

平成29年度 共同利用研究報告書

平成29年12月6日

九州大学 マス・フォア・インダストリ研究所長 殿

所属・職名 摂南大学 理工学部 基礎理工学機構

提案者 氏名 ^(ふりがな)友枝 ^(ふりがな)恭子

下記の通り共同研究の報告をいたします。 記

		※整理番号	20170008	
1.研究計画題目	固液二相流の現象解明に向けた数学的考察とその周辺			
2.種別 (○で囲む)	a. 研究集会 I b. 研究集会 II c.短期共同研究 ○d.短期研究員			
3.研究代表者	氏名 ^(ふりがな)	友枝 ^(ふりがな) 恭子 ^(ふりがな)		
	所属 部局名	摂南大学理工学部基礎理工学機構		職名 講師
	連絡先			
	e-mail		TEL	
4.研究実施期間	平成29年8月28日(月曜日)～平成29年8月31日(木曜日)			

5.参加者数・参加者リスト (*別紙「共同利用研究報告書作成上の注意」参照)

(a,b は参加者数のみ記入し, 集会参加者リストを添付. c.の非公開プログラム参加者と d.は参加者リストに記入. c.は公開プログラムを含めた全参加者数を記入し, 公開プログラム参加者リストを添付.)

参加者数: 2 人

参加者リスト (a,b は記入不要, c.は非公開プログラム参加者, d.は共同研究参加者を記入)

氏名 ^(ふりがな)	所属	職名	氏名 ^(ふりがな)	所属	職名
友枝 ^(ふりがな) 恭子 ^(ふりがな)	摂南大学	講師			
松江 ^(ふりがな) 要 ^(ふりがな)	九州大学	助教			

6.本研究で得られた成果の概要

固液二相流の一つとして懸濁液の現象に対する考察を行った。ガラスビーズとシリコンオイルの混合液を斜面から流したとき、斜面の傾斜角と体積分率による懸濁液の挙動変化を調べた実験は Zhou 等(2005)によって行われた。斜面の傾斜角が高くかつ粒子(ガラスビーズ)の体積分率も高い場合、流下する懸濁液の先端には粒子が集まり、懸濁液の縁部分が粒子塊によって隆起する。この現象について Zhou や Cook 等が提唱した数理モデルは保存則系のリーマン問題であり、隆起現象の要因は懸濁液の先端付近で生じる二つの Lax 衝撃波(1 衝撃波と 2 衝撃波)によるものとされていた。我々はこのモデルが持つ弱解のパターンを数値計算により調べたところ、リーマン解の一つは 1 衝撃波・2 衝撃波によって構成されることが確認できた。しかし得られたリーマン解(1 衝撃波・2 衝撃波)のプロファイルは、ともに懸濁液の沈降状態に対応した概形を描いたため、懸濁液の隆起現象とは矛盾することも分かった。また仮定する条件によっては、構成されるリーマン解は 1 衝撃波を持たないことも分かり、隆起の運動メカニズムについては別の衝撃波が要因となっていることを示すことができた。要因となる衝撃波の正体は UC(under compressible)衝撃波である可能性が高く、隆起現象との関連性については現在検証中である。

1 研究実施当初の背景と研究目的

懸濁液実験の一つとして Zhou 等 (2005) による結果がある：傾斜角 α ($0^\circ < \alpha < 90^\circ$) を持つアクリル製の斜面に分散が均一のガラスビーズ (直径 $250 - 425 \mu\text{m}$) とシリコンオイルの懸濁液を流し、流れる懸濁液の水面形 (概形) を上から観察する. このとき観測される懸濁液の水面形は 流下する斜面の角度と粒子の体積分率によって、次の 3 パターンに変化する. 1) 傾斜角が低く ($0^\circ < \alpha < 35^\circ$) かつ 体積分率も低い ($0 < \phi < 0.35$) 場合、ガラスビーズ (粒子) は沈降し、懸濁液の底部には粒子層、上部には流体層 (ガラスビーズを含まないクリアな状態のシリコンオイルが流れる層) が生成される (図 (a) settled). 2) 傾斜角が高く ($\alpha > 40^\circ$) かつ 体積分率も高い ($\phi > 0.40$) 場合、流下する懸濁液の先端には粒子が集まり、懸濁液の縁部分が粒子塊によって隆起する (図 (c) ridged). 3) 1) と 2) 以外 ($35^\circ \leq \alpha \leq 40^\circ$ または $0.35 \leq \phi \leq 0.40$) の場合、懸濁液は ガラスビーズとシリコンオイルの混合状態を保ちながら流下する (図 (b) well-mixed). 更にパターン 2) で見られる隆起現象の運動メカニズムを解明するため Zhou 等 (2005) や Cook 等 (2008) は、以下の数理モデルを提唱した：

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} h + \frac{\partial}{\partial x} (h^3 f(\phi)) = 0, \\ \frac{\partial}{\partial t} (\phi h) + \frac{\partial}{\partial x} (h^3 \phi f(\phi) + hg(\phi)) = 0, \end{cases} \quad (1.1)$$

ただし、 $h(t, x) (> 0)$ は液膜の厚さ $\phi(t, x) \in (0, 1)$ は粒子の体積分率を表す. また、

$$f(\phi) = \frac{\rho(\phi)}{\mu(\phi)}, \quad g(\phi) = v_s \phi (1 - \phi) F(\phi) W(h)$$

であり、 $\rho(\phi)$ と $\mu(\phi)$ はそれぞれ

$$\rho(\phi) = 1 + \frac{(\rho_p - \rho_f)}{\rho_f} \phi, \quad \mu(\phi) = \left(1 - \frac{\phi}{\phi_{max}}\right)^{-2}, \quad F(\phi) = (1 - \phi)^{5.1}$$

である. また、 $W(h)$ は

$$W(h) = \frac{\frac{1}{18}(h/a)^2}{\sqrt{1 + [\frac{1}{18}(h/a)^2]^2}},$$

ただし、 a は粒子の中心部分から壁面までの距離を表す. Zhou 等 (2005) の結果によると、パターン 2) の隆起現象は、2つの Lax 衝撃波 (1-衝撃波と 2-衝撃波) によるものとされているが、これに関する数学的説明については不完全であった. そこで、保存則系 (1.1) が持つ弱解のパターンを網羅し、これらの弱解が持つ挙動を調べることによって隆起現象の運動メカニズムの解明を目指した.

2 研究の方法

本研究は、研究実施期間中に行った松江要助教 (九州大学) との研究議論により遂行した. 先行研究の Zhou 等 (2005) や Cook 等 (2008) では、

$$W(h) \approx 0 \text{ for } h < a, \quad W(h) \approx 1 \text{ for } h \gg a$$

とされているので, $W(h) = 0$ と $W(h) = 1$ の場合について考察した. 我々は, 隆起現象の運動メカニズムを解明するための手がかりを探るため Zhou 等 (2005) の論文を検証したが, この論文で行われている数学的説明には誤りがあることを発見した. そのため, 彼らの結果として示されている隆起現象と 2 つの Lax 衝撃波 (1-衝撃波と 2-衝撃波) との関連性については, そもそも隆起現象の要因は 2 つの Lax 衝撃波によるものではない可能性すら生じてしまった. そこで, 我々は保存則系 (1.1) を書き換えた保存則系

$$\partial_t U + A(U) \partial_x U = \mathbf{0} \quad (2.1)$$

について, 次の初期条件を持つリーマン問題についての再考察を行った.

$$U(0, x) = \begin{cases} U_L, & \text{if } x < 0, \\ U_R, & \text{if } x > 0, \end{cases} \quad (2.2)$$

ただし,

$$U = \begin{pmatrix} h \\ n \end{pmatrix}, \quad A(U) = \begin{pmatrix} 3h^2 f - nh(d_\phi f) & h^2(d_\phi f) \\ 2nhf - n^2(d_\phi f) - \frac{n}{h}(d_\phi g) + g & h^2 f + nh(d_\phi f) + (d_\phi g) \end{pmatrix}.$$

$A(U)$ の固有値は

$$\lambda_1(U) = \frac{4h^2 f + (d_\phi g) - \sqrt{Q}}{2}, \quad \lambda_2(U) = \frac{4h^2 f + (d_\phi g) + \sqrt{Q}}{2},$$

ただし,

$$Q = (2h^2 f - d_\phi g)^2 + 4h^2(d_\phi f)g$$

であり, $Q > 0$ であるとする. このとき, 考察するすべての U に対して $\lambda_1(U) < \lambda_2(U)$ が成り立つ. 固有値 $\lambda_1(U)$ と $\lambda_2(U)$ に対応する右固有ベクトル r_1 と r_2 は

$$r_1 = \begin{pmatrix} -2b \\ (a-d) + \sqrt{(a-d)^2 + 4bc} \end{pmatrix}, \quad r_2 = \begin{pmatrix} -2b \\ (a-d) - \sqrt{(a-d)^2 + 4bc} \end{pmatrix}$$

である. ただし,

$$\begin{aligned} a &= 3h^2 f - nh(d_\phi f), & b &= h^2(d_\phi f), \\ c &= 2nhf - n^2(d_\phi f) - \frac{n}{h}(d_\phi g) + g, & d &= h^2 f + nh(d_\phi f) + (d_\phi g). \end{aligned}$$

$(\nabla \lambda_i \cdot r_i)(U) \neq 0$, ($i = 1, 2$) が成り立つとする (この時, 第 i 特性場は “真性非線形” であるという). この場合, リーマン問題 (2.1), (2.2) の典型的な解として, U_L を左端, U_R を右端状態とした有限個の定数状態で, 各々が “希薄波, 衝撃波” で繋がるもので構成されるものがある. 一方, $(\nabla \lambda_i \cdot r_i)(U) \equiv 0$ が成り立つ (この時, 第 i 特性場は “線形退化” であるという) 場合, 各々が “接触不連続” で繋がるもので構成されるものがある. このような解はしばしば “リーマン解” と呼ばれる.

我々は, これらのリーマン解に対する構成可能性を検証するため 数値計算による検証法を構築した. その際, 必要となる単純波の検証に関する数学理論は次節で述べる. さらに 構成可能なリーマン解と懸濁液で生じる現象との関連性についても調べた.

3 単純波 (衝撃波・希薄波・接触不連続)

左状態 $U_L = U_0 = (h_0, n_0)$ として 上記のような解を許容する $U_R = U$ の取りうる集合 (U_L から始まる半曲線) を考える. $U = (h, n)$ が不連続点を含むリーマン問題 (2.1), (2.2) の弱解 (後述) を与える時, ある s に対して, ランキン-ユゴニオ条件

$$\begin{cases} s(h - h_0) = h^3 f\left(\frac{n}{h}\right) - h_0^3 f\left(\frac{n_0}{h_0}\right), \\ s(n - n_0) = \left(h^2 n f\left(\frac{n}{h}\right) - h_0^2 n_0 f\left(\frac{n_0}{h_0}\right)\right) + \left(hg\left(\frac{n}{h}\right) - h_0 g\left(\frac{n_0}{h_0}\right)\right) \end{cases} \quad (3.1)$$

が満たされなければならない. さらに, $\lambda_i(U_0), \lambda_i(U)$ と s に対して, 次の“エントロピー条件” が成り立つと仮定する:

$$\begin{aligned} &1\text{-エントロピー条件} \quad s < \lambda_1(U_0) \quad \text{かつ} \quad \lambda_1(U) < s < \lambda_2(U), \\ &2\text{-エントロピー条件} \quad \lambda_1(U_0) < s < \lambda_2(U_0) \quad \text{かつ} \quad \lambda_2(U) < s. \end{aligned}$$

ランキン-ユゴニオ条件かつ i -エントロピー条件を満たす不連続解は “ i -衝撃波解” という. i -衝撃波を与える $U = (n, h)$ は, i -衝撃波曲線 $S_i(U_0)$ を定める. ここで, (2.1) の初期値問題の弱解とは, 任意の $\psi \in C_0^1([0, \infty) \times \mathbb{R}; \mathbb{R}^2)$ に対し,

$$\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}} (U\psi_t + P(U)\psi_x) dx dt + \int_{\mathbb{R}} U(0, x)\psi dx = 0$$

を満たすものである. ただし,

$$P(U) = \begin{pmatrix} h^3 f(\phi) \\ h^3 \phi f(\phi) + hg(\phi) \end{pmatrix}.$$

次に, $U(t, x)$ を以下のようにスケール変換する.

$$U(t, x) = \begin{pmatrix} h(t, x) \\ n(t, x) \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} h\left(1, \frac{x}{t}\right) \\ n\left(1, \frac{x}{t}\right) \end{pmatrix} = V\left(\frac{x}{t}\right).$$

このとき, 保存則系 (2.1) の式から, 以下が得られる.

$$\begin{cases} \lambda_i(V(\tau)) = \tau, \\ V'(\tau) = r_i(V(\tau)), \quad (i = 1, 2), \\ V(\tau_0) = U_0, \end{cases} \quad (3.2)$$

ただし, $\tau = x/t = d/d\tau$ である. 各 i に対して, U_0 から始まって $\lambda_i(U)$ の増加する方向の $r_i(U)$ に対する積分曲線を $R_i(U_0)$ (i -希薄波曲線と呼ぶ) とする. この時, $R_i(U_0)$ の上の点 $U = (h, n)$ が, U_0 と U を繋ぐ “ i -希薄波” を定める. 希薄波曲線 $R_i(U_0)$ は常微分方程式 (3.2) の解曲線である.

第 i 特性場が線形退化であると仮定したとき, V が (3.2) の解ならば

$$\frac{d}{d\tau} \lambda_i(\tau) = \nabla \lambda_i \cdot V' = \nabla \lambda_i \cdot r_i(V(\tau)) = 0$$

が成り立つ. これは λ_i が (3.2) の積分曲線に沿って定数, すなわち

$$\lambda_i(U) = \lambda_i(U_0) \quad (3.3)$$

であることを意味する. また $s \equiv \lambda_i(U_0)$ とすることで, (3.3) より U は ランキン-ユゴニオ条件 (3.1) を満たす. 各 i に対して, U_0 から始まって $\lambda_i(U) = \lambda_i(U_0)$ と一致する方向の $r_i(U)$ に対する積分曲線を $C_i(U_0)$ (i -接触不連続曲線と呼ぶ) とする. この時 $C_i(U_0)$ の上の点 $U = (h, n)$ が, U_0 と U をスピード $s = \lambda_i(U) = \lambda_i(U_0)$ で繋ぐ “ i -接触不連続” を定める. 接触不連続曲線 $C_i(U_0)$ は常微分方程式 (3.2) の解曲線である. 本研究ではリーマン問題 (2.1), (2.2) のリーマン解, 特に定数状態が上記の意味での (i -) 希薄波, (i -) 衝撃波, (i -) 接触不連続で繋がるものを懸濁液のメカニズム考察の起点とした.

4 研究成果

今回扱った数理モデルにおいては, $W(h) = 0$ の場合 第1特性場が線形退化: $(\nabla \lambda_1 \cdot r_1)(U) \equiv 0$, 第2特性場が真性非線形: $(\nabla \lambda_2 \cdot r_2)(U) \neq 0$ になった. 従って $W(h) = 0$ の場合 1-衝撃波は現れず, もし $W(h) = 0$ として行った実験において Zhou 等 (2005) で観測された隆起と同様の現象が観測されたならば, 隆起の要因は 2つの Lax 衝撃波によるものではないことが結果として得られた. 一方, $W(h) = 1$ の場合 第1特性場と第2特性場は共に真性非線形であるため, Zhou 等 (2005) で示されたリーマン解 (1-衝撃波・2-衝撃波) は存在する可能性がある. そこで, 実際にこの組み合わせによって解を構成できるかどうか検証した. ただし 実験結果と比較できるように $U_0 = (h_0, n_0)$ と (ρ_p, ρ_f) は以下の値として数値計算した.

$$U_0 = (h_0, n_0) = (1, 0.4), \quad (\rho_p, \rho_f) \approx (2500, 970).$$

1-衝撃波曲線と2-衝撃波曲線についてプロットした結果が図1と図2である. 実線がランキン-ユゴニオ条件を満たす曲線(ユゴニオ曲線), 破線と点線で囲まれた部分が i -エントロピー条件 ($i = 1, 2$) を満たす U の範囲である. 図1では, ユゴニオ曲線が1-エントロピー条件の範囲に入っているか否かは不明瞭であったため, スピード s と固有値の数値を計算することによって調べた. その結果, 左状態から $(h_0, n_0) = (1.0, 0.4)$ から右状態 $(h, n) = (0.941, 0.355)$ に繋がる1-衝撃波が見つかった. 2-衝撃波曲線については, 図2から少なくとも領域 $\{(h, n) : 0 < h < 1.0, 0 < n < 0.4\}$ において, ユゴニオ曲線は2-エントロピー条件の範囲に入っていることが分かった. これは, 2-衝撃波曲線をプロットするための基準点を $(h_0, n_0) = (1.0, 0.4)$ とした結果であり, この基準点を1-衝撃波が繋ぐ右状態に対応するようにとることで, 1-衝撃波と2-衝撃波で繋がるリーマン解を構成することができる. 1-衝撃波・2-衝撃波から成るリーマン解は第2特性場の左状態に依存するものの構成することができる. ただし, 図1と2で示されている i -衝撃波は $h < h_0$ に対して許容されるものである. これは, 左状態から右状態にかけて流体が盛り上がる隆起現象 ($h_0 < h$) に矛盾する. 従って, 懸濁液に生じる隆起の要因は i -衝撃波によるものではなく, この事実は Zhou 等 (2005) の結果に対局するという意味で新たな発見である. これらは現在論文の一部として取りまとめ中である(松江-友枝 [MT2]). また, 研究期間中に懸濁液の粒子沈降現象を表す数理モデルの弱解の構成パターンに関する成果もまとめた(松江-友枝 [MT1]). 今回取り上げた隆起現象と同様の隆起は(粒子を含まない)液膜流の場合でも観測されている. 液膜流の場合は UC(under compressible) 衝撃波と Lax 衝撃

波であることが示されているので (Bertozzi 等 (1999)), 懸濁液の隆起の要因も UC 衝撃波である可能性が高い. これらの関連性については現在検証中である.

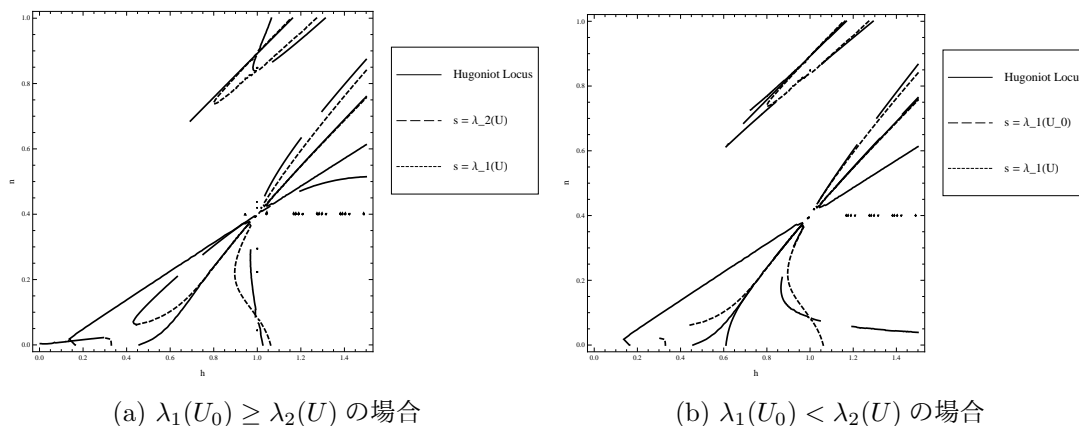


図 1: ユゴニオ曲線と 1-エントロピー条件

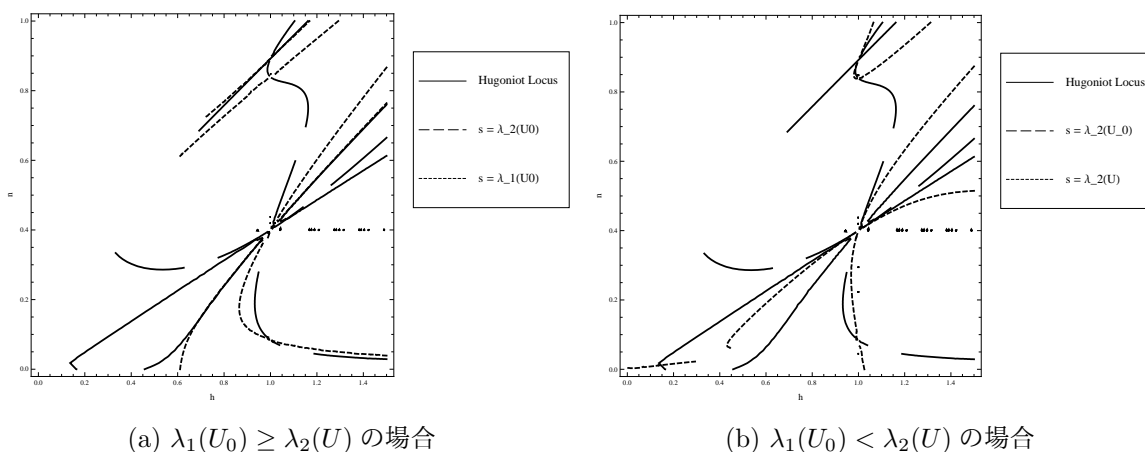


図 2: ユゴニオ曲線と 2-エントロピー条件

5 主な発表論文等

論文

[MT1] K. Matsue, K.Tomoeda, *Toward a mathematical analysis for a model of suspension flowing down an inclined plane*, submitted to Equadiff 2017 Proceedings.

[MT2] K. Matsue, K.Tomoeda, in preparation.

研究発表

1. 友枝 恭子, 斜面を流れる懸濁液の数学解析, 神戸大学解析セミナー, 2017 年 11 月 28 日 in 神戸大学.
2. 松江 要, 友枝 恭子, 懸濁液の数学解析～先端付近で生じる隆起現象～, 2017 年 12 月 16 日 in 龍谷大学 (講演予定).