

令和元年度 共同利用研究報告書

令和 元年 12月 25日

九州大学 マス・フォア・インダストリ研究所長 殿

所属・職名 九州大学マス・フォア・インダストリ研究所・JSPS 特別研究員 CPD

提案者 氏名 一木 俊助

下記の通り共同研究の報告をいたします。 記

	整理番号	20190002	
1.研究計画題目	輪郭線認識に関する数理論の発展と工学への応用		
2.種目(○で囲む)	a. プロジェクト研究 (b.) 若手研究 c. 一般研究		
3.種別(○で囲む)	a. 研究集会 I b. 研究集会 II (c.) 短期共同研究 d. 短期研究員		
4.研究代表者	氏名	一木 俊助	
	所属 部局名	九州大学マス・フォア・インダストリ研究所	職 名 JSPS 特別研究員 CPD
	連絡先	〒	
	e-mail		TEL
5.研究実施期間	令和 元年 8月 26日(月曜日)～令和 元年 8月 30日(金曜日)		
6.キーワード (複数可)	輪郭線, 可微分写像の特異点論, 微分幾何学		
7.参加者数	11人 *1		

*1 短期研究員は九大の共同研究者も含める。
研究集会 I, II, 短期共同研究は事務局から送った参加者データを元に記入。

8.本研究で得られた成果の概要(成果報告書を別途要添付 枚数は次頁参照)

滑らかな物体を見たときの輪郭線は、射影の特異点集合の像と考えることができる為、「可微分写像の特異点論」を用いた輪郭線の理論研究には多くの先行研究がある。

本短期共同研究では、工学者と数学者の議論を通じて、(現場レベルも含めた)輪郭線描写をはじめとした工学的課題をいくつか抽出し、特異点論などの数学での課題解決に向けた議論を実施した。抽出課題の中でも重要であったのは、「時間連続な輪郭線の実現」であった。アニメーション(時間変化)時には、本来連続的に輪郭線も動くはずだが、ある時刻において輪郭線が突如途切れたりする。その際、現状はその後の微修正が必要となる為、可能な限りはじめの段階から、時間連続な輪郭線描写が求められている。

本短期共同研究及びその後の考察によって、時間不連続な輪郭線の発生原因の1つは、その時刻における輪郭線に、退化した特異点の像が含まれており、それ故、プログラム等で処理・表示しにくいからではないか、と予測された。この予測が正しい場合、「特異点論」を用いることで退化した特異点の出現する時刻と位置を事前に(理論上は)計算できる為、その部分を予め強調することで、輪郭線が時間連続に見えるよう改善できるのではないかと、いう判断に至っている。本課題に関しては、実際に上記の方法を自動計算できるよう実装した上で、時間不連続な輪郭線が解消できるか否かを検証する必要があり、今後の課題の1つとなっている。

「輪郭線認識に関する数理理論の発展と 工学への応用」 成果報告書

研究代表者：一木 俊助（九州大学マス・フォア・インダストリ研究所）

2019 年 12 月 25 日

概要

本報告書は 2019 年 8 月 26 日から 8 月 30 日にかけて行われた IMI 若手研究短期共同研究「輪郭線認識に関する数理理論の発展と工学への応用」の報告書である。

1 はじめに

1.1 導入

滑らかな物体を見たときの輪郭線は、射影の特異点集合の像と考えることができる為（図 1）、「可微分写像の特異点論」を用いた輪郭線の理論研究には多くの先行研究がある [2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10]. 本短期共同研究では、工学者と数学者の議論を通じて、（現場レベルも含めた）輪郭線描写をはじめとした工学的課題をいくつか抽出し、特異点論をはじめとして数学を用いた課題解決に向けた初期方針に関する議論を実施した。抽出した主要な工学的課題は、以下の課題 (1)–(6) であり、現在それらの解決に向けて引き続き研究を進めているところである。

課題 (1) 時間連続な輪郭線の実現に向けて

課題 (2) 滑らかなカテゴリーでの示唆的輪郭線の理論構築

課題 (3) 離散的な設定の下での特異点論の構築

課題 (4) 3 次までの微分情報を用いた離散曲線・曲面の幾何学的情報の抽出

課題 (5) 輪郭線研究の多目的最適化への応用

課題 (6) 滑らかな曲面を再現する為の、サンプル点（離散点）の密集度の最小値の評価

本報告書の主目的は、抽出した上記の課題 (1)–(6) をご紹介する事及び、中でも重要である課題 (1) に対し、初期段階ではあるが「可微分写像の特異点論」の観点からの数学的アプローチを与える事である。

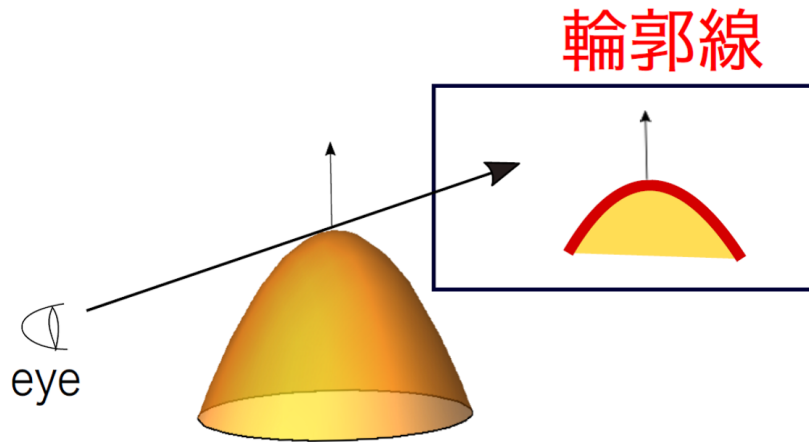


図1 輪郭線は、射影の特異点集合の像と考えられる

本報告書の構成は以下となっている。2章では、可微分写像の特異点論の基本事項を与える。3章では課題(1)、4章では課題(2)–(6)をそれぞれご紹介する。5章では、3章で用いる主張(定理3.1)の証明とその準備を行う。

1.2 共同研究プログラム

初日の8月26日は、一般公開日として、各参加者が自身の専門分野について講演を行った。講演内容を表1に示す。2日目から5日目(8月27日から8月30日)は、前日までの議論の結果等も参考にしながら、現状の工学的課題の抽出と、数学の今後の介入の方向性に関して議論した。

2日目以降は初日の講演者に加え、工学者の藤堂英樹氏(中央学院大学)と数学者の寺本圭佑氏(九州大学)にご出席頂いた。輪郭線描写に関する工学的課題は、主に藤堂氏からご教授頂いたものである。

2 可微分写像の特異点論の基本事項と概要

可微分写像の「特異点」とは、大ざっぱに言うと、微分可能な写像で定義域の空間を変形した際に、尖る等の際立った変形をする定義域上の点である。例えば、与えられた微分可能な関数 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ のグラフの概形を調べる際、有力な手法として、まず始めに微分が0になる定義域上の点を求める事を行うが、その際立った点こそが可微分関数 f の特異点である。実際に、微分が0になる点を調べることができれば、関数のグラフの概形を知ることができる。そのため、特異点(及び、その特異点タイプ)を調べる事は、可微分関数(やその一般化された概念である可微分写像)の核となる性質を調べる為の1つの有力手段であると言える。

表1 8月26日(月)公開講演プログラム

13:00-13:20	物体認識の観点からの可微分写像の大域的性質 一木 俊助 (九州大学 マス・フォア・インダストリ研究所)
13:40-14:00	曲線と曲面の射影の微分幾何学 加葉田 雄太朗 (九州大学 マス・フォア・インダストリ研究所)
14:20-14:40	曲面上の関数の特異点と輪郭線の微分幾何 長谷川 大 (岩手医科大学 教養教育センター情報科学科 数学分野)
15:00-15:40	パレートフロントの射影と輪郭線 濱田 直希 (株式会社富士通研究所)
16:00-16:30	背景差分法による変化検出手法の紹介 峰松 翼 (九州大学 システム情報科学研究院 情報知能工学部門)

上述にも登場した、「特異点」の正確な定義を与える。以下では特に断らない限り、多様体及び写像は全て C^∞ 級とし、多様体は境界なしとする。

N を n 次元多様体, P を p 次元多様体とし, $f: N \rightarrow P$ を写像とする。ここで, 点 $q \in N$ における f の微分 $df_q: T_q N \rightarrow T_{f(q)} P$ は, 点 $q \in N$ と点 $f(q) \in P$ のまわりの局所座標を用いる事で, 以下のヤコビ行列 Jf_q で表すことができる:

$$Jf_q = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(q) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(q) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_p}{\partial x_1}(q) & \cdots & \frac{\partial f_p}{\partial x_n}(q) \end{pmatrix}.$$

ここで, (x_1, \dots, x_n) は点 q のまわりの局所座標, (f_1, \dots, f_p) は点 $f(q)$ のまわりの f の局所的な表示である。このとき, $\text{rank } Jf_q < \min\{n, p\}$ であるとき, $q \in N$ は f の特異点であるという。ここで, 選んだ座標近傍によって (ヤコビ行列の成分自体は一般には変化するが) ヤコビ行列のランク自体は変わらない。従って, その点の特異点であるか否かは, 座標近傍の選び方には依存しない事を注意しておく。また, f の特異点全体の集合を f の特異点集合とよび, 記号 $S(f)$ で表すことにする。
例 2.1. 以下の式で定義される関数 $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ の特異点集合 $S(f)$ を求めてみる。

$$f(x_1, \dots, x_n) = x_1^2 + \cdots + x_n^2.$$

点 $x \in \mathbb{R}^n$ における f のヤコビ行列は以下になる:

$$Jf_x = (2x_1, \dots, 2x_n).$$

したがって, $S(f) = \{0\} \subset \mathbb{R}^n$ となる。

例 2.2. 以下の式で定義される関数 $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ の特異点集合 $S(f)$ を求めてみる。

$$f(x_1, x_2) = (x_1, x_2^2).$$

点 $x \in \mathbb{R}^2$ における f のヤコビ行列は以下になる：

$$Jf_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2x_2 \end{pmatrix}$$

したがって、 $S(f) = \mathbb{R} \times \{0\}$ となる。

注意 2.1. 可微分写像の特異点論では、例 2.1 のように、写像 $f : N \rightarrow P$ のターゲットの多様体 P が \mathbb{R} の場合、特に f を関数とよぶことがある。

以下では、写像芽（しゃぞうが）という概念が登場するが、写像芽 $f : (N, q) \rightarrow (P, f(q))$ とは、かなりざっくり言うと、点 $q \in N$ のまわりでの局所的な写像の事である。写像芽の正確な定義は、例えば [1] をご参照下さい。

点 q が $f : (N, q) \rightarrow (\mathbb{R}^2, f(q))$ の折り目特異点であるとは、微分同相写像芽 $H : (\mathbb{R}^2, f(q)) \rightarrow (\mathbb{R}^2, 0)$ と $h : (N, q) \rightarrow (\mathbb{R}^2, 0)$ が存在して、

$$H \circ f \circ h^{-1}(x_1, x_2) = (x_1, x_2^2)$$

を満たす事である。

点 q が $f : (N, q) \rightarrow (\mathbb{R}^2, f(q))$ のカスプ特異点であるとは、微分同相写像芽 $H : (\mathbb{R}^2, f(q)) \rightarrow (\mathbb{R}^2, 0)$ と $h : (N, q) \rightarrow (\mathbb{R}^2, 0)$ が存在して、

$$H \circ f \circ h^{-1}(x_1, x_2) = (x_1, x_2^3 - x_1x_2)$$

を満たす事である。

これら2つの特異点を、図 2 を用いてざっくりと説明すると、写像による変形によって折り目のように変形されてしまっている定義域上の点が「折り目特異点」であり、尖った部分に変形されてしまっている定義域上の点が「カスプ特異点」である。

また、多様体 N から多様体 P への C^∞ 級写像全体の集合を $C^\infty(N, P)$ と表し、ホイットニー C^∞ 位相（例えば、[1] を参照）が入っているものとする。この位相は、十分に高い階数までの偏微係数まで制御できる位相であるため、可微分写像の特異点論とは相性の良い位相であると言える。この位相に関して2つの写像が「近い」というのは、ざっくりと説明すると、十分に高い階数までの偏微係数が全て近い、ということの意味している。

3 時間連続な輪郭線の実現に向けて

アニメーション（時間変化）時には、本来連続的に輪郭線も動くはずだが、ある時刻において輪郭線が突如途切れたりする。その際、現状は微修正することになる為、可能な限りははじめから時間連続な輪郭線描写が求められている。本章では、これらの工学的課題を受け、現時点までの進捗の一部をご紹介します。

3.1 数学的定式化

以下でも、特に特に断らない限り、多様体と写像は C^∞ 級であり、多様体は境界なしとする。 N を2次元多様体、 $I = (a, b)$ ($a < b$) を开区間とする。开区間

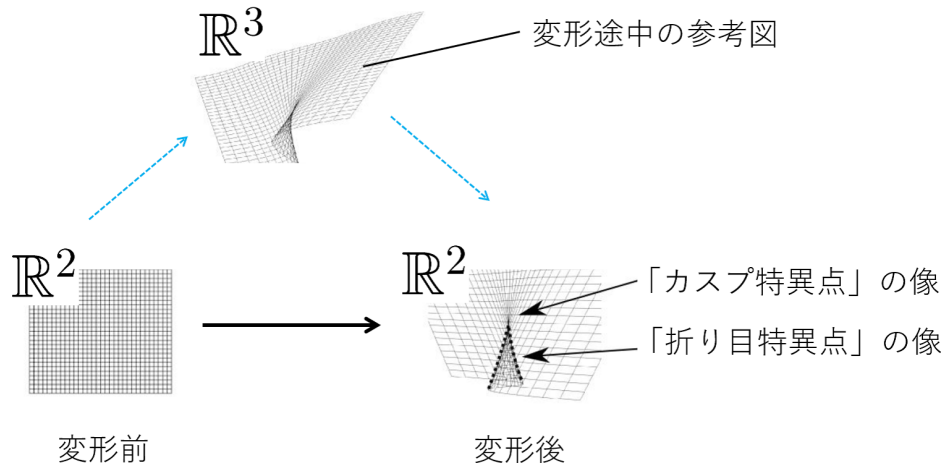


図2 折り目特異点とカスプ特異点の像の例

I は、時刻パラメータ t の動く範囲である．そして、時間経過とともに動く曲面を $f = (f_1, f_2, f_3) : N \times I \rightarrow \mathbb{R}^3$ とする．すなわち、 $t \in I$ を一つ固定すると、 $f|_{N \times \{t\}} : N \rightarrow \mathbb{R}^2$ は、時刻 t における曲面を表している事になる．

さて、時刻 t のときの実際の曲面 $f(N \times \{t\})$ は、 xyz 空間 \mathbb{R}^3 内にある訳だが、この曲面を z 軸方向から観察することにする．すなわち以下では、 xy 平面への特別な直交射影 $(x, y, z) \rightarrow (x, y)$ と f を合成した写像

$$F : N \times I \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad (F = (f_1, f_2))$$

及び、 F の時刻パラメータ t を固定してできる写像

$$F_t : N \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad (F_t(q) = F(q, t))$$

を考える．このとき、 z 軸方向から見たときの時刻 t における曲面 $f(N \times \{t\})$ の輪郭線は、写像 F_t の特異点集合の像 $F_t(S(F_t))$ であると考えられる事ができる．従って、我々は各時刻 $t \in I$ に関する $F_t(S(F_t))$ の情報を知りたい訳であるが、もともと $F : N \times I \rightarrow \mathbb{R}^2$ の性質が悪く、調べにくい場合もあるだろう．しかし、以下の定理 3.1 のように、写像空間 $C^\infty(N \times I, \mathbb{R}^2)$ 内で微小摂動すれば、定理 3.1 の (1) 及び (2) を満たす性質の良い写像で近似できる事が数学的に保証できる．

定理 3.1. N を 2 次元多様体、 $I = (a, b)$ ($a < b$) を开区間とする．このとき、 $C^\infty(N \times I, \mathbb{R}^2)$ の中のある残留集合（従って稠密集合） T が存在して、任意の $F \in T$ は以下の性質をもつ：

- (1) パラメータ $t \in I$ を任意にとる．このとき、 p を $F_t : N \rightarrow \mathbb{R}^2$ の特異点とすると、 $\text{rank}(dF_t)_p = 1$ となる．

- (2) ルベーク測度 0 の, ある部分集合 $\Sigma \subset I$ が存在して, 任意の $t \in I - \Sigma$ に対して, $F_t : N \rightarrow \mathbb{R}^2$ の特異点は折り目特異点かカusp特異点のみ (すなわち安定な特異点のみ) である.

定理 3.1 は, 横断性定理を用いた特異点論における標準的な方法で示すことができる. 証明は 5 章をご参照下さい.

定理 3.1 から, どんな写像 $F \in C^\infty(N \times I, \mathbb{R}^2)$ でも, 微小摂動すれば定理 3.1 の (1) 及び (2) を満たすように変形できる. すなわち, それらの性質を満たす写像は全体の空間に対して生成的 (ジェネリック) であると言える. そこで, 我々の観測している F は (必要があれば微小摂動して) すでにそれらの性質を満たしているという立場をとることにする.

この立場をとれば, 上述の状況においては, ほとんどの時刻における輪郭線は, 図 2 のような折り目特異点集合の像である「滑らかな曲線」か, カusp特異点の像である「トゲ」で構成されている事が保証される.

3.2 今後の課題 (研究中)

上記に関する今後の課題としては, 以下が挙げられる. (注意: 予想段階のものも含んでおり, 現在研究中である) 予想であるため, 正しいステートメントでない可能性があることに注意. 以下の課題 1 及び 2 においては, N のコンパクト性を仮定する.

課題 1 定理 3.1 (1) の部分を以下のように改善する:

ルベーク測度 0 の, ある部分集合 $\Sigma \subset I$ が存在して, 任意の $t \in I - \Sigma$ に対して, $F_t : N \rightarrow \mathbb{R}^2$ は安定写像である.

課題 2 任意の $t \in I - \Sigma$ に対して, t の十分小さい開近傍 U_t が存在して, 任意の $t' \in U_t$ に対して, $F_t : N \rightarrow \mathbb{R}^2$ と $F_{t'} : N \rightarrow \mathbb{R}^2$ は \mathcal{A} -同値ではないか?

上記の 2 つの課題が証明できれば, ほとんどの時刻の前後では, 滑らかに輪郭線が変化する事, 滑らかに輪郭線が変化しない時刻 t における F_t は不安定写像である可能性がある事も保証される. すなわち, F_t が不安定写像になる可能性のある時刻 $t \in \Sigma$ において, 瞬間的に時間不連続な輪郭線が出現するということになる. その時刻と, そこに現れる不安定な特異点の位置等を (特異点の判定法を用いて) 事前に計算し, その部分をあらかじめ強調することで, 輪郭線が時間連続に見えるように改善できると期待している.

4 その他の課題

本節では, 本研究集會中に議論したその他の課題について要点をまとめる.

4.1 滑らかなカテゴリーでの示唆的輪郭線の理論構築

示唆的輪郭線理論は、離散的なカテゴリーにおける理論が多く、滑らかなカテゴリーでの深い純粋数学的理論はほとんど見当たらない状況であった。その為、滑らかなカテゴリーにおける示唆的輪郭線の幾何学的意味を詳細に調べ、微分幾何的な不変量との関連性などを調べる。

4.2 離散的な設定の下での特異点論の構築

今回議論された多くの課題において特異点論の応用の可能性が示唆されたが、既存の特異点論は滑らかな曲線、曲面、写像に関する議論が多く、離散化された対象を扱う CG や CV の実装への直接の応用にはギャップがある。そのため、離散的な設定でも有効に働く特異点論の枠組みをそれぞれの応用課題の設定ごとに適切に構築するという課題が、挙げられた。

我々は、離散的な特異点論への取り組みの最初のステップとして、曲面（やその一部）をベジエ単体と考えたときの、特異点論的な議論を実験的に行ってみる事が手掛かりになるのでは、と考えている。ベジエ曲線の変曲点や頂点については CG 等の分野において先行文献があるため、この研究は、それらの研究の高次元版にもなりうる方向性の研究とも言える。

4.3 3次までの微分情報を用いた離散曲線・曲面の幾何学的情報の抽出

離散的曲面 3D モデル M を近似する滑らかな曲面 S を構成し、 M の三角形分割の各点に S の 3 次までの微分の情報を持たせれば、 M の各点 (三角形分割内の点も含む) や M の輪郭線の各点の微分幾何的な情報 (曲率や、モデル曲面との接触) を取り出せると考えられる。

研究の進め方としては、例えば以下のように行う。

1. 離散平面曲線 DC から DC を近似する滑らかな曲線 SC を構成し、SC の 3 次までの微分の情報を DC の各点に持たせる。
2. それを元にどのような DC の幾何的信息を取り出せるか検証する。
3. これを繰り返し、よりよい近似法を見つける
4. その近似法を離散的曲面 3D モデルに応用し、幾何的信息を取り出す

4.4 輪郭線研究の多目的最適化への応用

産業界における製品やシステムの計画・設計・運用等では、コスト・性能・安全性など、複数の目的関数を考慮した最適化が求められる。そのような多目的最適化問

題における最適解集合やその像は、高次元空間内の集合として実現され、それを可視化する事が要求されている。その際、射影で平面や3次元空間内に映すことを行い、現れる輪郭線の形状が重要な情報を持つ。その為、輪郭線研究は、多目的最適化の研究（特に、最適解集合やその像の研究）にも今後の応用が期待できる。

経験上、最適解集合の像のニーポイントとよばれる点が重要であることが知られているが、その数学的定義は決定版とよべるものがない。その為、ニーポイントを曲面の頂点などの概念によって特徴づけたり、良いニーポイントの定義を数学的に与える事は一つの課題である。

4.5 滑らかな曲面を再現する為の、サンプル点（離散点）の密集度の最小値の評価

滑らかな曲面の情報（微分幾何学的情報や特異点タイプ）が正しく抽出できるよう、離散曲面上における離散点の密集度の最小値を求める。元の滑らかな曲面の情報を抽出する際に、サンプル点（離散点）の密集度の最小値が数学的に保証されていれば、無駄にサンプル点を加える必要もなく、コスト削減にもつながる可能性もある。

5 定理 3.1 の証明とその準備

5.1 節にて、定理 3.1 の証明の為の記号や補題を準備し、5.2 節にて、定理 3.1 を証明する。本節においても、多様体及び写像は全て C^∞ 級とし、多様体は全て境界なしとする。

5.1 準備

N, P を多様体、 $J^r(N, P)$ を N から P への写像の r -ジェット全体の集合とすると、 $J^r(N, P)$ は多様体になる。写像 $f : N \rightarrow P$ の r -ジェット拡張を $j^r f : N \rightarrow J^r(N, P)$ ($q \mapsto j^r f(q)$) とすると、 $j^r f$ は C^∞ 級写像となる。 $J^r(N, P)$ や $j^r f : N \rightarrow J^r(N, P)$ の詳細は、例えば [1] や [7] をご参照下さい。

定理 3.1 の証明の道具となる定理 5.1 と命題 5.1 を用意するために、続けていくつか概念や記号の準備を行う。まず、5 章の証明でも度々登場する「横断性」という概念を与える。

定義 5.1. 多様体 N から多様体 P への写像 $f : N \rightarrow P$ が P の部分多様体 Z に横断的であるとは、任意の点 $q \in N$ に対して、以下のいずれかが成り立つ事である。

1. $f(q) \notin Z$.
2. $f(q) \in Z$ ならば $df_q(T_q N) + T_{f(q)} Z = T_{f(q)} P$.

N, Λ, P を多様体、 $F : N \times \Lambda \rightarrow P$ を写像とする。任意のパラメータ $\lambda \in \Lambda$ に対して $F_\lambda : N \rightarrow P$ を $F_\lambda(q) = F(q, \lambda)$ で定義する。また、 $j_1^r F : N \times \Lambda \rightarrow$

$J^r(N, P) \times \Lambda$ を,

$$j_1^r F(q, \lambda) = (j^r F_\lambda(q), \lambda)$$

で定義する。さて、以下はパラメータ付き横断性定理である。例えば、[1] を参照。

定理 5.1 (パラメータ付き横断性定理). Q_1, Q_2, \dots を $J^r(N, P) \times \Lambda$ の可算個の部分多様体とする。このとき、

$$T = \{ F \in C^\infty(N \times \Lambda, P) \mid j_1^r F \text{ は } Q_1, Q_2, \dots \text{ 全てに横断的} \}$$

は $C^\infty(N \times \Lambda, P)$ の残留集合である (従って特に稠密である)。

命題 5.1 ([7]). N, Λ, P を多様体, Q を P の部分多様体とする。このとき、写像 $F : N \times \Lambda \rightarrow P$ が Q に横断的であれば、 Λ のルベグ測度 0 のある部分集合 Σ が存在して、任意の $\lambda \in \Lambda - \Sigma$ に対して $F_\lambda : N \rightarrow P$ ($F_\lambda(q) = F(q, \lambda)$) は Q に横断的である。

5.2 定理 3.1 の証明

まず、 $k = 1, 2$ に対して

$$\Sigma^k(N, \mathbb{R}^2) = \{ j^1 f(q) \in J^1(N, \mathbb{R}^2) \mid \text{corank } df_q = k \}$$

とおくと、 $\Sigma^k(N, \mathbb{R}^2)$ は $J^1(N, \mathbb{R}^2)$ の部分多様体になり、特に $\text{codim } \Sigma^2(N, \mathbb{R}^2) = 4$ を満たす。

写像芽 $f : (N, q) \rightarrow (\mathbb{R}^2, f(q))$ を与える。点 q のまわりの座標近傍 (U, φ) と、点 $f(q)$ のまわりの座標近傍 (V, ψ) を選ぶと、その座標近傍について点 q におけるヤコビ行列 Jf_q が定まる。さらに、

$$A_f(q) = \begin{pmatrix} \frac{\partial(\psi_1 \circ f \circ \varphi^{-1})}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial(\psi_2 \circ f \circ \varphi^{-1})}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial \det Jf_q}{\partial x_1}(x) \\ \frac{\partial(\psi_1 \circ f \circ \varphi^{-1})}{\partial x_2}(x) & \frac{\partial(\psi_2 \circ f \circ \varphi^{-1})}{\partial x_2}(x) & \frac{\partial \det Jf_q}{\partial x_2}(x) \end{pmatrix}_{x=\varphi(q)}$$

とおく。ここで、 $x = (x_1, x_2)$ は $\varphi(U)$ 上の局所座標である。そして、

$$\Sigma^{1,1}(N, \mathbb{R}^2) = \{ j^2 f(q) \in J^2(N, \mathbb{R}^2) \mid \text{rank } df_q = \text{rank } A_f(q) = 1 \}$$

とおくと、 $\Sigma^{1,1}(N, \mathbb{R}^2)$ は $J^2(N, \mathbb{R}^2)$ の部分多様体になり、 $\text{codim } \Sigma^{1,1}(N, \mathbb{R}^2) = 2$ を満たす。

さらに、 $i = 1, 2$ に対して、

$$D_{f,i}(p) = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial(\psi_i \circ f \circ \varphi^{-1})}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial \det Jf_q}{\partial x_1}(x) \\ \frac{\partial(\psi_i \circ f \circ \varphi^{-1})}{\partial x_2}(x) & \frac{\partial \det Jf_q}{\partial x_2}(x) \end{pmatrix}_{x=\varphi(q)}$$

とおき,

$$B_f(q) = \left(\begin{array}{ccccc} \frac{\partial(\psi_1 \circ f \circ \varphi^{-1})}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial(\psi_2 \circ f \circ \varphi^{-1})}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial \det Jf_q}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial D_{f,1}}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial D_{f,2}}{\partial x_1}(x) \\ \frac{\partial(\psi_1 \circ f \circ \varphi^{-1})}{\partial x_2}(x) & \frac{\partial(\psi_2 \circ f \circ \varphi^{-1})}{\partial x_2}(x) & \frac{\partial \det Jf_q}{\partial x_2}(x) & \frac{\partial D_{f,1}}{\partial x_2}(x) & \frac{\partial D_{f,2}}{\partial x_2}(x) \end{array} \right)_{x=\varphi(q)}$$

とおく. そして,

$$\Sigma^{1,1,1}(N, \mathbb{R}^2) = \{j^3 f(q) \in J^3(N, \mathbb{R}^2) \mid j^2 f(q) \in \Sigma^{1,1}(N, \mathbb{R}^2), \text{rank } B_f(q) = 1\}$$

と定義する. 集合 $\Sigma^{1,1,1}(N, \mathbb{R}^2)$ は, $J^3(N, \mathbb{R}^2)$ の部分多様体になること及び, $\text{codim } \Sigma^{1,1,1}(N, \mathbb{R}^2) = 3$ を満たすことに注意しておく.

このとき, $j^1 f(q) \in \Sigma^1(N, \mathbb{R}^2)$ かつ $j^2 f(q) \notin \Sigma^{1,1}(N, \mathbb{R}^2)$ を満たすとき, q は折り目特異点である. そして, $j^2 f(q) \in \Sigma^{1,1}(N, \mathbb{R}^2)$ かつ $j^2 f$ が点 $q \in N$ において $\Sigma^{1,1}(N, \mathbb{R}^2)$ に横断的であり, かつ $j^3 f(q) \notin \Sigma^{1,1,1}(N, \mathbb{R}^2)$ を満たすとき, q はカस्प特異点であることに注意しておく.

さて,

$$\begin{aligned} Q_1 &= \Sigma^2(N, \mathbb{R}^2) \times I \subset J^1(N, \mathbb{R}^2) \times I \\ Q_2 &= \Sigma^{1,1}(N, \mathbb{R}^2) \times I \subset J^2(N, \mathbb{R}^2) \times I \\ Q_3 &= \Sigma^{1,1,1}(N, \mathbb{R}^2) \times I \subset J^3(N, \mathbb{R}^2) \times I \end{aligned}$$

とおくと, それぞれ $J^1(N, \mathbb{R}^2) \times I$, $J^2(N, \mathbb{R}^2) \times I$, $J^3(N, \mathbb{R}^2) \times I$ の部分多様体となる. 定理 5.1 より,

$$\begin{aligned} T_1 &= \{F \in C^\infty(N \times I, \mathbb{R}^2) \mid j_1^1 F \text{ は } Q_1 \text{ に横断的}\}, \\ T_2 &= \{F \in C^\infty(N \times I, \mathbb{R}^2) \mid j_1^2 F \text{ は } Q_2 \text{ に横断的}\}, \\ T_3 &= \{F \in C^\infty(N \times I, \mathbb{R}^2) \mid j_1^3 F \text{ は } Q_3 \text{ に横断的}\}, \end{aligned}$$

はいずれも $C^\infty(N \times I, \mathbb{R}^2)$ の残留集合であるので, $T = T_1 \cap T_2 \cap T_3$ もまたそうである. したがって, T は特に $C^\infty(N \times I, \mathbb{R}^2)$ 内で稠密である.

さて, 任意の $F \in T$ をとる. まず, $F \in T_1$ より, $j_1^1 F$ は Q_1 に横断的である. 従って, $\text{codim } Q_1 = 4$ であることを考慮すれば (次元の計算を行うことで) $j_1^1 F(N \times I) \cap Q_1 = \emptyset$ を得る. よって, 任意のパラメータ $t \in I$ を選び, $p \in N$ を $F_t : N \rightarrow \mathbb{R}^2$ の特異点とすると, $\text{rank}(dF_t)_p = 1$ であることが従う. これ (1) が示された. 次に, $F \in T_2$ より, $j_1^2 F$ は Q_2 に横断的である. 従って, 写像 $\Gamma : N \times I \rightarrow J^2(N, \mathbb{R}^2)$ ($\Gamma(q, t) = j^2 F_t(q)$) は $\Sigma^{1,1}(N, \mathbb{R}^2)$ に横断的である. よって命題 5.1 から I のルベーク測度 0 のある部分集合 Σ_2 が存在して, 任意の $t \in I - \Sigma_2$ に対して $j^2 F_t : N \rightarrow J^2(N, \mathbb{R}^2)$ は $\Sigma^{1,1}(N, \mathbb{R}^2)$ に横断的である. 同様の議論で, $F \in T_3$ より, $j_1^3 F$ は Q_3 に横断的である. 従って, 写像 $\Gamma' : N \times I \rightarrow J^3(N, \mathbb{R}^2)$ ($\Gamma'(q, t) = j^3 F_t(q)$) は $\Sigma^{1,1,1}(N, \mathbb{R}^2)$ に横断的である. よって命題 5.1 から I のルベーク測度 0 のある部分集合 Σ_3 が存在して, 任意の $t \in I - \Sigma_3$ に対して $j^3 F_t : N \rightarrow J^3(N, \mathbb{R}^2)$ は $\Sigma^{1,1,1}(N, \mathbb{R}^2)$ に横断的である.

$\Sigma = \Sigma_2 \cup \Sigma_3$ とおく. このとき, Σ も I のルベグ測度 0 集合であることに注意しておく.

さて, $t \in I - \Sigma$ を任意に選ぶ. 点 $q \in N$ を F_t の特異点とする. まず, q が折り目特異点かカスプ特異点であることを示す. 点 q は F_t の特異点なので, $\text{rank}(dF_t)_q = 1$ を考慮すれば $j^1 F_t(q) \in \Sigma^1(N, \mathbb{R}^2)$ が従う. $j^1 F_t(q) \notin \Sigma^{1,1}(N, \mathbb{R}^2)$ であれば, q は折り目特異点になる. では $q \in \Sigma^{1,1}(N, \mathbb{R}^2)$ の場合を考える. $j^2 F_t$ は点 q において $\Sigma^{1,1}(N, \mathbb{R}^2)$ に横断的である. また, $j^3 F_t : N \rightarrow \mathbb{R}^2$ は $\Sigma^{1,1,1}(N, \mathbb{R}^2)$ に横断的である事と, $\text{codim } \Sigma^{1,1,1}(N, \mathbb{R}^2) = 3$ である事から, $j^3 F_t(N) \cap \Sigma^{1,1,1}(N, \mathbb{R}^2) = \emptyset$ が従うので, q はカスプ特異点である事がわかる. 従って, 点 q は折り目特異点かカスプ特異点である. \square

参考文献

- [1] 泉屋 周一, 石川 剛郎, 「応用特異点論」, 共立出版, 1998.
- [2] R. Cipolla and P. Giblin, *Visual motion of curves and surfaces*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2000.
- [3] R. Cipolla, *Active visual inference of surface shape*, Lecture Notes in Computer Science **1016** Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1996.
- [4] J. Damon, P. Giblin and G. Haslinger, *Local image features resulting from 3-dimensional image features, illumination and movement, I*, Internat. J. Computer Vision **82** (2009), 25-47.
- [5] J. Damon, P. Giblin and G. Haslinger, *Local image features resulting from 3-dimensional image features, illumination and movement, II* SIAM Journal of Imaging Sciences **4** (2011), 386-412.
- [6] J. Damon, P. Giblin and G. Haslinger, *Local features in natural images via singularity theory*, Lecture Notes in Math. **2165**, Springer, 2016.
- [7] M. Golubitsky and V. Guillemin, *Stable mappings and their singularities*, Graduate Texts in Mathematics **14**, Springer, New York, 1973.
- [8] J. J. Koenderink, *What does the occluding contour tell us about solid shape?*, Perception, **13** (1984), 321-330.
- [9] J. J. Koenderink, *Solid shape*, MIT Press Series in Artificial Intelligence. MIT Press, Cambridge, MA, 1990.
- [10] J. J. Koenderink and A. J. Van Doorn, *The shape of smooth objects and the way contours end*, Perception **11**, 129-137.