平成２７年度 共同利用研究報告書

平成 27 年 12 月 4 日

九州大学 マス・フォア・インダストリ研究所長 殿

所属・職名　島根大学生物資源科学部　助教

提案者 氏名(ふりがな)　吉岡(よしおか)　秀和(ひでかず)

下記の通り共同研究の報告をいたします.

記

	※整理番号		20150002		
1.研究計画題目	状態遷移拡散過程による水域ネットワークでの輸送現象の数理モデル：理論と実問題への応用				
2.種別（○で囲む）	a. 研究集会Ⅰ　b. 研究集会Ⅱ　c.短期共同研究　d.短期研究員				
3.研究代表者	氏名(ふりがな)	吉岡(よしおか)　秀和(ひでかず)			
	所属部局名	島根大学生物資源科学部		職名	助教
	連絡先				
	e-mail		TEL		
4.研究実施期間	平成 27 年 7 月 27 日（月曜日）～平成 27 年 7 月 31 日（金曜日） 平成 27 年 8 月 31 日（月曜日）～平成 27 年 9 月 4 日（金曜日）				

5.参加者数・参加者リスト（＊別紙「共同利用研究報告書作成上の注意」参照）
(a,b は参加者数のみ記入し, 集会参加者リストを添付. c.の非公開プログラム参加者と d.は参加者リストに記入.
c.は公開プログラムを含めた全参加者数を記入し，公開プログラム参加者リストを添付.）

参加者数：3 人

参加者リスト（a,b は記入不要，c.は非公開プログラム参加者，d.は共同研究参加者を記入）

氏名(ふりがな)	所属	職名	氏名(ふりがな)	所属	職名
吉岡(よしおか)　秀和(ひでかず)	島根大学生物資源科学部	助教			
白井(しらい)　朋之(ともゆき)	九州大学マス・フォア・インダストリ研究所	教授			
田上(たがみ)　大助(だいすけ)	九州大学マス・フォア・インダストリ研究所	准教授			

6.本研究で得られた成果の概要

本研究では，水域ネットワークにおける輸送現象 (1 次元領域や連結グラフ領域に生じる水の流れ・土砂輸送・水質動態・魚類行動) に関する数理・数値解析を行い，以下の結果を得た．詳細は，成果報告書に別途記す.

① 状態遷移拡散過程に基づいた，水域ネットワークにおける輸送現象に対する数理モデルの導出.

② 「遊泳」と「休息」の 2 状態間を遷移する魚類行動を記述する Hamilton-Jacobi-Bellman 方程式 (非線型・非保存型の偏微分方程式) の導出.

③ ②で導いた Hamilton-Jacobi-Bellman 方程式に対する，「休息」の状態を考慮しない条件下での数理・数値解析. 具体的には,

✓ 拡散項が退化する場合に対する粘性解に基づいた数理解析を行い，まとまった成果を得た.

✓ 拡散項が退化しない場合に対する古典的な弱解に基づいた数理・数値解析を行い，まとまった成果を得た.

④ 奇遇にも SGW2015 への参加機会を得て (7/29-7/31)，様々な研究者と有益な意見交換を交わすことが出来た.

⑤ 本研究参加者らが取り組むべき，後続研究へと繋がる今後の課題抽出を行うことが出来た

平成２７年度 共同利用 (短期研究員) 研究報告書

提出日 平成 27 年 12 月 4 日

課題名
状態遷移拡散過程による水域ネットワークでの輸送現象の数理モデル：理論と実問題への応用

代表者
島根大学生物資源科学部　助教　吉岡 秀和

代表者以外の参加者
九州大学マス・フォア・インダストリ研究所　白井 朋之 教授
九州大学マス・フォア・インダストリ研究所　田上 大助 准教授

研究実施期間
前半期間：平成 27 年 7 月 27 日（月曜日）～平成 27 年 7 月 31 日（金曜日）
後半期間：平成 27 年 8 月 31 日（月曜日）～平成 27 年 9 月 4 日（金曜日）

研究実施内容

(前半) 主に白井教授と実施

07/27 (月)
- 吉岡のこれまでと現在の研究紹介
- 短期研究員事業 (前期) で取り組む問題の内容整理
- 吉岡の研究に欠けていた，いきなり Kolmogorov 方程式を考えるのではなく SDE に基づき輸送現象を考えることの重要性の確認
- 状態遷移拡散過程 (RSDP) モデルの概念を用いた，1 次元水路に生じる土砂輸送・水質動態・魚類行動の具体的な数理モデリング

07/28 (火)
- 前日 (7/27(月)) に作成したまとめ資料の復習と修正
- 1 次元区間上での魚類行動モデルに関する試行的な数値計算とその結果に関する定性的な考察
- 流速の絶対値が小さすぎ，魚類個体が遡上経路を見失う場合を対象としたドリフト係数のモデリング (これは主に多次元問題で重要となる)
- 水路網における魚類行動，とくに堰がある場合を対象とした遡上の数理モデリング
- ユニバーサルな，例えば最初から係数の具体的な関数形を指定するわけではなく特定の数学的性質のみを仮定した理論展開の重要性の確認

07/29 (水)
- 前日 (7/28(火)) に作成したまとめ資料の復習と修正
- SGW2015 初日に参加し，各課題に関するプレゼンテーションを聴講した
- 魚類行動の RSDP モデルにあらわれる係数，とくに評価関数に含まれるコスト f の関数形についての検討

07/30 (木)
- SGW2015 において出題された課題「Mathematical formulation for traffic gridlock avoidance」に参加し，課題解決のための議論の輪に加わった

07/31 (金)
- 前日に引き続き，SGW2015 において出題された課題「Mathematical formulation for traffic gridlock avoidance」に参加し，課題解決のための議論の輪に加わった．本課題の解決には連結グラフ上において非線型双曲型偏微分方程式を数値的に解くことが有効であることが示唆され，その際の理論構成を積極的に行った
- 魚類行動の RSDP モデルにあらわれる係数, とくに評価関数に含まれるコスト f の関数形についての検討 (3 日目のつづき)
- まとめ資料の全体を通した見直し
- 研究成果発表の方法に関する議論

(後半) 主に田上准教授と実施

08/31 (月)
- 前半まとめ資料の加筆修正
- 前半の加筆修正 (前半まとめ資料参照)
- 白井先生と前半内容の確認．数理モデリングに関する今後の課題を抽出

09/01 (火)
- 田上先生に自身の研究内容を紹介

- 短期研究員後半で取り組む内容を議論

<u>09/02 (水)</u>

- 魚類行動を支配する時間定常的な 1-D HJBE の解を数値近似するための逐次近似アルゴリズムに関する (形式的な) 数学解析
- 上記の逐次近似アルゴリズムに用いるべき離散化手法に関する議論

<u>09/03 (木)</u>

- 魚類行動を支配する時間定常的な 1-D HJBE の解を数値近似するための逐次近似アルゴリズムに関する数学解析の続き．Galerkin 法に基づく近似解の一意可解性を証明．近似解の弱解への収束性については，大筋で証明

<u>09/04 (金)</u>

- 前日に取り組んだ Galerkin 法に基づく近似解の一意可解性の証明に関する確認
- 白井先生，田上先生，D3 井元祐介氏，東北大学の中澤 嵩先生と小セミナーを行い，短期研究員の成果について発表

成果報告

(研究の背景･目的)

近年の急激な河川環境改変が，利・治水の両面において人類に莫大な利益をもたらしたことは論を待たない．例えば，河川横断型の水利構造物であるダムや堰は，河床の安定化や洪水緩和，過不足なき水資源供給を可能とした．一方で，河川環境改変は，人類以外の生命体，とくに河川生態系を構成する水棲生物種にとって生息域の大幅な劣化を招いた．河川横断型の水利構造物は河川流況を自然状態から逸脱した状態に遷移させ，流れ場における水質動態の激変を引き起こし，水棲生物の生息地や移動経路を破壊した．一般に，河川周辺では河川生態系に大きく依存した漁業・商業活動が盛んである．例えば我が国では，アユやサケ，ウナギなどの回遊魚が内水面漁業の漁獲高の大部分を占める．河川環境改変がもたらす河川生態系の劣化は，こうした内水面漁業に大打撃を与えている．それゆえ，河川環境や河川生態系が晒されている現状評価や将来予測，現状打開策の提示は，生物・生態学などの基礎学問分野，水環境学，水産学，地域環境科学などの応用学問分野の双方にとって意義深いものである．従来，河川環境や河川生態系に関する研究は｢現地調査｣に基づく現象の観測が大半であり，その原因や帰結を理論的に導く｢数理モデル｣，｢現地調査｣と｢数理モデル｣を橋渡し，現象理解の深化を促す｢数値シミュレーション｣を一貫的になす研究は，有効性や必要性が示唆されつつもほとんどなされてきていない．｢現地観測｣，｢数理モデル｣，｢数値シミュレーション｣を三位一体として初めて，現場で起きている現象の原因から帰結までを一貫的に検討することが出来るのではないか．これが，本事業への課題申請を決断した大きな動機である

本研究の最終目的は，河川環境や河川生態系の劣化に起因した内水面漁業の存続危機が懸念されている島根県斐伊川を対象とした，本川の主要水産資源であり河川生態系の中核を担うアユの回遊環境を評価・予測する接近手法の開発と実用化である．とくに，本短期研究員事業では河川流況，土砂動態，アユ遡上について，確率過程の概念“状態遷移拡散過程 (RSDP)”[1]に基づく数理・数値的な検討を行っている．本事業の大部分は，実際的には解析学の観点からの「アユ遡上の数理モデル化に費やされた．これは，河川流況や土砂動態については既存の数理モデルが存在する反面，アユ回遊については数理モデルさえ定かでなかったためである．とりわけ，河川分合流点におけるアユ回遊の生態学的に合理的な数学的記述は見当たらない．本事業では，アユ回遊を記述する数理モデルを確率微分方程式に対する制御理論，すなわち確率制御理論の応用により導出した．また，異なる弱解の概念，すなわち非退化楕円型方程式に対する古典的 H^1 級弱解と退化楕円型方程式に対する粘性解を用い，アユ回遊を支配する Hamilton-Jacobi-Bellman 方程式 (HJBE) の解が有する数学的性質を検討した．なお，本研究が対象とする接近手法は斐伊川への適用を念頭に置きつつも，その数理モデル化は高い汎用性を有し，我が国の他河川，ひいては海外の河川に対しても応用しうるものであると期待される．

次ページ以降では，まず，本事業で導いたアユ回遊の数理モデルを示す．つぎに，簡単化したモデルに対する古典的弱解と粘性解の双方の立場から行った数学解析の結果と今後の課題を記す．紙面の都合によりこの報告書では本事業の成果全てを記すことはできないが，｢前期まとめ資料(約 30 ページ)｣と｢後期まとめ資料(約 20 ページ)｣という文書ファイルとして，吉岡，白井教授，田上准教授が成果共有している．

本事業の研究成果については，応用数学に関する国際会議や国内研究集会における事業参加者主催セッションでの発表，国際雑誌への投稿準備，後続研究開始準備が進められている．

(問題設定)
本研究では魚類行動，とくに水の流れに逆らい自発的に遊泳する“遡上”の数理モデルを考える．例えばアユは，春期に稚魚が下流浅水域 (浅海域や汽水域) から河川上流域にある餌 (岩に付着する藻類や木から水面に落ちてきた小型昆虫) が豊富な生息域へ河川を遡上する．Yoshioka et al. [2] は，魚類個体の遡上においては流れに逆らい遊泳する際に消費されるエネルギー (コスト：負値) と上流端 (生息域) に到達することで得られる生態学的な利益 (正値) の総和が最大化されるであろう，という動的エネルギー最小化原理を提唱している．本原理によれば，おおまかには，利益が十分に大きく流速が遊泳速度の上限値より小さい場合に，魚類個体は河川区間全体において遡上を選択するはずである．

ここでは，1 次元開水路流れにおける魚類個体の遡上を定式化する．まず，開水路を 1 次元区間 $D=(0,L)$ と同一視する．L は水路長である．本研究は河川スケールでの回遊を想定している．また，各時刻 t において水路 D の各位置で水理量 (流速 $V=V(t,x)$ や水路断面積 $A=A(t,x)$ など) があらかじめ与えられているものと仮定する．ここでは簡単のため，$V=const>0$ とする．水路 D における流向は一意に定まり，$x=0$ が上流端，$x=L$ が下流端である．魚類遡上を考える場合，流速以外にも水深や水質 (水温や濁度，溶存酸素濃度など) も考える方がより現実的ではあるが，問題を単純化するためここでは考慮しない．

確率微分方程式

水路 D における魚類個体の行動が，伊藤型の確率微分方程式 (SDE) [3]

$$X_t=(V+u_t)\mathrm{d}t+b\mathrm{d}B_t \tag{1}$$

により記述されるとする．すなわち，魚類行動を拡散過程とみなす．ここに，X_t は時刻 t における魚類個体の 1 次元的な位置，$u=u_t$ は魚類個体の遊泳速度，$b>0$ は拡散係数 (数学上は b を拡散係数と呼ぶようであるが，農・工学上は $0.5b^2$ を拡散係数と呼ぶ．)，B_t は 1 次元標準 Brown 運動である．アユやサケなどの回遊性魚類が遡上する場合は単体ではなく群れをなすことが通常であるが，(1)は単体の魚類行動を規定する SDE であることに注意する．また，(1)は遊泳状態にある魚類個体の行動のみを記述でき，遊泳による疲労が蓄積されたため休息する機構を考慮したものではない．この機構がないと，例えば現代的なヴァーティカルスロット式魚道における間欠的な魚類遡上を再現することは不可能であると考えられる．以下では，遊泳速度を制御変数とし，魚類の遡上を規定する支配方程式 (HJBE) を導いていく．

制御の許容集合

遊泳速度 u_t はモデルが有する唯一の制御変数である．ここでは，その許容集合を $\mathcal{U}$，各時刻におけるその値域 U を有界集合

$$U=\left\{u\,\middle|\,|u|\le u^{(\mathrm{M})}\right\} \tag{2}$$

と与える．ここに，$u^{(\mathrm{M})}$ は遊泳速度の絶対値の最大値であり有界な正定数とする．様々な回遊魚に対する $u^{(\mathrm{M})}$ を実験的に推定することが出来るが，$u^{(\mathrm{M})}$ の個体差が大きい魚種もあるようである．以下では u_t が Markov 制御であると仮定する．

評価関数

最適制御問題を考えるにあたり評価関数を設定する．ここでは，

- 遊泳すると魚類個体に疲労が蓄積される
- 上流端 (生息地がある) に到達することで，魚類個体は生態学的な利益を得る

という仮定のもと，評価関数を

$$\Phi(s,x)=\sup_{u_{(\cdot)}\in\mathcal{U}}\mathrm{E}\left[-\int_s^{\bar{T}}f(u_t)\mathrm{d}t+P\left(X_{\bar{T}}\right)\right],\quad \bar{T}=\min\{\tau,T\},\quad \tau=\inf\left\{t\,\middle|\,t>s,X_t\in\partial D,X_s=x\right\} \tag{3}$$

と与える．ここに，T は終端時刻，$\mathrm{E}[\cdot]$ は期待値，τ は最小時刻 (最小到達時刻)，$f(u)$ は制御 u の非負増加関数で単位時間あたりの疲労の蓄積度，P は境界 ∂D に到達することで得られる利益をあらわす．これは $P(0)=P_0=const(>0)$ かつ $P(L)=0$ を満足する 1 変数関数であり，それ以外の場合は 0 であるとする．すなわち，水路の下流端に到達しても何ら生態学的な利益は得られないと仮定する．

Hamilton-Jacobi-Bellman 方程式

動的計画原理 [4] によれば，式(3)が定義する Φ を支配する HJBE

$$\frac{\partial\Phi}{\partial s}+\sup_{u\in U}\left\{(V+u)\frac{\partial\Phi}{\partial x}+\frac{b^2}{2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}-f(u)\right\}=0\quad\text{in}\quad D \tag{4}$$

が導かれる．(4)には境界条件

$$\Phi(s,0)=P_0,\quad \Phi(s,L)=0 \tag{5}$$

と終端条件

$$\Phi(T,x)=0 \ \text{ in } \ D \tag{6}$$

が付帯する．係数VとBはuに依存しないので，(4)は

$$\frac{\partial\Phi}{\partial s}+V\frac{\partial\Phi}{\partial x}+\frac{b^2}{2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}+\sup_{u\in U}\left\{u\frac{\partial\Phi}{\partial x}-f(u)\right\}=0 \ \text{ in } \ D \tag{7}$$

と書き直すことが出来る．流れ場の時間定常性を仮定しているので，終端時刻Tが十分に大きいことを要請すれば，(7)の定常版

$$V\frac{\partial\Phi}{\partial x}+\frac{b^2}{2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}+\sup_{u\in U}\left\{u\frac{\partial\Phi}{\partial x}-f(u)\right\}=0 \ \text{ in } \ D \tag{8}$$

を考えることには生態学上の大きな意義がある．例えば，平水時 (無降雨期間) に生じる魚類遡上であれば取り扱うことが出来よう．ただし，魚類は洪水時，すなわち流れの勢いが強い時期に遡上する割合が高いという現地観測結果が既往研究において数多く報告されているため，将来的には係数が時空間的に変動する非定常問題を扱いたいと考えている．

数理解析結果

(8)が魚類行動を規定する HJBE の原型である．本研究における(8)の数理解析結果の概要を記す.

✓ 古典的弱解の観点から($b>0$の場合)

$b>0$とした場合，(8)の弱形式版を考えることで，H^1級の弱解の存在と一意性に関する数理解析を展開することが出来る．ただし，Navier-Stokes 方程式や非線型放物型保存則の場合と同様に，Bが十分に大きくなければ弱解の存在さえ示すことはままならない．bが十分に大きいと仮定したうえでコスト関数を単項式$f(u)=(m+1)^{-1}|u|^{m+1}$ ($m\geq 1$) と指定し，定義関数$\chi\left(\left|\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right|\leq\left(u^{(\mathrm{M})}\right)^{m+1}\right)$の可測性を認めれば，Galerkin 法に基づいてH^1級弱解の一意存在性を示すことが出来る．空間高次元の問題に対しても類似の条件を仮定し，Sobolev の埋め込み定理から，mがある程度大きければ弱解の一意存在性を示すことが出来ることが示唆されている．

✓ 粘性解の観点から($b=0$の場合)

$b=0$とした場合，問題は確率制御ではなく決定制御となる．このとき，(8)の解ΦはI内で連続であるものの微分不可能な点を有し，加えて境界条件を通常の意味では満足しない．コスト関数$f(u)$が十分に滑らかで単調減少かつ下に凸，$f(0)=0$を満足すれば，解が微分不可能な点を除き，領域Iの各点において最適制御$u=u^*$が一意に定まることを示すことが出来る．また，この事実に基づき，(8)の解析的な粘性解を導くことが出来る．この解析解を用いれば，(8)の解構造に関する定性的な知見を得ることが得られるのみならず，実際の河川において回遊魚が遡上可能か否かを判定する新たな手法を構築できる．

また，1 次元の解析的な粘性解に対する検討に基づき，実河川を近似するある種の樹状ネットワーク領域において，少なくとも頂点以外で解析的な粘性解を構成できることを示した．さらに，頂点で解Φが満足すべき内部境界条件について数学・生態学的に検討し，両面から合理的な内部境界条件を提示した．この内部境界条件によれば，樹状ネットワークの上流から下流に向けて一意に解を構成できる．そのため，本内部境界条件の実用性は極めて大きいものと期待される．

より複雑な数理モデルへ

以上に加え，RSDP の概念に基づき，休息と消滅 (死亡) に関する機構を考慮した魚類行動の数理モデルを導くことが出来たことも本研究の主要成果である．ここでは，“遊泳状態 ($k=1$)”と“休息状態 ($k=2$)”の 2 状態を考える．初期時刻 0 から時刻tまでの積算された“疲労”の指標

$$I_t=\int_0^t\chi(\alpha_s=1)F(u_s)\,\mathrm{d}s-G\int_0^s\chi(\alpha_s=2)\mathrm{d}s \tag{9}$$

を考える．$F(u_t)$は制御u_tの増加関数であり非負，Gは正定数である．(9)の右辺第 1 項は遊泳による疲労蓄積，右辺第 1 項は休息による疲労回復をあらわす．(9)からは，I_tを支配する SDE

$$I_t=\left[\chi(\alpha_t=1)F(u_t)-\chi(\alpha_t=2)G\right]\mathrm{d}t \tag{10}$$

が導かれる．つぎに，SDE の各係数を指定する．まず，遊泳状態 ($k=1$) において

$$a(t,x,1)=V(t,x)-u \quad \text{かつ} \quad b(t,x,1)=b_0\sqrt{2\left(u_{\mathrm{M}}^2-u^2\right)^+} \tag{11}$$

とする．ここに，b_0は正定数である．係数$a(t,x,1)$は，単純に流速Vから遊泳速度uを差し引いたものである．係数$b(t,x,1)$は，遊泳速度uの大きさがその最大値u_{M}に近づくほど遊泳経路のぶれが少なくなるという実験的な観測結果 [5] と定性的に整合するように指定することが望ましいと考えている．また，休息状態 ($k=2$) においては魚類個体が

遡上を目的とした自発的な遊泳を行わないものの，その場に完全に停止するわけではないことを考慮し，正定数γを用いて

$$a(t,x,2)=0 \text{ かつ } b(t,x,2)=\gamma \tag{12}$$

とする．遷移行列Qの構成要素λおよびμを指定する．ここでは，疲労I_tが大きいほど遊泳状態から休息状態に遷移しやすく，逆に疲労I_tが小さいほど休息状態から遊泳状態に遷移しやすいという先験的な考察に基づくモデリングを行う．この考察に基づけば，λはI_tの増加関数，μは$-I_t$の増加関数として捉えることが出来る．一例としては，正定数λ_0とμ_0を用いて

$$\lambda=\chi(I_t\ge 0)\lambda_0 I_t,\quad \mu=-\chi(-I_t\ge 0)\mu_0 I_t \tag{13}$$

と出来る．なお，ヴァーテイカルスロット式魚道 (斐伊川本川にも存在：日登魚道) を対象とした模型実験結果によれば，魚類は魚道遡上時に流れの緩やかな部分において休息しつつ，突発的にプール間を遊泳して移動する．既往の実験結果からは，$\lambda >> \mu$ (λがμの 100 倍程度) となることが示唆される．ただし，一般河川においてはよくわかっていない．対象とする河川区間の流況や植生の有無などが複雑に関連し合っているものと推察される．つぎに，評価関数を設定する．上述の動的エネルギー最小化原理を遊泳と休息の 2 状態に拡張し，さらに疲労回復の効果を考慮すれば，評価関数を

$$\Phi(s,x,i,k)=\Phi^{(k)}=\sup_{u_{(\cdot)}\in\mathcal{U}}\mathrm{E}\left[-\int_s^T r_t\chi(\alpha_t=1)f(u_t)\mathrm{d}t+\int_s^T r_t\chi(\alpha_t=2)g\mathrm{d}t+r_T P(X_T)\right], \tag{14}$$

$$\tau=\inf\left\{t\,\middle|\,t>s, X_t\in\partial\Omega, X_s=x, I_s=i, \alpha_s=k\right\} \text{ および } T=\min\{\tau,\theta\} \tag{15}$$

と与えることが出来る．gは正定数で疲労の回復度をあらわす．係数r_tはカワウによる捕食を考慮するための評価関数の“割引率”であり，カワウによる捕食強度$R=R(t,x,\alpha_t)(\ge 0)$を用いて

$$(0<)r_t=\exp\left(-\int_0^t R(s,X_s,\alpha_s)\mathrm{d}v\right)(\le 1) \tag{16}$$

と与えられる．Pは上流端に到達することで得られる利益をあらわし，$P(0)=P_0=const(>0)$かつ$P(L)=0$を満足する一変数関数であり，それ以外の場合は 0 とする．直感的にはfおよびgは(10)にあらわれるFおよびGと同一視することが妥当かもしれない．RSDP に対する動的計画原理 [6] にしたがえば，拡張 Hamilton-Jacobi-Bellman 方程式系 (EHJBEs)

$$\frac{\partial\Phi^{(1)}}{\partial s}+\sup_{u\in U}\left[(V-u)\frac{\partial\Phi^{(1)}}{\partial x}+\frac{b^2}{2}\frac{\partial^2\Phi^{(1)}}{\partial x^2}+F\frac{\partial\Phi^{(1)}}{\partial i}-f-\lambda\Phi^{(1)}+\lambda\Phi^{(2)}-R\Phi^{(1)}\right]=0 \quad \text{in} \quad D \tag{17}$$

および

$$\frac{\partial\Phi^{(2)}}{\partial s}+\sup_{u\in U}\left[\frac{\gamma^2}{2}\frac{\partial^2\Phi^{(2)}}{\partial x^2}-G\frac{\partial\Phi^{(2)}}{\partial i}-\mu\Phi^{(2)}+\mu\Phi^{(1)}-R\Phi^{(2)}+g\right]=0 \quad \text{in} \quad D \tag{18}$$

が導かれる．

休息地点が水辺の茂みなどといった隠れ家となりうる場合にはカワウによる捕食圧が減少することが考えられる．この場合は，$R^{(1)}>R^{(2)}$と考えるのが自然である．ただし，休憩地点が水面に覆いのないカワウから目視で確認されやすい止水域であれば，むしろ$R^{(2)}\ge R^{(1)}$となる可能性がある．これには，堰直下流部の止水域などが該当する．したがって，係数$R^{(k)}$は休憩地点の種類により空間的に変化する．また，カワウは昼間に採餌行動をとり夜間に営巣地で睡眠をとることが知られている．そのため，夜間と比較して昼間の方が高い捕食圧となる，と考えるのが合理的である．すなわち，係数$R^{(k)}$は時間と空間の双方に依存する．昼夜におけるカワウの生態を考えれば，係数$R^{(k)}$は時間方向には周期的であると考えるのが妥当である．

EHJBEs には終端条件ならびに境界条件が課される必要がある．FおよびGは正値であるから，境界条件は

$$\Phi^{(1)}_{x=0}=P_0,\ \Phi^{(1)}_{x=L}=0,\ \left.\frac{\partial\Phi^{(1)}}{\partial i}\right|_{i=I_c}=0 \tag{19}$$

および

$$\Phi^{(2)}_{x=0}=P_0,\ \Phi^{(2)}_{x=L}=0,\ \left.\frac{\partial\Phi^{(2)}}{\partial i}\right|_{i=-I_c}=0 \tag{20}$$

と与えることが出来る．ここに，I_cはI_tの閾値であり，$|I_t|\ge I_c$では疲労度 (回復度) に変化がないことをあらわす．例えば，閾値以上の疲労は，閾値と同じ疲労として感じられることをあらわす．終端条件としては

$$\Phi^{(1)}_{s=T}=\Phi^{(2)}_{s=T}=0 \tag{21}$$

を課す．これは，終端時刻までに上流端に到達しなければ何の利益も得られないことをあらわす．

本短期研究員事業において，EHJBEs に対する有限要素法に基づく数値シミュレーション技法による数値解の算出が試みられた．数値解の定性的な挙動についての検討がなされているが，数値近似手法の収束性や安定性など，今後検討すべき事項が数多に存在する状況にある．

おわりに

本事業の研究では，水域ネットワークにおける輸送現象の数理モデリング，とりわけ魚類個体の遡上に関する数理モデリングを行った．とくに，魚類遡上を支配する新たな基礎方程式 (SDE, HJBE，EHJBEs) の導出，簡単化された条件下におけるそれらの数学解析を実施した．これらにより，魚類個体の遡上に関しては数理モデルの基礎確立がなされたものと考えられる．また，水環境や生態学に関する分野に現れる様々な問題がグラフ上の拡散過程や偏微分方程式系と関連づけられる事実を数学分野の方々と共有することが出来たことも，本事業の主要な成果であると考えられる．

本研究は未だ始まったばかりであり，数学的にも，実際的にも検討すべき項目に尽きない．数理モデリングに関する今後の課題としては，少なくとも以下の 3 項目が挙げられる．

- **時間的に非定常な問題に関する検討**

本研究では時間的な非定常性を許容する数理モデルを導きつつも，その解析において時間的な定常性を仮定した．これは解析解に基づいた議論により数理モデルの基礎的な性質を深く理解するためであった．当然であるが，現実の輸送現象は非定常的である．非定常問題において解析解を算出することは極めて困難であると予想されるため，もっぱら数値計算によるアプローチを行うことが有効である可能性は高い．ただし，系が分岐やカオス的な挙動を示さない比較的穏やかな解を有していれば，それは定常の解析解と何らかの意味で似た性質を有することが期待される．この意味で，本研究の成果は非定常問題の解析を行ううえで大いに役に立つものと考えられる．

- **複雑ネットワーク上の魚類遡上**

本研究では，1 次元区間および樹状というごく単純なグラフ上における魚類遡上を対象とした．日本国内では例が少ないものと思われるが，海外の巨大な河口デルタ網は大小複数の水路が複雑に接続し合う “複雑ネットワーク” とみなすことが可能であり，その中では様々な魚類の回遊が生じている．本研究が対象とした “遡上” を含め，そうした魚類は季節ごとに適地へ移動する回遊戦略を選択している．こうした回遊戦略は魚種により様々であることは示唆されているものの，個々の魚種が選択する戦略についてはほとんど明らかにされていないのが現状である．本研究で定式化した確率制御理論の応用により，こうした課題解決の活路が見いだせる可能性がある．多くの先行研究では概念的なレベルからのアプローチがなされているが，本研究が用いた確率制御理論とそれらの関連づけを行うことも，基礎と応用の双方において興味深い．

また，魚類遡上の他にも，交通流などのダイナミクスの解析はネットワーク上で定義される非線型偏微分方程式の求解に帰着されることが多い．“連結グラフ上の微分方程式”という枠組みにおいては，水環境・生態学的な分野はこうした一見して無関係にみえる研究分野とも深部で密に繋がっている．したがって，本研究で得られた成果は “連結グラフ上の微分方程式” を扱う他研究分野における諸問題の解決にも応用できる潜在的な可能性を秘めていると考えられる．

- **魚群ダイナミクス**

本研究では魚類個体の遡上を考えたが，実際の遡上は少なからず群れの単位で行われているようである．この意味において本研究で実施した数理モデリングは現実と多少乖離しているが，魚群ダイナミクスを記述する数理モデルを導くうえで必ず通るべき道であると考えられる．魚群ダイナミクスを確率制御理論に基づいて記述しうる数学的概念としては “平均場ゲーム”[7]が挙げられる．これは，無限数のエージェントからなる多体系の確率制御に関する概念である．平均場ゲームの枠組みにおける最適制御則の導出は，保存型および非保存型の退化放物型偏微分方程式から構成される系の求解に帰着される．流れに逆らい遊泳し上流端に辿り着くことで利益が得られるという基本原理にしたがう限り，これら支配方程式の型は本研究で対象とした HJBE から著しく離れはしないことが予想されるため，本研究で得られた研究成果を活かすことが出来ると考えられる．

引用文献

1. Yin, G.G. and Zhu, C. (2010) Hybrid Switching Diffusions, Springer Science + Business Media, LLC, pp. 1-67.
2. Yoshioka, H., Unami, K., and Fujihara, M. (2015a) Mathematical and numerical analyses on a Hamilton-Jacobi-Bellman equation governing ascending behaviour of fishes (邦題: 魚類の遡上行動を支配する Hamilton-Jacobi-Bellman 方程式の数理および数値解析), 数理解析研究所講究録, No. 1946, pp. 250-260.
3. Øksendal, B. (2003) Stochastic Differential Equations, Springer, pp. 21-259.
4. Fleming, W.H. and Soner, H.M. (2006) Controlled Markov Processes and Viscosity Solutions, Springer Science+Business Media, pp. 83-99.
5. 鬼束 幸樹，秋山 壽一郎，竹内 光，小野篤志 (2010) 流速変化が単独アユの遊泳特性に及ぼす影響，水工学論文集, Vol. 54.
6. Zhu, C. (2011) Optimal control of the risk process in a regime-switching environment, Automatica, Vol. 47, No. 8, pp. 1570-1579.
7. Lasry, J.M. and Lions, P.L. (2007) Mean field games, Japan Journal of Mathematics, Vol. 2, pp. 229-260.

研究成果

- ✓ Yoshioka H. and Shirai T.: On analytical viscosity solution to a 1-D Hamilton-Jacobi-Bellman equation for upstream migration of individual fishes in rivers, EMAC2015, December 6-9, Adelaide, Australia. (Abstract accepted on 2015/10/26)

(概要)
1次元的な定常開水路(網)流れにおける回遊魚個体の訴状を記述する制御確率過程モデルならびにその決定論モデル版を提示した．決定論モデルに付随し，所定の目的関数を最大化する最適遊泳速度を導く Hamilton-Jacobi-Bellman 方程式の解析解が有する様々な数学的性質を粘性解の観点から論じ，それらの生態学・生物学的な意味を論じた．この内容を拡張し，国際雑誌 The ANZIAM Journal への論文投稿が進められている．

上記の他にも，第21回計算工学講演会における田上准教授主催のオーガナイズドセッションでの講演発表ならびに講演論文投稿が予定されている．