平成３０年度 共同利用研究報告書

平成 30 年 12 月 16 日

九州大学 マス・フォア・インダストリ研究所長 殿

所属・職名　株式会社富士通研究所　シニアリサーチャー
提案者 氏名　濱田　直希

下記の通り共同研究の報告をいたします.　　記

		※整理番号	20180007	
1.研究計画題目	多目的最適化と特異点論：パレート点の特異型の分類			
2.種目（○で囲む）	a. プロジェクト研究　b. 若手研究　(c. 一般研究)			
3.種別（○で囲む）	a. 研究集会Ⅰ　b. 研究集会Ⅱ　(c. 短期共同研究)　d. 短期研究員			
4.研究代表者	氏 名	濱田　直希		
	所 属 部局名	株式会社富士通研究所　人工知能研究所　発見数理技術 PJ	職名	シニアリサーチャー
	連絡先			
	e-mail		TEL	
5.研究実施期間	平成 30 年 8 月 6 日（月曜日）～平成 30 年 8 月 10 日（金曜日）			
6.キーワード （複数可）	多目的最適化，可微分写像の特異点論，分類問題，認識問題			
7.参加者数	20 人　＊1			

＊1　短期研究員は九大の共同研究者も含める.
　　Ⅰ，Ⅱ，短期共同研究は事務局から送った参加者データを元に記入.

8.本研究で得られた成果の概要（**成果報告書を別途要添付**　枚数は次頁参照）

本共同研究では，自動車設計などの産業応用で頻出するブラックボックスな大域的多目的最適化問題のための基礎理論の構築に向けて，多目的最適化問題のパレート集合のトポロジーを特異点論の観点から解析した．成果は以下の 2 点にまとめられる:

1．強凸問題のパレート集合に現れる特異点のタイプを調べ，互いに A 同値な特異点であっても，それらの近傍でパレート集合のトポロジーが異なるような例を構成した．これにより，「特異点論を用いてパレート集合のトポロジーを調べるためには，通常の分類に使われる A 同値よりも細かい同値関係が必要となる」という予想が正しいことを確認できた.

2．弱パレート集合とパレート集合の一致条件を検討し，実用上頻出するいくつかの問題クラスでは弱パレート集合とパレート集合が一致することを示した．これにより，ある程度広い範囲の実問題では適切なスカラー化に基づく解法を用いることによって，余分な点を含まずにパレート集合を網羅できることがわかった.

　今後これらの成果を基礎にして，より一般的な設定でのパレート点の特異点型の分類問題や認識問題，およびより高性能な解法の開発に取り組む予定である.

「多目的最適化と特異点論：パレート点の特異型の分類」成果報告書

濱田 直希 [*]，寺本 央 [†]，加葉田 雄太郎 [‡]，一木 俊助 [§]，早野 健太 [¶]

2018 年 12 月 16 日

概要

本稿では 2018 年 8 月 6 日（月）〜10 日（金）にかけて行われた IMI 短期共同研究「多目的最適化と特異点論：パレート点の特異型の分類」の成果を報告する．

1　はじめに

1.1　背景と目的

本研究は，昨年度の IMI 短期共同研究「ベクトル値滑層分割 Morse 理論の構築による多数目的最適化問題の解集合の可視化」からの継続研究である．年度をまたぐ大目標として，多目的最適化に特異点論を応用することにより，従来の最適化理論のように線形関数や凸関数に留まらず，ジェネリックな写像を扱うことができる汎用性の高い最適化理論およびアルゴリズムを創出することを目指している．

昨年度の研究では，多目的最適化に特異点論をどう応用しうるかについて基礎的検討を行い，以下のことがわかった．(1) 多くの実問題において最適化すべき写像は定義域次元が値域次元以上であり，この場合，多目的最適化の解であるパレート点は特異点である．(2) 実問題において最適化すべき写像の次元対は結構領域に属するケースが大半であり，この場合，安定写像はジェネリックである．(3) 提案者らが過去に開発した解法および解の可視化手法は，各部分問題が折り目写像の最適化となるケースでは効果的に動作する可能性が高い．以上のことから，安定写像のパレート点の特異点型を調べることで，最適化問題が解きやすいかどうかや，解いた結果が理解しやすいかどうかを知ることができる可能性が示唆された．すなわち，従来の線形・凸・多項式といった最適化問題の分類以外にも，パレート点の特異点型に基づいて問題クラスを分類し，それぞれに適切な解法を設計するというアプローチが考えられる．したがって，本研究の目的は，安定写像のパレート点の特異点型の分類問題と認識問題に取り組むことである．通常，特異点は $\mathcal{A}$ 同値に基づいて分類され，この同値関係に基づく安定特異点の分類は完成されている．しかし，$\mathcal{A}$ 同値に用いられる値域の微分同相変換は多目的最適化問題の解の優劣関係を壊すため，より制限された同値関係による分類が求められる．加えて，パレート点は像の境界に位置するため，一部の特異点型は出現しえない可能性もある．解の順序を保つ「パレート $\mathcal{A}$ 同値」に基づいて，パレート点として出現しうる安定特異点を分類し，特異点型の判定方法を作る必要がある．

今日の製品やシステムの計画・設計・運用等においては，実験やシミュレーションを含む多目的最適化問題が頻出している．最適化すべき関数の表式が未知であるため，従来の線形計画法や凸計画法では扱えな

[*] 富士通研究所 人工知能研究所．1 節執筆．
[†] 北海道大学 電子科学研究所．2 節執筆．
[‡] 九州大学 マス・フォア・インダストリ研究所．3 節執筆．
[§] 横浜国立大学 大学院環境情報研究院．4 節執筆．
[¶] 慶応義塾大学 理工学部数理科学科．5 節執筆．

い．パレート点の特異点型がわかるようになると，このような問題に対しても通用する最適化理論が構築でき，解法の改良にもつながる．

1.2　共同研究プログラム

本共同研究は，「多目的最適化と特異点論：パレート点の特異型の分類」と題して 2018 年 8 月 6 日（月）〜10 日（金）の 5 日間開催された．初日の 8 月 6 日は，本共同研究の一般社会への周知および 2 日目以降の参加者の共通認識を形成することを目的として，多目的最適化の応用に関する一般公開講演を行った．講演プログラムを表 1 に示す．

表 1　8 月 6 日 (月) 公開講演プログラム

10:30–11:30	ポスターセッション 共催：第 2 回数理データサイエンスカフェ
11:30–13:00	昼食
13:00–13:50	多目的最適化と特異点論：パレート点の特異型の分類 濱田 直希 (株式会社富士通研究所)
13:50–14:40	産業界での多目的最適化の取り組みのご紹介 熊澤 光 (サイバネットシステム株式会社)
14:40–14:50	休憩
14:50–15:40	医療や芸術工学へのメタヒューリスティクスの応用 船木 亮平 (九州大学)
15:40–16:30	船の航行状態の最適化について 隅田 大貴 (流体テクノ株式会社)
16:30–16:40	休憩
16:40–17:30	最適化力の理論 & 学習と電気発電の応用 Danilo Vasconcellos Vargas (九州大学)
17:30–18:20	多目的最適化と実代数幾何：ものづくりへの応用 穴井 宏和 (株式会社富士通研究所)

2 日目（8 月 7 日）から 4 日目（8 月 9 日）は非公開形式で，各日 10 時から 18 時にかけて，多目的最適化問題の解集合のトポロジーを特異点論の観点から議論した．最終日の 8 月 10 日は，10 時から 12 時にかけて，本共同研究以降の継続研究の計画を検討した．

1.3　成果概要

本共同研究の成果は以下の 2 点にまとめられる：

1. 強凸問題のパレート集合に現れる特異点のタイプを調べ，互いに $\mathcal{A}$ 同値な特異点であっても，それらの近傍でパレート集合のトポロジーが異なるような例を構成した．これにより，「特異点論を用いてパレート集合のトポロジーを調べるためには，通常の分類に使われる $\mathcal{A}$ 同値よりも細かい同値関係が必要となる」という予想が正しいことを確認できた．2 節では，強凸問題のパレート集合には corank 2 の特異点が生じうること，および corank 2 特異点の近傍でパレート集合のトポロジーが変化することを示す．3 節では，互いに $\mathcal{A}$ 同値ないくつかの corank 2 特異点を可視化し，それらの近傍において

パレート集合のトポロジーが異なることを示す．

2. 弱パレート集合とパレート集合の一致条件を検討し，実用上頻出するいくつかの問題クラスでは弱パレート集合とパレート集合が一致することを示した．これにより，ある程度広い範囲の実問題では適切なスカラー化に基づく解法を用いることによって，余分な点を含まずにパレート集合を網羅できることがわかった．4 節では，凸解析による方法で，凸問題を含むあるクラスにおいては弱パレート集合とパレート集合が一致することを示す．5 節では，代数トポロジーによる方法で，弱単体的な問題においては弱パレート集合とパレート集合が一致することを示す．

今後これらの成果を基礎にして，より一般的な設定でのパレート点の特異点型の分類問題や認識問題，およびより高性能な解法の開発に取り組む予定である．

1.4 多目的最適化

1.4.1 多目的最適化問題

ある集合 $X \subseteq \mathbb{R}^n$ 上で複数の**目的関数** $f_1, \ldots, f_m : X \to \mathbb{R}$ を同時に最小化する問題

$$\begin{aligned} &\text{minimize } f(x) := (f_1(x), \ldots, f_m(x)) \\ &\text{subject to } x \in X (\subseteq \mathbb{R}^n) \end{aligned}$$

を**多目的最適化問題**という．通常，それぞれの目的関数の最小点は異なるため，ある f_i を小さくすれば別の f_j が大きくなるというトレードオフが生じる．そこで，**パレート順序**

$$\begin{aligned} f(y) \prec f(x) :\Leftrightarrow\ & f_i(y) \leq f_i(x) \text{ for all } i = 1, \ldots, m \\ & \text{and } f_j(y) < f_j(x) \text{ for some } i = 1, \ldots, m \end{aligned}$$

に関する最小点全体である**パレート集合**

$$X^*(f) := \{\, x \in X \mid f(y) \not\prec f(x) \text{ for all } y \in X \,\}$$

やその像である**パレートフロント**

$$fX^*(f) := \{\, f(x) \in \mathbb{R}^m \mid x \in X^*(f) \,\}$$

を求めることが目標となる．

1.4.2 特異点論との関係

実応用でよく見られるケースでは，f は C^∞ 級で，値域次元は $m < 7$ かつ定義域次元は $n \geq m + 3$ である [LLTY15]．このとき，C^∞ 固有写像の空間において，C^∞ 安定写像は稠密である [Mat71]．加えて，このとき特異点集合

$$S(f) := \{\, x \in X \mid \operatorname{rank} df < \min(n, m) \,\}$$

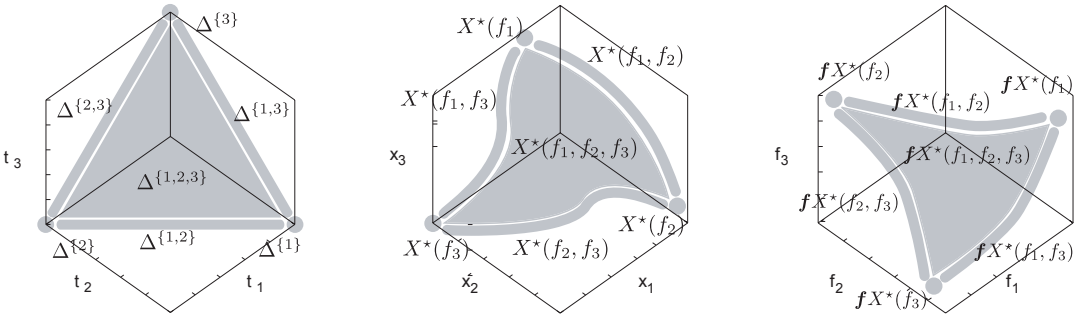
とパレート集合には以下の関係が成り立つ [LP14]：

$$X^*(f) \subseteq S(f).$$

したがって，実用上多くのケースでは，パレート点の特異点型を問うことにより，パレート点の性質を理解することができる．

1.5 スカラー化

近年の多目的最適化では，パレート集合を網羅的に求めるためのアプローチとして，スカラー化という手法が注目されている．スカラー化とは，複数の目的関数 $f_1, \ldots, f_m : X \to \mathbb{R}$ を何らかの方法で 1 つの目的関数 $g : X \to \mathbb{R}$ に集約する方法の総称である．スカラー化において重要なことは，g の単目的最適化問題を解いたときに，もとの $f = (f_1, \ldots, f_m)$ の多目的最適化問題の解が得られるのかどうかである．



(a) 重み集合 Δ^J　(b) パレート集合 $X^*(f_J)$　(c) パレートフロント $fX^*(f_J)$

図 1　重み集合の面と部分問題のパレート集合，パレートフロントの対応．

1.5.1　加重和法

最も単純なスカラー化手法は，以下の**加重和法**である．

$$f_w^{\mathrm{ws}}(x) := \sum_{i=1}^{m} w_i f_i(x), \quad w \in \Delta^{m-1} := \left\{ (w_1, \ldots, w_m) \in \mathbb{R}^m \;\middle|\; 0 \le w_i,\ \sum_{i=1}^{m} w_i = 1 \right\}.$$

単体 Δ^{m-1} は**重み集合**ともよばれる．重みを動かしてスカラー化問題を繰り返し解くことにより得られる解集合

$$X^{\mathrm{ws}}(f) := \bigcup_{w \in \Delta^{m-1}} X^*(f_w^{\mathrm{ws}})$$

が，もとの問題のパレート集合 $X^*(f)$ とどのような関係にあるかを知りたい．

1.5.2　加重和法の性質：強凸問題の場合

最近の研究 [HHI+19] により，f が強凸写像[*1]であるときには

$$X^{\mathrm{ws}}(f) = X^*(f)$$

であり，どの重み $w \in \Delta^{m-1}$ に対しても加重和問題の解集合 $X^*(f_w^{\mathrm{ws}})$ は 1 点であることがわかった．したがって，重みを唯一の解に移す写像 $x^* : \Delta^{m-1} \to X^{\mathrm{ws}}(f)(= X^*(f))$ が定義できる．これは連続全射となり，さらに $X^*(f)$ 上で corank $df = 1$ ならば x^* は単射，したがって同相写像[*2]となることも示された．つまり，ジェネリックな強凸 C^1 写像の最適化問題に対して，「加重和問題を解く」写像 x^* は，「重み集合の面」と「一部の目的関数を最適化する**部分問題**のパレート集合」を対応付ける特別な三角形分割を与える．

$$\begin{gathered} x^*(\Delta^J) = X^*(f_J) \text{ for all } J \subseteq \{\, 1, \ldots, m \,\} \text{ such that } J \neq \emptyset \\ \text{where } \Delta^J := \left\{\, w \in \Delta^{m-1} \;\middle|\; w_i = 0 \text{ if } i \in J \,\right\}, \\ f_J := (f_i)_{i \in J} : X \to \mathbb{R}^{|J|}. \end{gathered}$$

さらに，上記の仮定のもとで f は $X^*(f)$ 上で埋め込みになるため，$f \circ x^* : \Delta^{m-1} \to fX^*(f)$ によりパレートフロントにも同じ構造が入る．これらの構造を図 1 に示す．

この加重和法を用いて corank $= 1$ の強凸問題を解くケースは，ある意味で最も性質のよいスカラー化による解法の理想形といえるが，すべての実問題がこの仮定を満たすわけではない．そこで，2 節と 3 節では，corank $= 1$ の仮定を外したときに何が起こるかを調べる．

[*1] **強凸写像**とは，成分関数がみな強凸な写像である．ここで，凸集合 X 上の関数 $f : X \to \mathbb{R}$ が**強凸**とは，ある $\alpha > 0$ が存在して，すべての $x, y \in X$ と $t \in [0, 1]$ に対して，$f(tx + (1-t)y) \le tf(x) + (1-t)f(y) - \frac{1}{2}\alpha t(1-t)\| x - y \|^2$ が成り立つこと．

[*2] コンパクト位相空間からハウスドルフ空間への連続全単射は同相写像．

1.5.3　加重和法の性質：一般の問題の場合

また，f を任意の写像とした場合には前節で述べた単体構造が生じるとは限らず，一般的にいえることは高々

$$X^{\mathrm{ws}}(f) \subseteq X^{\mathrm{w}}(f)$$

であることが知られている [Mie99, Theorem 3.1.1]．ここで，

$$\begin{aligned} X^{\mathrm{w}}(f) &:= \{\, x \in X \mid f(y) \not< f(x) \text{ for all } y \in X \,\} \\ &\qquad (\, f(y) < f(x) :\Leftrightarrow f_i(y) < f_i(x) \text{ for all } i = 1, \ldots, m \,) \end{aligned}$$

は**弱パレート集合**とよばれ，f の性質によらず一般に

$$X^{*}(f) \subseteq X^{\mathrm{w}}(f)$$

である [Mie99]．すなわち，加重和法は以下の 2 つの問題を抱えている：

偽陰性　加重和法はパレート解を網羅できないことがある．

$$\text{For some } f : X \to \mathbb{R}^m, \text{ there exists } x \in X^{*}(f) \text{ such that } x \notin X^{\mathrm{ws}}(f).$$

偽陽性　加重和法はパレート解以外まで求めることがある．

$$\text{For some } f : X \to \mathbb{R}^m, \text{ there exists } x \in X^{\mathrm{ws}}(f) \text{ such that } x \notin X^{*}(f).$$

1.5.4　加重チェビシェフノルム法

これらのうち，偽陰性の問題は**加重チェビシェフノルム法**

$$f_w^{\mathrm{wc}}(x) := \max_{i=1,\ldots,m} w_i(f_i(x) - \inf_{x \in X} f_i(x)) \quad (w \in \Delta^{m-1})$$

を用いることで解決することができる．すなわち，その重みを動かして得られる解集合

$$X^{\mathrm{wc}}(f) := \bigcup_{w \in \Delta^{m-1}} X^{*}(f_w^{\mathrm{wc}})$$

は，任意の写像 $f : X \to \mathbb{R}^m$ に対して

$$X^{\mathrm{wc}}(f) = X^{\mathrm{w}}(f)$$

を満たすことが知られている [中谷 94, 定理 2.15, 2.16]．

残された偽陽性の問題を解決するためには，パレート集合と弱パレート集合が一致する，すなわち

$$X^{*}(f) = X^{\mathrm{w}}(f)$$

が成り立つ必要がある．4 節と 5 節では，これが成り立つような写像 $f : X \to \mathbb{R}^m$ の条件を示す．

2　パレート解の特異点型：強凸問題の corank 2 パレート解の性質

パレート集合上 corank 1 である C^2 強凸写像が定義する多目的最適化問題のパレート集合は単体と微分同相になることが示されているが [HHI+19]，パレート集合上 corank 2 の点がある場合に，一般にその点の近傍でパレート集合の構造がどのようになるかはまだよくわかっていない．例えば，論文 [HHI+19] ではパレート集合上 corank 2 点をもち，その点において単射性が破れる例を構成している．この例は冒頭の主張が一般の corank 2 点を含む場合には一般化できないことを示しているが，ここでは

1. corank 2 の場合にも一般化できる状況はないのか？
2. corank 2 の点でのパレート集合の構造は一般にはどのようになるのか？

の二つの項目に関して議論したことをまとめる．

2.1 設定

$n, m \in \mathbb{N}$ とし $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ を強凸写像とする．写像を成分ごとに書くときには $f(x) = (f_1(x), f_2(x), \cdots, f_m(x))$ $(\in \mathbb{R}^m)$ $x \in \mathbb{R}^n$ とする．写像 f が強凸写像であるとは各成分関数 f_i $i \in \{1, \ldots, m\}$ が強凸関数であることと定義する．

C^1 強凸写像に関しては原点がパレート集合に含まれている $(0 \in X^*(f))$ 条件は次の条件に同値である：ある単体上の点 $w = (w_1, \cdots, w_m) \in \Delta^{m-1}$ が存在し $\sum_{i=1}^m w_i (df_i)_0 = 0$ が成り立つ．この条件より写像

$$x^*\colon \Delta^{m-1} \to X^*(f) \tag{2.1}$$

を $x^*(w) \in X^*(f)$ が与えられた重み $w \in \Delta^{m-1}$ から決まる関数 $\sum_{i=1}^m w_i f_i$ の最小点として定義すると，その写像が全射となることが従う．以下ではパレート集合 $X^*(f)$ の構造をこの写像 x^* を通じて調べる．

以下では $m \leq n$ とし f を C^1 級強凸写像であり原点をパレート集合に含み $0 \in X^*(f)$ しかも原点において corank が 2 であるものとする．そのとき $\mathbb{R}^m$ の部分ベクトル空間を

$$\operatorname{coker} df_0 = \left\{ (v_1, \cdots, v_m) \in \mathbb{R}^m \;\middle|\; \sum_{i=1}^m v_i (df_i)_0 = 0 \right\} \tag{2.2}$$

と定義すると $w \in \operatorname{coker} df_0$ であり $\dim \operatorname{coker} df_0 = 2$ が成り立つ．以上の設定の下 $\operatorname{coker} df_0 \cap \Delta^{m-1}$ は一点からなる集合であるかあるいは単体 Δ^{m-1} の境界で終わる 1 次元の直線となる．例えば，$m = 4$ とし

$$\operatorname{coker} df_0 = \{ \alpha w + \beta v \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R} \}, \tag{2.3}$$

（ただし，$w = (1/2, 1/2, 0, 0)$ ，$v = (0, 0, 1, -1)$）とすると $\operatorname{coker} df_0 \cap \Delta^{m-1} = \{ w \}$ となり二つの集合の交差は一点となる．一方で，

$$\operatorname{coker} df_0 = \{ \alpha w + \beta \overline{w} \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R} \}, \tag{2.4}$$

（$w = (1/2, 1/2, 0, 0)$，$\overline{w} = (0, 0, 1/2, 1/2)$）とすると

$$\operatorname{coker} df_0 \cap \Delta^{m-1} = \{ (1-t) w + t\overline{w} \mid t \in [0, 1] \} \tag{2.5}$$

となり，二つの集合の交差は単体 Δ^{m-1} の境界で終わる 1 次元の直線となる．以下では，前者の場合を $\dim \operatorname{coker} df_0 \cap \Delta^{m-1} = 0$，後者の場合を $\dim \operatorname{coker} df_0 \cap \Delta^{m-1} = 1$ とする．

f の原点における corank が 2 の場合には，ある原点の開近傍 $U \subset \mathbb{R}^n$ が存在し，その開近傍 U で f の corank が高々 2 となるものがとれる [田 92, p. 126]．その開近傍内で f の corank $0, 1, 2$ の点がどのように分布するかは f に依存して変わり，結果を正確に述べるために以下のような空間を田村に従って導入する．まず，m 行 n 列の実行列全体の集合を $M(m, n)$ と書く．いま $0 \leq s \leq m$ に対して $M(m, n)$ の部分集合 $M(m, n)_s$ と $M(m, n)_{\leq s}$ を

$$M(m, n)_s = \{ A \in M(m, n) \mid \operatorname{corank} A = s \}, \tag{2.6}$$

$$M(m, n)_{\leq s} = \{ A \in M(m, n) \mid \operatorname{corank} A \leq s \} \tag{2.7}$$

と定義する．すると $0 \leq s \leq m$ に対して $M(m, n)_{\leq s}$ は $M(m, n)$ の mn 次元開部分多様体，$M(m, n)_s$ は $(mn - s(s + m - n))$ 次元閉部分多様体となる．$df_0 \in M(m, n)_2$，および $df(U) \subset M(m, n)_{\leq 2}$ である．

2.2 主張

以上の設定の下，

定理 2.1（$\dim \operatorname{coker} df_0 \cap \Delta^{m-1} = 0$）　$\dim \operatorname{coker} df_0 \cap \Delta^{m-1} = 0$ かつ $df^{-1}\left(M(m, n)_2\right) \cap U = \{ 0 \}$ とすると，写像 x^* は $(x^*)^{-1}(X^*(f) \cap U)$ において単射，可微分であるが $w = (x^*)^{-1}(0)$ において局所微分同相ではない．

定理 2.2（$\dim\operatorname{coker} df_0 \cap \Delta^{m-1} = 1$）　$\dim\operatorname{coker} df_0 \cap \Delta^{m-1} = 1$ とすると写像 x^* は単射ではない．

ただし，w において局所微分同相であるとは，w を含む Δ^{m-1} のある開近傍 V が存在して $x^*(V)$ は $X^*(f)$ の開近傍であり，$x^*|_V$ は V と $x^*(V)$ との微分同相写像である，という二つの性質を満たすものと定義する．

定理 2.1 は，$\dim\operatorname{coker} df_0 \cap \Delta^{m-1} = 0$ かつ f の corank 2 の点が孤立している場合のものである．この場合には x^* は可微分，単射となるが局所微分同相とはならない．しかし，$w = (x^*)^{-1}(0)$ の Δ^{m-1} における開近傍で，その閉包がコンパクトなものをとれば，x^* はその開近傍から x^* の像への位相同型写像にはなる．これを用いると C^2 強凸写像が定義する多目的最適化問題のパレート集合は，パレート集合上 corank 2 の点 $p \in X^*(f)$ を含む場合でもその点が孤立しており $\dim\operatorname{coker} df_p \cap \Delta^{m-1} = 0$ である場合には，単体と位相同型にはなる，ということが示される．これを用いて一木らの C^1 強凸写像の場合の同主張 [HHI+19] が一般化できるかは今後の課題である．

より写像が退化し，corank 2 点が孤立していない状況も一般には起こりうるが，その例は加葉田による 3 節に挙げられている．こちらの方の一般論の整備に関しては今後の課題としたい．

3　パレート解の特異点型：$\mathcal{A}$ 同値だが異なる近傍をもつ corank 2 パレート解の例

[HHI+19] で，強凸問題（写像）においてパレート集合が corank $= 1$ の特異点のみしか持たないとき，その特異点は必ず折り目特異点であり強凸問題は単純であることが示されている．ここで corank に関する過程は重要であり，[HHI+19] ではパレート集合が corank $= 2$ の特異点を持つ際の反例も示している．実際，パレート集合が corank $= 2$ の特異点を持つ時には特異点型は 1 種類ではなく多様であり，さらに本稿 2 節で考察されているように特異点型が同じであってもパレート集合およびフロントの形状は異なることがある．本共同研究の会期中にそのようなパレート集合が corank $= 2$ の特異点を持つ例を多く構成した．ここではその一部を紹介する．

3.1　コーンの上のパレート集合の例

各要素（あるいは部分問題）f_i が次のような写像 $f = (f_1, f_2, f_3) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ を考える：

$$
\begin{aligned}
f_1(x,y,z) &:= x + y + z + x^2 + y^2 + z^2,\\
f_2(x,y,z) &:= L(x+y+z) + x^2 + 2y^2 + 3z^2,\\
f_3(x,y,z) &:= x^2 + y^2 + z^2.
\end{aligned}
$$

ここで L は任意の実数である．f は明らかに強凸写像であり，ソースの原点 0 は f の corank $= 2$ の特異点である．さらに f の Jacobian を J_f とおくと

$$
J_f(x,y,z) = -4(xy + yz - 2zx)
$$

であり特異点集合は図 2 のようにコーン（錐面）になる．

上から分かるように特異点集合自体は L にはよらない．一方，L の値によって 2 節で議論したようなパレート集合の形状は異なり得る．例えば $L = -1, 0, 1$ の場合には図 3, 図 4, 図 5 のようになる（それぞれで，左はパレート集合のみの図，右はパレート集合がのっている特異点集合も併せた図である）．

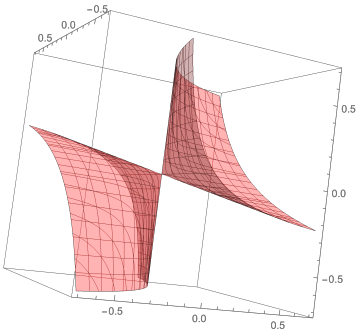


図 2　f の特異点集合.

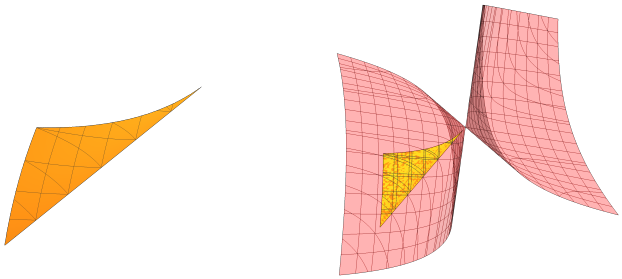


図 3　f の $L = 1$ の時のパレート集合.

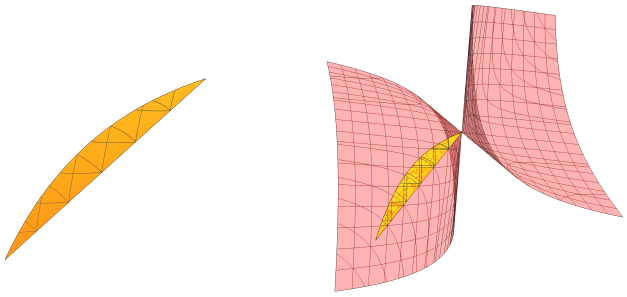


図 4　f の $L = 0$ の時のパレート集合．f_2 と f_3 の最小点が一致している場合であることに注意されたい.

3.2　非常に退化したパレート集合の例

各要素（あるいは部分問題）g_i が次のような写像 $g = (g_1, g_2, g_3) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ を考える：

$$g_1(x, y, z) := z + x^2 + y^2 + z^2,$$
$$g_2(x, y, z) := x^2 + 2y^2 + 3z^2,$$
$$g_3(x, y, z) := x^2 + y^2 + z^2.$$

やはり g は強凸写像であり，ソースの原点 0 は g の corank $= 2$ の特異点である．さらに f の Jacobian を J_f とおくと

$$J_f(x, y, z) = -4xy$$

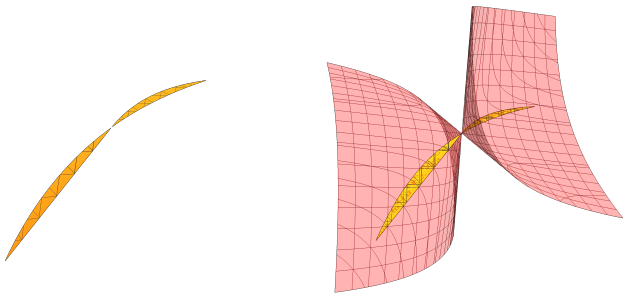


図 5　f の $L = -1$ の時のパレート集合.

であり特異点集合は図 6 のように xz-平面と yz-平面の和集合になる．また，g のパレート集合は z-軸上の $-\frac{1}{2} \leq z \leq 0$ の範囲にある．特に，g のパレート集合上の点は全て corank $= 2$ の特異点であり，写像 g は非常に退化した強凸問題である．

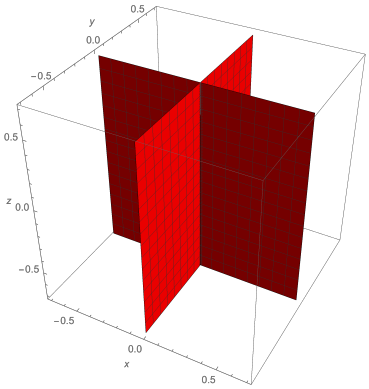


図 6　g の特異点集合.

4　弱パレート集合とパレート集合の一致条件：凸解析による方法

「パレート解集合と弱パレート解集合はいつ一致するか？」という問題を考える．今回の共同研究により，凸計画問題や，写像の像が凸集合である場合を含む，ある問題クラスでは，パレート解と弱パレート解の一致条件は，元の問題とその部分問題の関係により特徴付けられることが明らかになった（定理 4.1）．なお，4 節では特に断らない限り，写像の連続性は仮定しない．

まず，用語や記号の定義を行う．$\mathbb{R}^n$ の部分集合 X が，任意の $x, y \in X$ および任意の $t \in [0,1]$ に対して $tx + (1-t)y \in X$ を満たすとき，X は凸集合とよばれる．

写像 $f : X \to \mathbb{R}^m$ (X は空でない集合) に対して，

$$f(X)_{\geq} = f(X) + \{\, (y_1, \ldots, y_m) \in \mathbb{R}^m \mid y_1 \geq 0, \ldots, y_m \geq 0 \,\}$$

とおく．

4.1 節では，主に 4 節の主定理 (定理 4.1) を述べる．4.2 節では定理 4.1 の応用を述べる．

4.1　4 節の主定理

定理 4.1　写像 $f=(f_1,\ldots,f_m):X\to\mathbb{R}^m$ $(X\neq\emptyset)$ を，$f(X)_{\geq}$ が $\mathbb{R}^m$ の凸集合である写像とする．このとき，以下の (α) と (β) は同値である．

(α)　$X^w(f)=X^*(f)$.

(β)　$\displaystyle\bigcup_{\emptyset\subsetneq I\subsetneq M} X^*(f_I)\subseteq X^*(f)$. (ここで，$M=\{\,1,\ldots,m\,\}$.)

注意 4.1　1.　定理 4.1 は，写像 f が連続でない場合も依然として成り立つ．

2.　定理 4.1 において，「$f(X)_{\geq}$ が $\mathbb{R}^m$ の凸集合」という仮定は，$(\beta)\Rightarrow(\alpha)$ の証明のみに用いられる．したがって，$(\alpha)\Rightarrow(\beta)$ という主張は，仮定「$f(X)_{\geq}$ が $\mathbb{R}^m$ の凸集合」を除いても成り立つ事に注意しておく．

なお，定理 4.1 の (α) および (β) は，$f(X)_{\geq}$ が $\mathbb{R}^m$ の凸集合という条件から自動的に従うとは限らない．例 4.1 にて，$f(X)_{\geq}$ は凸集合であるが (α) も (β) も成立しない簡単な例を与える．

例 4.1　写像 $f=(f_1,f_2):\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$ を $f(x)=(0,x^2)$ で与える．このとき，$f(\mathbb{R})_{\geq}$ は凸集合であり，$X^w(f)=\mathbb{R}$, $X^*(f)=\{\,0\,\}$, $X^*(f_1)=\mathbb{R}$, $X^*(f_2)=\{\,0\,\}$ が成り立つ．よって，定理 4.1 の (α)，(β) はいずれも成立しない．

定理 4.1 の仮定「$f(X)_{\geq}$ が $\mathbb{R}^m$ の凸集合」を除いた場合において，(β) を満たすが (α) を満たさない例を例 4.2 にて与える．

例 4.2　写像 $f=(f_1,f_2):[0,2]\to\mathbb{R}^2$ を以下で与える．

$$f(x)=\begin{cases}(x,1) & x\in[0,1]\\ (1,2-x) & x\in[1,2]\end{cases}$$

この写像の像を図 7 に示す．図からわかるように，$f([0,2])_{\geq}$ は凸集合ではない．また，$X^w(f)=[0,2]$, $X^*(f)=\{\,0,2\,\}$, $X^*(f_1)=\{\,0\,\}$, $X^*(f_2)=\{\,2\,\}$ である．よって，定理 4.1 の (β) は成り立つが，(α) は成り立たない．

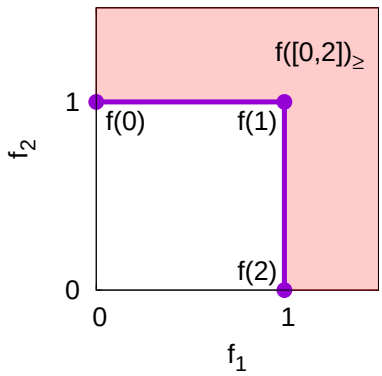


図 7　例 4.2 の写像 $f:[0,2]\to\mathbb{R}^2$ の像.

4.2　定理 4.1 の応用

4.2 節では，定理 4.1 の応用を与える．まずは，写像の像が凸集合である問題へ応用する．

系 4.1　写像 $f=(f_1,\ldots,f_m):X\to\mathbb{R}^m$ $(X\neq\emptyset)$ の像 $f(X)$ は，$\mathbb{R}^m$ の凸集合であるとする．このとき，以下の (α) と (β) は同値である．

(α)　$X^w(f)=X^*(f)$.

(β) $\displaystyle\bigcup_{\emptyset \subsetneq I \subsetneq M} X^*(f_I) \subseteq X^*(f)$. (ここで，$M = \{ 1, \ldots, m \}$.)

X を $\mathbb{R}^n$ の凸集合とする．関数 $f : X \to \mathbb{R}$ が，任意の $x, y \in X$ および任意の $t \in [0,1]$ に対して

$$f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y)$$

を満たすとき，f は凸関数とよばれる．また，写像 $f = (f_1, \ldots, f_m) : X \to \mathbb{R}^m$ の各成分 $f_1, \ldots, f_m$ がすべて凸関数のとき，f は凸写像とよばれる．

最後に凸計画問題へ応用する．

系 4.2 X を $\mathbb{R}^n$ の空でない凸集合とする．写像 $f = (f_1, \ldots, f_m) : X \to \mathbb{R}^m$ $(X \neq \emptyset)$ を凸写像，$g_1, \ldots, g_\ell$ を X から $\mathbb{R}$ への凸関数とする．

このとき，空でない実行可能領域

$$\Omega = \{ x \in X \mid g_1(x) \leq 0, \ldots, g_\ell(x) \leq 0 \}$$

への f の制限 $f|_\Omega$ に対して，以下の (α) と (β) は同値である．

(α) $X^w(f|_\Omega) = X^*(f|_\Omega)$.

(β) $\displaystyle\bigcup_{\emptyset \subsetneq I \subsetneq M} X^*((f|_\Omega)_I) \subseteq X^*(f|_\Omega)$. (ここで，$M = \{ 1, \ldots, m \}$.)

5 弱パレート集合とパレート集合の一致条件：代数トポロジーによる方法

本節では，単体的な問題の弱パレート集合とパレート集合との関係について論じる．

5.1 単体的な問題のパレート集合

本節では単体的な問題のパレート集合と弱パレート集合との関係について，得られた結果を報告する．まずはいくつか定義を与える．

$$\Delta = \Delta^{m-1} = \left\{ (w_1, \ldots, w_m) \in \mathbb{R}^m \;\middle|\; w_i \geq 0,\ \sum_{i=1}^m w_i = 1 \right\},$$

$M = \{ 1, \ldots, m \}$ とし，部分集合 $I \subset M$ に対し $\Delta_I = \{ (w_1, \ldots, w_m) \in \Delta \mid \forall i \notin I,\ w_i = 0 \}$ とする．

定義 5.1（cf. [KHS+19]） 連続な m–目的問題 $f = (f_1, \ldots, f_m)$ と部分集合 $I = \{ i_1, \ldots, i_k \} \subset M$ $(i_1 < \cdots < i_k)$ に対し，$f_I = (f_{i_1}, \ldots, f_{i_k})$ とする．連続写像 $\Phi : \Delta \to X^*(f)$ で，任意の $I \subset M$ に対し $\Phi|_{\Delta_I} : \Delta_I \to X^*(f_I)$ と $f|_{X^*(f_I)} : X^*(f_I) \to f(X^*(f_I))$ がともに同相写像となるものが存在するとき，f は**単体的**であるという．また任意の $I \subset M$ に対し $\Phi(\Delta_I) = X^*(f_I)$ となる連続写像 $\Phi : \Delta \to X^*(f)$ が存在するとき，f は**弱単体的**であるという．

定義から弱単体的であれば単体的であることに注意する．本研究では弱単体的な問題のパレート集合と弱パレート集合が一致することを示すことができた：

定理 5.1 連続な問題 f が弱単体的ならば，$X^w(f) = X^*(f)$ である．

5.2 代数トポロジー

定理 5.1 の証明の概略を説明する前に，証明で必要となる代数トポロジーの用語，結果をまとめる (詳しくは [Hat02] を参照)．X, Y を位相空間，$f, g : X \to Y$ を連続写像とする．任意の $x \in X$ に対し $H(x,0) = f(x)$，$H(x,1) = g(x)$ を満たす連続写像 $H : X \times [0,1] \to Y$ を f から g へのホモトピーといい，f から g へのホモトピーが存在するとき f と g はホモトピー同値であるという．$A \subset X$ とする．恒等写像からのホモトピー $H : X \times [0,1] \to X$ で以下を満たすものを，X から A への変位レトラクションという：

- 任意の $a \in A$，$t \in [0,1]$ に対し $H(a,t) = a$，
- 任意の $x \in X$ に対し $H(x,1) \in A$.

単体の境界 $\partial\Delta$ の間の連続写像 $f : \partial\Delta \to \partial\Delta$ に対し，特異ホモロジー群に誘導される準同型を考えることにより，f の**写像度**と呼ばれる整数を定義することができる ([Hat02, p.134])．詳しい定義等はここでは述べないが，本稿で必要となる写像度の性質は次の 2 つである：

- $f : \partial\Delta \to \partial\Delta$ がある連続写像 $\tilde{f} : \Delta \to \partial\Delta$ の $\partial\Delta$ への制限であるとき，f の写像度は 0 である．
- $f : \partial\Delta \to \partial\Delta$ の写像度が 1 であるための (必要) 十分条件は，f が恒等写像とホモトピー同値であることである．

5.3 定理 5.1 の証明の概略

f を弱単体的な問題とする．定義から $X^*(f) \subset X^w(f)$ は明らかである．逆の包含関係を背理法で示す．f は弱単体的であるから，任意の $I \subset M$ に対し $\Phi(\Delta_I) = X^*(f_I)$ となる連続写像 $\Phi : \Delta \to X^*(f)$ が存在する．$\varphi = f \circ \Phi : \Delta \to f(X^*(f))$ とする．

さて，$X^w(f) \cap (X^*(f))^c \neq \emptyset$ と仮定し，$x \in X^w(f) \cap (X^*(f))^c$ を一つとる．必要なら f に像空間の平行移動を合成することで，$f(x) = 0$ とできる．$I \subset M$ に対し，部分集合 $Q_I \subset \mathbb{R}^m$ を次のように定義する：

$$Q_I = \{\, (y_1, \ldots, y_m) \in \mathbb{R}^m \mid \forall i \in I,\ y_i > 0 \,\},$$
$$-Q_I = \{\, (y_1, \ldots, y_m) \in \mathbb{R}^m \mid \forall i \in I,\ y_i < 0 \,\}.$$

簡単のため $Q_+ = Q_M$，$Q_- = -Q_M$ とする．x は弱パレート解であるから $f(U) \cap Q_- = \emptyset$ であるが，x はパレート解ではないため $f(U) \cap (\overline{Q_-} \setminus \{\, 0 \,\}) \neq \emptyset$ である．特に $f(X^*(f)) \cap Q_- = \emptyset$ で $0 \notin f(X^*(f))$ がわかる．また $f(X^*(f)) \cap Q_+ = \emptyset$ もわかる．よって φ は Δ から $R = \mathbb{R}^m \setminus (Q_- \cup \{\, f(x) \,\} \cup Q_+)$ への連続写像である．さらに任意の $I \subset M$ に対し，$f(X^*(f_I)) \subset R \setminus \overline{Q_I}$ であることも容易にわかる．実際 $f(X^*(f_I)) \cap \overline{Q_I} \neq \emptyset$ であれば，$0 \in f(X^*(f_I)) \subset f(X^*(f))$ となり矛盾する．定理 5.1 は以下の 2 つの補題より従う：

補題 5.1 部分集合 $I \subset M$ に対し $\hat{I} = M \setminus I$ とする．埋め込み $\psi : \partial\Delta \to R$ と $\psi(\partial\Delta)$ への変位レトラクション $H : R \times [0,1] \to R$ で，任意の真部分集合 $I \subset M$ に対し $H((R \setminus \overline{Q_I}) \times \{\, 1 \,\}) \cap \psi(\Delta_{\hat{I}}) = \emptyset$ となるものが存在する．

補題 5.2 $g : \partial\Delta \to \partial\Delta$ が任意の真部分集合 $I \subset M$ に対し $g(\Delta_I) \cap \Delta_{\hat{I}} = \emptyset$ を満たすとする．このとき g の写像度は 1(つまり恒等写像とホモトピー同値) である．

いずれの補題も必要な写像を具体的に構成することにより示すことができる．さて，補題 5.1 で得られる ψ と H を用いて，$h : \partial\Delta \to \partial\Delta$ を $h(x) = \psi^{-1}(H(\varphi(x), 1))$ で定義する．この写像の写像度は 0 である．実際 h は $\tilde{h}(x) = \psi^{-1}(H(\varphi(x), 1))$ で定義される $\tilde{h} : \Delta \to \partial\Delta$ の制限である．一方 h は補題 5.2 の条件を満たす．それを確かめるために真部分集合 $I \subset M$ を任意にとる．補題 5.1 より $H((R \setminus \overline{Q_I}) \times \{\, 1 \,\}) \cap \psi(\Delta_{\hat{I}}) = \emptyset$ である．一方 $\varphi(\Delta_I) = f(X^*(f_I)) \subset R \setminus \overline{Q_I}$ であるから，結局 $H(\varphi(\Delta_I) \times \{\, 1 \,\}) \cap \psi(\Delta_{\hat{I}}) = \emptyset$．よって $h(\Delta_I) \cap \Delta_{\hat{I}} = \emptyset$ がわかり，矛盾が生じる．

参考文献

[Hat02] A. Hatcher, *Algebraic topology*, Cambridge University Press, Cambridge, New York, 2002.

[HHI+19] N. Hamada, K. Hayano, S. Ichiki, Y. Kabata, and H. Teramoto, *Strongly convex mappings with crank one are simple problems*, SIAM Journal on Optimization (2019), submitted.

[KHS+19] Ken Kobayashi, Naoki Hamada, Akiyoshi Sannai, Akinori Tanaka, Kenichi Bannai, and Masashi Sugiyama, *Bézier simplex fitting: Describing Pareto fronts of simplicial prob-*

lems with small samples in multi-objective optimization, Proceedings of the Thirty-Third AAAI Conference on Artificial Intelligence (AAAI-19), 2019, to appear.

[LLTY15] Bingdong Li, Jinlong Li, Ke Tang, and Xin Yao, *Many-objective evolutionary algorithms: A survey*, ACM Comput. Surv. **48** (2015), no. 1, 13:1–13:35.

[LP14] A. Lovison and F. Pecci, *Hierarchical stratification of Pareto sets*, ArXiv e-prints (2014), http://arxiv.org/abs/1407.1755.

[Mat71] John N Mather, *Stability of C^∞ mappings, VI: The nice dimensions*, Proceedings of Liverpool Singularities – Symposium I, Springer, 1971, pp. 207–253.

[Mie99] K.M. Miettinen, *Nonlinear multiobjective optimization*, International Series in Operations Research & Management Science, vol. 12, Springer-Verlag, GmbH, 1999.

[中谷 94] 中山 弘隆 and 谷野 哲三, **多目的計画法の理論と応用**, コロナ社, 1994.

[田 92] 田村 一郎, **微分位相幾何学**, 岩波書店, 1992.