta^2(t_0)\,, \qquad I_2(t) \;=\; I_2(t_0) \;:\; \mathrm{const.}\,, \tag{16b}$$

と書ける．ここで $\kappa = 4\epsilon/I_1(t_0)^2$ は初期値で決まる定数，am と dn はそれぞれヤコビの振幅関数と楕円関数である．

共鳴条件 $I_1|_{\epsilon=0} = 0$ を初期条件に持つ解は, $\kappa = 1$ に対応する

$$\theta^1(t;1) \;=\; 4\tan^{-1}\left(\mathrm{e}^{\sqrt{\epsilon}(t-t_0)}\right) - \pi\,, \qquad I_1(t;1) \;=\; \frac{2\sqrt{\epsilon}}{\cosh\left(\sqrt{\epsilon}(t-t_0)\right)} \tag{17}$$

であり, 相空間上のある点から $t \to -\infty$ に出発して同じ点に $t \to \infty$ に戻ってくるホモクリニック軌道を与える．この軌道を境界として相空間上における軌道の振る舞いが質的に変化することから, この軌道はセパラトリックスとも呼ばれる.

二共鳴模型, アーノルド模型

続いて，(11) 式に基づいて

$$H \;=\; H_0 + \delta H\,, \qquad\qquad \delta H \;=\; -\,\epsilon\cos\theta^1(1 + \mu\sin\theta^2)\,, \tag{18}$$

というハミルトニアンを考える．パラメーター μ で重力振り子と自由粒子が結合したハミルトン力学系であり，ハミルトニアン (11) や (14) が有していた可積分性は失われる．この模型では 2 つの自由度 I_1, I_2 が相互作用項 (18) によって関係づけられており, その共鳴条件は式 (10) で与えられる．このことからこの模型は二共鳴模型と呼ばれる.

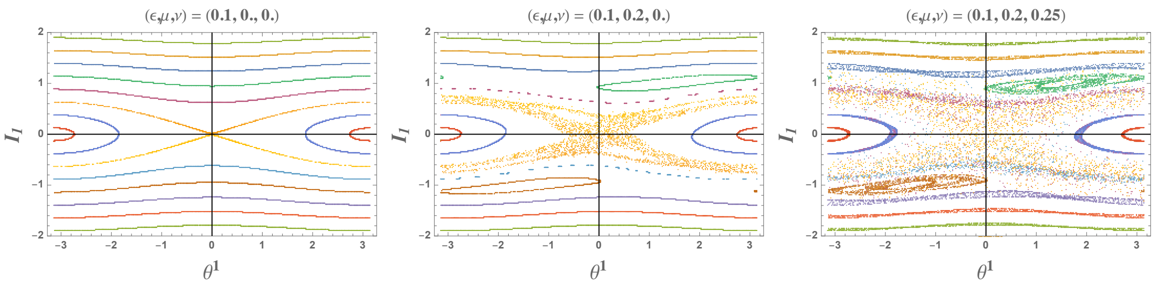
可積分性が失われることに対応して, 相空間上でセパラトリックス付近に存在する KAM トーラスは破壊されてカオス的挙動を示すようになる．図 1(a) に一共鳴模型 $(\epsilon \neq 0, \mu = 0)$, 図 1(b) に二共鳴模型

$(\epsilon = 0.1, \mu = 0.2)$ のポアンカレプロットを示す．二共鳴模型ではプロット中央付近に存在していたセパラトリックスが崩壊してカオス的軌道に変化している．

さらに，(11) 式に基づいて

$$H \;=\; H_0 + \delta H\,, \qquad\qquad \delta H \;=\; -\,\epsilon\cos\theta^1(1 + \mu\sin\theta^2 + \nu\cos t)\,, \tag{19}$$

というハミルトニアンを考える．重力振り子と，自由粒子が結合したハミルトン力学系が外力にさらされた系であり，(14) が有していた可積分性は失われる．この模型におけるポアンカレプロットを図 1(c) に示す．



(a) $\epsilon = 0.1, \mu = \nu = 0$　　(b) $\epsilon = 0.1, \mu = 0.2, \nu = 0$　　(c) $\epsilon = 0.1, \mu = 0.2, \nu = 0.25$

図 1: 摂動ハミルトニアン (19) に対して実現される運動のポアンカレプロット．$\theta^2 = 2n\pi$ $(n \in \mathbb{Z})$ の時点での (θ^1, I_1) の値をプロットしており, 初期条件として与えた $I_1(t = 0)$ の値に応じてプロット点の色を変化させている．その他の初期条件は $I_2 = 1, \theta^1 = \theta^2 = 0$ に固定した．図 1(a) は $\epsilon = 0.1, \mu = \nu = 0$, 図 1(b) は $\epsilon = 0.1, \mu = 0.2, \nu = 0$, 図 1(c) は $\epsilon = 0.1, \mu = 0.2, \nu = 0.25$ に対する図で, それぞれ一共鳴模型, 二共鳴模型, アーノルド模型に相当する．

これらの模型における時間発展の特徴を観察するため, I_2 の時間発展を図 2 に示す．一共鳴模型 (図中の黒線) においては, 自由度 I_2 は自由粒子の運動に対応し, I_2 は一定値にとどまる．二共鳴模型 (青線) では, 摂動ハミルトニアン $\delta H \;=\; -\,\epsilon\cos\theta^1(1 + \mu\sin\theta^2)$ の影響によって I_2 は初期値付近を振動する．アーノルド模型 (赤線) においては, 摂動ハミルトニアンに含まれる $\nu\cos t$ 項の影響により, I_2 の平均値が徐々に変化するという現象が見られる．図 2(a) に $I_2(t)$ の時間発展, 図 2(b) に $I_2(t)$ の振動を数周期にわたって平均化した量に相当する $\hat{I}_2(t) \equiv T^{-1}\int_t^{t+T} I_2(t')dt'$ を示す．無摂動状態においては保存されていた I_2 がアーノルド模型においては時間とともに変化しており, この模型における特徴的な時間発展となっている．

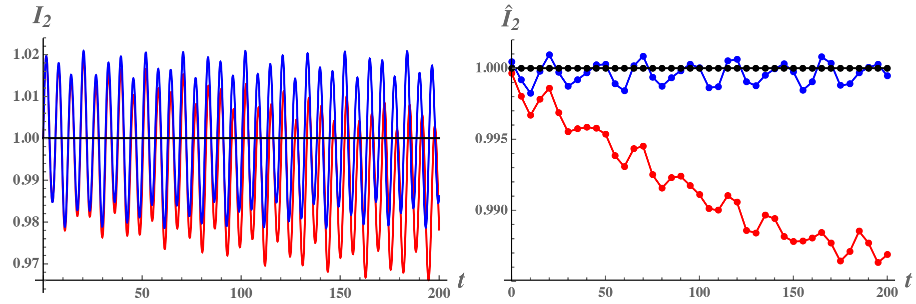
アーノルド模型は自由度 2 の非自励系であるが, これは自由度 3 の自励系と等価である．自励系においてはエネルギーが保存するため相空間は $2N - 1$ 次元となり, これが N 次元の KAM トーラスによって層状に分割されることになる．自由度 N が 2 以下の近可積分自励系では, 相空間内における KAM トーラスの余次元が $2N - 1 - N = N - 1 \leq 1$ となるため, カオス的軌道が発生したとしても, それは破壊されずに残った KAM トーラスがなす層の内部に閉じ込められる．一方, $N \geq 3$ の多自由度系においては, KAM トーラスの余次元が高次元化することに伴い, 近可積分系においてもカオス的軌道が KAM トーラスによって遮られることなく運動をすることが可能となる．この相空間上における大域的な運動がアーノルド拡散と呼ばれるものであり, 式 (19) と類似の模型に基づく近可積分系においても作用が大きく変化する軌道が存在することが証明されている [1].

4　ブラックホール時空における粒子の運動

4.1　Schwarzschild 時空上の測地流

本研究の目的であるブラックホール時空における粒子の運動について解析に向けて, 基本事項をまとめる．最も単純なブラックホール時空である Schwarzschild 時空の計量は, ブラックホールの質量を M とすると

$$ds^2 = g_{ab}dx^a dx^b = -f(r)dt^2 + \frac{1}{f(r)}dr^2 + r^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2\right), \qquad f(r) \equiv 1 - \frac{2M}{r} \tag{20}$$



(a) (b)

図 2: $I_1 = 0.2, I_2 = 1, \theta^1 = \theta^2 = 0$ を初期値とした場合の I_2 の時間発展．図中の黒線は一共鳴模型 ($\epsilon = 0.1, \mu = \nu = 0$), 青線は二共鳴模型 ($\epsilon = 0.1, \mu = 0.2, \nu = 0$), 赤線はアーノルド模型 ($\epsilon = 0.1, \mu = 0.2, \nu = 0.25$) に対する結果である．図 (a) は $I_2(t)$ の時間発展, 図 (b) は $\hat{I}_2(t) \equiv T^{-1}\int_t^{t+T} I_2(t')dt'$ ($T = 20$) で定義される $I_2(t)$ の振動数周期分にわたる平均値である．

で与えられる．この時空における粒子の運動は, 以下で与えられるハミルトニアン

$$H = g^{ab}p_a p_b = -\frac{1}{f(r)}p_t^2 + f(r)p_r^2 + \frac{1}{r^2}\left(p_\theta^2 + \frac{p_\phi^2}{\sin^2\theta}\right) \tag{21}$$

に基づく力学系として記述される．この系において

$$p_t \equiv -E, \qquad p_\theta, \qquad p_\phi \equiv L \tag{22}$$

は第一積分であり, 特に E, L はそれぞれ粒子のエネルギーと角運動量に相当する．背景時空が球対称であることから, $\theta = \pi/2, p_\theta = 0$ に固定しても一般性が失われない．したがって, この系は

$$H = -\frac{E^2}{f(r)} + f(r)p_r^2 + \frac{L^2}{r^2} \tag{23}$$

なる一次元系に帰着される．

この系について前節のような解析を行うためには, 力学変数 (r, p_r) を書き換えることで, 式 (1) のように作用-角変数でハミルトニアンが書き下されているのが望ましい．これを目標として, 以下のような単純化を行う．まず, 粒子の運動方程式は

$$\frac{1}{4}\dot{r}^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)\left(-H + \frac{L^2}{r^2}\right) = E^2 \tag{24}$$

で与えられる．これを, ϕ の運動方程式 $\dot{\phi} = 2L/r^2$, および新変数 $u \equiv 1/r$ を用いて

$$\left(\frac{du}{d\phi}\right)^2 = 2Mu^3 - u^2 - \frac{2MH}{L^2}u - \frac{-H - E^2}{L^2} \tag{25}$$

と書き直す．ここで, 粒子の軌道上で H は一定値をとることから, r, L, E を適切にリスケールすることで $M = 1/2, H = -1$ と固定しても一般性を失わない．したがって, 方程式は最終的に

$$\left(\frac{du}{d\phi}\right)^2 = u^3 - u^2 + \frac{1}{L^2}u - \frac{1 - E^2}{L^2} \equiv F(u) \tag{26}$$

と単純化される．$F(u) \geq 0$ となる領域が粒子の運動可能領域となる．$F(u)$ の典型的な関数系を図 3 に示す．

この模型に基づいて 3 節で解析した系 (1) と類似の系を構築するためには, $F(u) = 0$ が 3 つの実解 $u_1 \leq u_2 \leq u_3$ を持つ場合に注目し, 周期軌道が実現される $u_1 \leq u \leq u_2$ における運動に注目すれば良いと考えられる．特に, $u_1 \neq u_2 = u_3$ と解が縮退するようにパラメータを選べば, $t \to \pm\infty$ で $u \to u_2$ となるようなホモクリニック軌道が実現される．

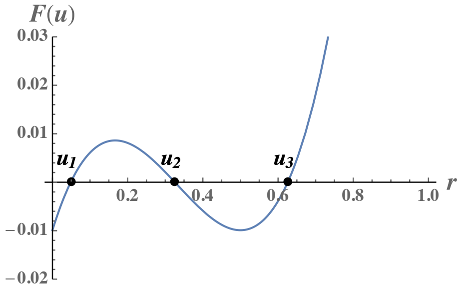


図 3: $(du/d\phi)^2 = F(r)$ の $E = 0.98, L = 2$ に対する関数形. $u = 0$ は無限遠 $r = \infty$, $u = 1$ はブラックホール半径 $r = 2M$ に相当する. 粒子の運動可能域は $F(r) \geq 0$ となる領域である. $F(u) = 0$ の根を $u_1 < u_2 < u_3$ とすると, このプロットの例では, 周回軌道に相当する $u_1 \leq u \leq u_2$, ブラックホールに落ち込む軌道である $u_3 \leq u$ の 2 種類の軌道が存在する.

4.2 Schwarzschild 時空で運動する粒子の作用-角変数

Schwarzschild 時空で運動する粒子について 3 節で行ったような解析を行うためには, 作用 (21) が作用ー角変数で書き表されていると便利である. Newton 力学におけるケプラー問題においては初等的な方法でこれを実行できることが知られているが, その一般相対論への拡張に相当する今回の問題においては非自明であるので本節で検証する.

まず, $u = 1/r$ でハミルトニアン (21) を表すと

$$H = -\frac{1}{f(u)} p_t^2 + u^4 f(u) p_u^2 + u^2 \left(p_\theta^2 + \frac{p_\phi^2}{\sin^2\theta} \right) = -\frac{1}{f(u)} E^2 + u^4 f(u) p_u^2 + u^2 L^2 \qquad (f(u) = 1 - 2Mu)$$

$$\therefore \qquad p_u = \frac{1}{u^2 f(u)} \sqrt{E^2 - f(u)\left(1 + L^2 u^2\right)} \tag{27}$$

p_ϕ に対する作用変数は $I_\phi = \oint p_\phi d\phi = 2\pi L$ と直ちに求まる. あとは p_u から作用変数 I_r を

$$I_u = \oint p_u du \tag{28}$$

によって求め, ハミルトニアン H を I_r と E, L によって表せばよい. ここでは, 4.1 節で注目した $u_1 \leq u \leq u_2$ の範囲で実現される周回軌道に注目する. この軌道について, 周回積分 (28) は解析的に実行できて

$$\begin{aligned}
I_u &= 2\int_{u_1}^{u_2} p_u du \\
&= 2\sqrt{2}\Bigg[\frac{4E^2 M^{3/2}\sqrt{\frac{1}{u_1-u_3}}\Pi\left(\frac{2M(u_3-u_2)}{2Mu_3-1}\middle|\frac{u_2-u_3}{u_1-u_3}\right)}{2LMu_3-L} - \frac{4E^2 M^{3/2}\sqrt{\frac{1}{u_1-u_3}}\Pi\left(\frac{2M(u_3-u_2)}{2Mu_3-1};\sin^{-1}\left(\sqrt{\frac{u_1-u_3}{u_2-u_3}}\right)\middle|\frac{u_2-u_3}{u_1-u_3}\right)}{2LMu_3-L} \\
&\quad - \frac{2iE^2\sqrt{\frac{M}{u_3-u_1}}\Pi\left(1-\frac{u_2}{u_3}\middle|\frac{u_2-u_3}{u_1-u_3}\right)}{Lu_3} + \frac{2iE^2 M\Pi\left(1-\frac{u_2}{u_3};\sin^{-1}\left(\sqrt{\frac{u_1-u_3}{u_2-u_3}}\right)\middle|\frac{u_2-u_3}{u_1-u_3}\right)}{Lu_3\sqrt{M(u_3-u_1)}} \\
&\quad + \frac{L\left(u_1\sqrt{M(u_1-u_3)} - i\sqrt{\frac{u_3-u_1}{M}}\right)K\left(\frac{u_2-u_3}{u_1-u_3}\right)}{u_1-u_3} - \frac{H\sqrt{\frac{M}{u_1-u_3}}\Pi\left(1-\frac{u_2}{u_3}\middle|\frac{u_2-u_3}{u_1-u_3}\right)}{Lu_3} \\
&\quad + \frac{H\sqrt{\frac{M}{u_1-u_3}}\Pi\left(1-\frac{u_2}{u_3};\sin^{-1}\left(\sqrt{\frac{u_1-u_3}{u_2-u_3}}\right)\middle|\frac{u_2-u_3}{u_1-u_3}\right)}{Lu_3} - L\sqrt{M(u_1-u_3)}\mathcal{E}\left(\frac{u_2-u_3}{u_1-u_3}\right) \\
&\quad + \frac{iL\left(\sqrt{\frac{u_3-u_1}{M}} - u_1\sqrt{M(u_3-u_1)}\right)\mathcal{F}\left(\sin^{-1}\left(\sqrt{\frac{u_1-u_3}{u_2-u_3}}\right)\middle|\frac{u_2-u_3}{u_1-u_3}\right)}{u_1-u_3} \\
&\quad + L\sqrt{M(u_1-u_3)}\mathcal{E}\left(\sin^{-1}\left(\sqrt{\frac{u_1-u_3}{u_2-u_3}}\right)\middle|\frac{u_2-u_3}{u_1-u_3}\right)\Bigg].
\end{aligned} \tag{29}$$

ただし, $u_1 \le u_2 \le u_3$ は方程式 $2Mu^3 - u^2 - \frac{2HM}{L^2}u + \frac{H+E^2}{L^2} = 0$ の根, $\mathcal{E}(m)$ は完全楕円積分, $\mathcal{F}(\phi|m)$ は第 1 種楕円積分, $\mathcal{E}(\phi|m)$ は第 2 種楕円積分, $\Pi(n|m)$ は第 3 種完全楕円積分, $\Pi(n;\phi|m)$ は不完全楕円積分である. この表式は, 3 つの実根 $u_{1,2,3}$ が存在するパラメタ H, E, L に対しては実数値を取り, 数値的に求められた積分値と一致することを確認できる.

式 (29) で与えられる I_u は H, E, L だけで決まる関数であり, 原理的にはこの逆関数を求めればハミルトニアン H が $E, I_r, I_\phi = 2\pi L$ の関数として与えられる. 残念ながら, 式 (29) が複雑なためにこの逆関数の表式を陽に与えることは難しい. 3 節で行ったのと同様の解析を実現するためには, ハミルトニアンの陽な表式が判明しているケプラー問題にブラックホール質量 M の効果を摂動として入れたり, ハミルトニアンの陽な表式を用いない何らかの手法を取るなどと言ったアプローチを取ることが必要ではないかと思われる.

5 Arnold web

本節では, アーノルド拡散の性質を解明する際に有用であると思われる解析手法についてまとめる. 2 節で注目していたような, 完全可積分なハミルトニアンに大きさ ϵ の摂動を与えて得られる

$$H = H_0 (I_1, \ldots, I_N) + \epsilon V (I_1, \theta_1; \ldots ; I_N, \theta_N) \tag{30}$$

で記述される系を考える. 摂動ハミルトニアン V のために可積分性が破れ, 作用 I_n の値は初期値から徐々に変化していく. また, その時間変化は典型的には不規則なものとなる. このような近可積分系における不規則な時間発展はアーノルド拡散として知られている. 本節では, 相空間内で Arnold 拡散の軌道がなす構造である Arnold web について解説する [2].

簡単のために 2 自由度系 ($N = 2$) を考え, その系が共鳴条件

$$n_1\omega_1 + n_2\omega_2 = 0 \qquad (n_1, n_2 \in \mathbb{Z}) \tag{31}$$

を満たすものとする. 通常の相空間 (I_1, I_2) の代わりに周波数空間 (ω_1, ω_2) を考えると, 共鳴条件を満たす周波数は原点を通る傾き $-n_1/n_2$ の直線族をなす. これらの直線族とエネルギー一定面（現在のセットアップでは周波数空間における曲線）との交点がその運動における共鳴点となる. 共鳴点に対応する共鳴トーラスは摂動に敏感であり, ハミルトニアンに加えられた摂動によって破壊されてカオス的軌道が生じる. この際の共鳴幅は

$$\frac{\Delta H}{H_c} \simeq \epsilon \exp\left(-\frac{\pi}{\epsilon^{1/2}}\right) \tag{32}$$

と評価され, 共鳴軌道の周辺に摂動パラメタ $\epsilon^{1/2}$ について指数的に小さい幅のカオス領域が発生することになる.

2 自由度系における運動の場合には, 相空間が不変トーラスによって層状に区切られるため, 破壊されていない不変トーラスによってカオス領域は有限領域に留められる. その一方で, 自由度の数がより大きい場合には不変トーラスが相空間を分割することはなく, カオス的軌道は相空間の全域を運動するようになる. まず, N 自由度系における共鳴条件は

$$n_1\omega_1 + \cdots + n_N\omega_N = 0 \tag{33}$$

で与えられる. 運動の経路は相空間内の等エネルギー面で与えられるが, その上で共鳴条件を満たす集合は網目状の構造をなす. この共鳴線の集合を共鳴多様体と呼ぶことにする. 先程の例と同様に, 共鳴多様体に対応する軌道の集合は, 摂動によって有限の幅を持ったカオス領域に変化する. このカオス領域は共鳴線に沿って連結した構造を持つため, この領域内の軌道は共鳴線に沿って移動していくことが可能となる. 共鳴多様体が相空間の全域にわたって広がっていることに対応して, 運動の軌道も相空間全域を運動するようになる. この大域的な運動がアーノルド拡散として知られているものである. この拡散は共鳴多様体上に沿って起こるため, 共鳴多様体の構造は “Arnold web” と呼ばれている.

相空間上で Arnold web が描く構造を数値的に求めて図示するための方法が Cordani によって提案されている [3]. カオス的な軌道上では作用の値が時間とともに不規則に変化するが, それに対応して軌道の振

動数 ω_i も変化する．この振動数の時間変化を特徴づける量として Frequency modulation indicator (FMI) σ_{FMI} を

$$\sigma_{\mathrm{FMI}} \equiv \log\left(\frac{\bar{\omega}_{\max} - \bar{\omega}_{\min}}{\bar{\omega}_{\max} + \bar{\omega}_{\min}}\right) \tag{34}$$

で定義する．ただし, $\bar{\omega}_{\max,\min}$ は注目している軌道上における振動数 $\omega(t)$ の最大値・最小値である．共鳴線から遠く離れた軌道については $\omega(t)$ はほとんど変動しないために $\sigma_{\mathrm{FMI}} \to -\infty$ となる一方で, 共鳴線に近く強いカオス性を示す軌道については $\sigma_{\mathrm{FMI}} \sim 0$ となる．そのため, 軌道のパラメタ（作用の初期値など）について σ_{FMI} をプロットすることで, 相空間上でどの領域がカオス的となっているか, また各共鳴線の周辺にカオス領域がどれだけの幅で発生しているかを図示することができる．相空間上における Arnold web と, 各共鳴線ごとの性質を一挙に図示できることがこの手法の利点である．

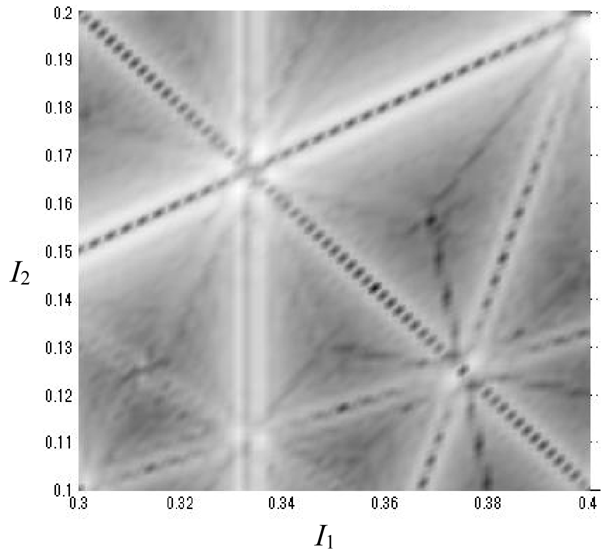


図 4: $H = \frac{1}{2}\left(I_1^2 + I_2^2 + I_3\right) + \epsilon\left(\cos\phi_1 + \cos\phi_2 + \cos\phi_3 + 4\right)^{-1}, \epsilon = 10^{-4}$ で与えられる力学系における σ_{FMI} のプロット．共鳴線 $\sum_{i=1}^{3} k_i\omega^i = k_1 I_1 + k_2 I_2 + k_3 = 0$ $(k_i \in \mathbb{Z})$ の近傍が σ_{FMI} の大きい領域としてプロット上に現れている．

文献 [3] 等では, ケプラー問題とそれに摂動を与えた場合における Arnold web の構造が図示されている．一般相対論的な効果を取り入れた暁にはどのような影響がもたらされるか, 背景時空の曲率の効果を系のカオス性から読み取ることができるかなどについて解明することが今後の課題の候補として挙げられる．

6　まとめと展望

今回実施した短期研究員制度に基づく研究では, 目標であったブラックホール時空におけるアーノルド拡散を実現するモデルの構築に向けた準備を進めた．具体的な力学系モデル構築には至らなかったものの, その実現のために必要となる手がかりと, モデル構築が実現した暁に実行可能な解析手法についての理解を深めることができた．今後も継続して議論を行い, 重力理論において実現されるカオスとその諸性質の解明を目指す．なお, 本研究期間中に, カオスの起源となる横断的ホモクリニック軌道の構造を特異摂動論に基づいた手法で厳密に与える研究 [4] についても調査を行った．本書類で報告した今後の課題のほか, このような別の方向性の課題に取り組むことについても今後検討を進めたい．

参考文献

[1] V. I. Arnol'd,“Instability of dynamical systems with many degrees of freedom”, Dokl. Akad. Nauk SSSR, **156**:1 (1964), 9-12

[2] G. M. ザスラフスキー著, 三島信彦, 斉藤徹也, 新藤茂訳, 「カオス：古典および量子力学系」, 現代工学社 (1989)

[3] B. Cordani, (2013). "Geography of order and chaos in mechanics," Springer (2013)

[4] C. Matsuoka, K. Hiraide, "Special functions created by Borel-Laplace transform of Hénon map", Electronic Research Announcements **18**, 1 (2011)

[5] 柴山允瑠, 「重点解説ハミルトン力学系：可積分系と KAM 理論を中心に」, 臨時別冊・数理科学, SGC ライブラリ 130, サイエンス社 (2016)

[6] 打田旭宏, 「一様な共鳴面上での Arnold 拡散とその量子版の解析」, 立命館大学 理工学研究科 基礎理工学専攻 非線形物理学研究室 修士論文 (2009)