

マス・フォア・インダストリ研究 No.25

# 解析から設計に向けた オフシエル数理学

編集 佐久間弘文  
大津 元一  
小嶋 泉  
福本 康秀

Institute of Mathematics for Industry  
Kyushu University

## About the Mathematics for Industry Research

The Mathematics for Industry Research was founded on the occasion of the certification of the Institute of Mathematics for Industry (IMI), established in April 2011, as a MEXT Joint Usage/Research Center – the Joint Research Center for Advanced and Fundamental Mathematics for Industry – by the Ministry of Education, Culture, Sports, Science and Technology (MEXT) in April 2013. This series publishes mainly proceedings of workshops and conferences on Mathematics for Industry (MfI). Each volume includes surveys and reviews of MfI from new viewpoints as well as up-to-date research studies to support the development of MfI.

October 2018

Osamu Saeki

Director

Institute of Mathematics for Industry

## **Off-Shell Mathematical Science Toward System's Analysis and Designing**

Mathematics for Industry Research No.25, Institute of Mathematics for Industry, Kyushu University  
ISSN 2188-286X

Editors: Hirofumi Sakuma, Motoichi Ohtsu, Izumi Ojima, Yasuhide Fukumoto

Date of issue: 28 March 2022

Publisher:

Institute of Mathematics for Industry, Kyushu University

Motooka 744, Nishi-ku, Fukuoka, 819-0395, JAPAN

Tel +81-(0)92-802-4402, Fax +81-(0)92-802-4405

URL <https://www.imi.kyushu-u.ac.jp/>

Printed by

Kijima Printing, Inc.

Shirogane 2-9-6, Chuo-ku, Fukuoka, 810-0012, Japan

TEL +81-(0)92-531-7102 FAX +81-(0)92-524-4411

# 解析から設計に向けたオフシエル数理学

編集 : 佐久間弘文  
大津 元一  
小嶋 泉  
福本 康秀

## 序文

光学分野においては、ナノテクノロジーの隆盛という時代の大きな潮流に呼応する形で、1980年代から後に、Nanophotonics（ナノ光学）と命名される事になる新たな研究の胎動が起こり始めた。ナノ光学とは何かという事を簡単に言えば、それは“小さな光”についての学問である。ここで重要になる要素は、“小さな光”と一口に括って見ても、その内容は大きく二つに分かれるという事である。一つは、既存の技術を組み合わせる事で、より“小さな光”を作り出し、それを制御する技術を開発するという事である。もう一つは、今までに知られていない現象や事実を新たに発見し、その基礎理論を整備し、それに基づいて応用技術を開発するというものである。本研究集会の組織委員の一人である大津元一ドレスト光子研究起点代表理事（東京大学名誉教授）は、ナノ光学において、後者に関する実験的研究を推進して来たパイオニアである。

大津氏は、2016年頃から、実験的研究に比べて大幅に遅れているドレスト光子現象の理論的解明の研究を加速する為に、新たな「ドレスト光子研究起点」という研究組織を立ち上げて、現在もその研究推進の総合的リーダーとして積極的に活躍している。九大IMI研究集会における活動は、今回で4回目となるが、その間、研究も着実に進展し続け、今では理論研究のみに留まらずに、理論研究を応用研究に繋げるために必要な、シミュレーション研究も量子ウォークモデルを中心に、飛躍的に発展しつつある段階へ入った様に思われる。ここ数年で、国際的にも知名度の高いモノグラフや解説論文集に新たな成果が次々と発表され、特に昨年は、若い研究員による論文発表も活発に行われた。このような研究活動は、九大IMIが目指す数理科学を産業の発展の為に役立てるという基本的方針と一致するものの、4回に渡るご支援をIMIから頂けた事は、ここまでのドレスト光子研究進展にとって、誠に大きな事であり、この場を借りて、IMIの関係各位に改めて感謝の意をお伝えする次第である。

研究代表者、佐久間弘文

# Contents

|                                                                                                                                                            |     |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 序文                                                                                                                                                         | i   |
| プログラム                                                                                                                                                      | iii |
| オフシェル科学理論のためのドレスト光子実験研究の進展<br>大津元一（ドレスト光子研究起点）                                                                                                             | 1   |
| ドレスト光子—自由光子の変換とナノ構造形成に関する考察<br>三宮俊（株式会社リコー 先端技術研究所）                                                                                                        | 19  |
| ドレストフォトンが関わる量子的散逸構造の理論<br>坂野斎（山梨大学工学部）                                                                                                                     | 29  |
| 量子ウォークの Comfortability<br>瀬川悦生（横浜国立大学）                                                                                                                     | 39  |
| ネットワーク量子ウォークモデルにおける迷路解決挙動<br>松岡雷士（広島工業大学）                                                                                                                  | 48  |
| 量子コヒーレンス・デコヒーレンス指標とその時間発展についての考察<br>（光合成の研究解析に向けて）<br>矢吹哲夫（北星学園大学 全学共通教育科目部門）                                                                              | 64  |
| A New Approach to Quantum Fields<br>Hayato Saigo (Nagahama Institute of Bio-Science and Technology)                                                        | 90  |
| C*- 代数的量子論におけるシュレディンガー描像<br>岡村和弥（ドレスト光子研究起点 / 名古屋大学）                                                                                                       | 124 |
| Semi-classical analysis between Newton-Maxwell equation and non-relativistic QED<br>廣島文生（九大数理） with Zied Ammari (Rennes I) and Marco Falconi (La Sapienza) | 133 |
| オフシェル物理における双対場の役割について<br>佐久間弘文（ドレスト光子研究起点）                                                                                                                 | 147 |
| 流体および MHD に対するネーターの第 1、第 2 定理と南部括弧<br>福本康秀（九州大学マス・フォア・インダストリ研究所）<br>Rong Zou（ハワイ大学土木・環境工学科）                                                                | 160 |
| ドレストフォトンの対称性とグラスマン多様体<br>落合啓之（九州大学マス・フォア・インダストリ研究所）                                                                                                        | 184 |

**解析から設計に向けたオフシェル数理科学**  
(Off-shell mathematical science toward system's analysis and designing)

日 時： 2022年2月22日（火） 10:00 ～ 15:45

2022年2月24日（木） 10:00 ～ 16:15

場 所： Zoom ミーティングによるオンライン開催

研究代表者： 佐久間弘文（一般社団法人ドレスト光子研究起点）



※プログラムは都合により変更になる場合がありますので予めご了承ください。  
最新情報はホームページをご覧ください。

2022年2月22日（火）

9:50 ～ 10:00

**開会の辞** 佐久間弘文 （ドレスト光子研究起点）

**セッションI：ドレスト光子研究概観**

10:00 ～ 10:45

**基調講演：大津元一**（ドレスト光子研究起点）

**演題：オフシェル科学理論のためのドレスト光子実験研究の進展**

講演概要：本講演ではドレスト光子（DP）に関する二つの本質的現象（DPの生成とエネルギー移動）に関する実験結果を提示し、オフシェル科学理論の裏付けとして供する。前者はシリコン発光ダイオードから出射する光が複数の光子からなり、かつ全体として光子アンチバンチングの特徴を示す実験結果である。これは佐久間が開拓したDP生成理論で裏付けられているスピン0のボゾン場に対応する。後者はファイバプローブの先端でのDP発生効率の実験結果である。これは瀬川により開発された量子ウォークモデルに基づく数値計算結果と整合しており、ファイバプローブ中のDPの自律的エネルギー移動の機構の解明に役立つと考えられる。

10:45 ～ 11:30

**民間セクターからの招待講演：三宮俊**（株式会社リコー 先端技術研究所）

**演題：ドレスト光子—自由光子の変換とナノ構造形成に関する考察**

講演概要：光を照射しながら化学的な加工やドーパントのアニール処理を行うことで自律的な構造形成が引き起こされ、この構造形成にドレスト光子が重要な役割を果たしていることが実験的に示されている。

る。一方、このような実験状況を説明する理論は未熟であり、デバイス設計やデバイス作製条件などの観点から、実用可能な理論の構築が期待されている。本発表では、これまで検討を進めてきたドレスト光子と自由光子の変換に関わる概念モデルを、ドレスト光子を介在したナノ構造形成に適用することを、数値シミュレーションを基軸に検討する。

11:30 ～ 12:15

**坂野 斎（山梨大学工学部）**

### **演題：ドレストフォトンが関わる量子的散逸構造の理論**

講演概要：フォトンブリーディング製作過程 [T. Kawazoe, M. A. Mueed and M. Ohtsu, Appl. Phys. B **104**, p. 747 (2011)] は、長い間発光デバイスに不向きであると信じられてきた間接遷移型半導体から発光ダイオードをつくることを可能にした。発表する理論はフォトンブリーディングデバイスからの発光を、非平衡熱力学の散逸構造の理論 [G. Nicolis and I. Prigogine, “Self-Organization in Nonequilibrium Systems”, Wiley (1977)] をモチーフに記述するものである。散逸構造は系内でのエントロピー生成と系外へのエントロピー散逸のバランスによって平衡から遠いところに現れる。量子版の散逸構造の理論構築のためには、元の理論から示唆されるように、非線形系かつ開放系を扱うことが必要になる。この理論は非相対論系の電磁量子力学の作用積分から出発し、内在ベクトルポテンシャル、つまり、ドレストフォトンにより非線形性を考慮し、また、因果律と反因果律の調整、及び、ゲージ関数の調整を行うことで開放系を記述する。

12:15 ～ 13:30

昼食休憩

## **セッションII：量子ウォークによるドレスト光子研究、比較研究としての光合成**

13:30 ～ 14:15

**瀬川 悦生（横浜国立大学）**

### **演題：量子ウォークの Comfortability**

講演概要：内部グラフに対して量子ウォークの打ち込みを続けることにより、そのグラフの表面から応答が得られる。この応答から、内部グラフの構造の情報を得ることができる場合がある。この研究ではさらに進んで、このグラフの量子ウォークによる「表面上の様子」だけではなく、その「内面」についても観察したい。そのための一つの手段として Comfortability という概念を導入し、量子ウォーカーが十分に時間経過したときに、どの位そのグラフに蓄積されているか、つまり、どのくらいこのグラフを居心地よく感じているかに着目する。すると、この量が量子ウォークによって誘導されるグラフのある幾何的な構造を表す量によって表現されることがわかったので、報告する。

14:15 ～ 15:00

松岡雷士(広島工業大学)

**演題：ネットワーク量子ウォークモデルにおける迷路解決挙動**

講演概要：量子ウォークモデルに基づくドレスト光子の自律的エネルギー移動の研究が進んでいる。本講演では迷路状に構成されたネットワーク上で時間発展させた量子ウォークが、あたかも迷路の最短経路を導き出すような挙動を示すことについて、最新の研究結果を報告する。数値計算の結果、最短経路に残留する振幅の絶対値はほぼ全て何らかの有理数で表現できることがわかっており、ネットワーク構造と対応する明確な数学的規則の存在が示唆される。

15:00 ～ 15:45

矢吹哲夫(北星学園大学経済学部)

**演題：量子コヒーレンス・デコヒーレンス指標とその時間発展についての考察（光合成の研究解析に向けて）**

講演概要：本講演では、1990年代にL.Mandelが提起した「Coherence and indistinguishability」を概観した後、近年研究が進んでいる「Purity of state」等の「量子コヒーレンス指標」について、独自に加えた「エントロピー指標」を含む4つの指標について行なった比較考察の結果を報告する。また、特にこの間（2020年、2021年）報告されている「Purity of state」の時間発展のシミュレーションによって見出されたその「回復」についての研究内容を紹介し、その結果について行なった考察を報告する。

2022年2月24日（木）

**セッションIII：量子場理論からの様々なアプローチ**

10:00 ～ 10:45

西郷甲矢人（長浜バイオ大学）

**演題：圏代数としての量子場**

講演概要：本講演においては、圏代数および圏上の状態の概念に基づく量子場への新しいアプローチを提起する。われわれは、量子場およびその状態を部分的に定義された対合構造をもつ「因果的な圏」の上の圏代数および状態として定義する。単に圏を用いるだけではなく圏代数と圏上の状態を用いることにより、圏論的構造としての相対性と非可換確率構造としての量子性を直接的に統合できる。代数的量子場理論や位相的量子場理論との概念的な関係性についても議論する。

10:45 ～ 11:30

岡村和弥(ドレスト光子研究起点/名古屋大学)

**演題：C\*-代数的量子論におけるシュレディンガー描像**

講演概要：C\*-代数的量子論におけるシュレディンガー描像について議論する。シュレディンガー描像では、

(系とその環境の)力学によって引き起こされる系の状態変化を扱う。ここでは、Dirac の遷移確率の概念が中心的な役割を果たします。遷移確率を用いてシュレディンガー像を圏論的に定式化する。さらに、遷移確率の理論を量子測定理論と結びつける。C\*-代数的量子論における、セクター理論と整合的な量子測定の公理的アプローチは、圏論的な設定における遷移確率の良い例を与える。

11:30 ～ 12:15

廣島文生(九州大学数理学研究院)

**演題：ニュートン・マクスウェル方程式を非相対論的 QED と連立させた準古典近似**

講演概要：古典的な電磁場と荷電粒子の相互作用を記述する運動方程式である Newton-Maxwell equation を場の量子論の模型から準古典近似で導く。初期データ  $(q, p, \forall \alpha(k))$  に対して Newton-Maxwell equation の解を  $(q(t), p(t), \forall \alpha(k, t))$  とする。 $(q, p, \forall \alpha(k))$  に  $(q(t), p(t), \forall \alpha(k, t))$  を対応させる写像をフローと呼ぶ。このフローを Wigner 測度を通じて導き出す。

12:15 ～ 13:30

昼食休憩

**セッションIV：ドレスト光子の新理論周辺の数理研究**

13:30 ～ 14:15

佐久間弘文（ドレスト光子研究起点）

**演題：オフシェル物理における双対場の役割について**

講演概要：「オンシェル場—オフシェル場」という対比においては、前者は「見えるもの」としての「図」、後者は「図」を「下支えする」「地」という見方が可能であると思われる。この見方は、着目する「物理系」とそれを記述する為に必須な「時空」という対比に例える事ができる。特に、相対論の文脈では、両者は相互に関わりあう、独特な“双対”関係を呈している事が知られているが、ここでは、その“双対”関係を再吟味する事で、如何なる「新たな見方」が可能であるかを議論する。

14:15 ～ 15:00

福本康秀（九州大学マス・フォア・インダストリ研究所）

Rong Zou（ハワイ大学土木・環境工学科）

**演題：流体およびMHDに対するネーターの第1、第2定理と南部括弧**

講演概要：変分原理において、粒子のラベル付け替え対称性に付随する保存量がトポロジカル不変量で、ネーターの定理は、理想流体と電磁流体（MHD）に対して、トポロジカル不変量はクロス・ヘリシティに限ることをいう。クロス・ヘリシティの定義は、速度場と凍結場(=渦度場)の内積の全領域にわたる体積積分である。これに対して、オイラー的位置の関数としてのラグランジュラベルの変分を用いた証明を与える。非正準ハミルトン形式では、トポロジカル不変量はカシミール（不変量）で、クロス・ヘリシティに加えて、総質量、総エントロピー、および磁気ヘリシティがカシミールである。全エネルギーをハミル

トニアンとし、4つのカシミールすべてを過不足なく用いて、理想流体およびMHDに対する南部括弧が構築できる。南部括弧から誘導されるリーポアソンプ括弧は既存のものの拡張で、クロス・ヘリシティがカシミール不変であることを自動的に保証する。また、ネーターの第2定理についても触れる。

15:00 ～ 15:45

**落合啓之（九州大学マス・フォア・インダストリ研究所）**

**演題：ドレストフォトンの対称性とグラスマン多様体**

講演概要：ドレストフォトンの対称性の記述を動機として、3つの整数パラメーター  $n, r, s$  に依存したリー群と等質空間の不変式論や軌道分解を与えた。オリジナルのドレストフォトンの場合  $(n, r, s) = (4, 2, 1)$  がその記述の応用として得られることも解説する。

15:45 ～ 16:15

**総合討論**

# オフシェル科学理論のための ドレスト光子\*実験研究の進展

(\*) Dressed photon (DP)

大津元一

一般社団法人 ドレスト光子研究起点



<http://jpn.rodrep.org/>

## 目次

### I 原理確認

### II DPの生成と測定の基本的な方法

### III 見出された新奇な現象

1. 相互作用の空間・時間特性
2. 単一光子での動作
3. DPの寸法の最大値
4. 発光ダイオード (LED)型デバイス、  
レーザー型デバイスとスピン0の光の発生

### IV まとめと今後

# 目次

## I 原理確認

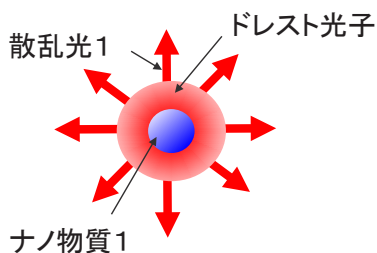
## II DPの生成と測定の基本的な方法

## III 見出された新奇な現象

1. 相互作用の空間・時間特性
2. 単一光子での動作
3. DPの寸法の最大値
4. 発光ダイオード (LED)型デバイス、  
レーザー型デバイスとスピン0の光の発生

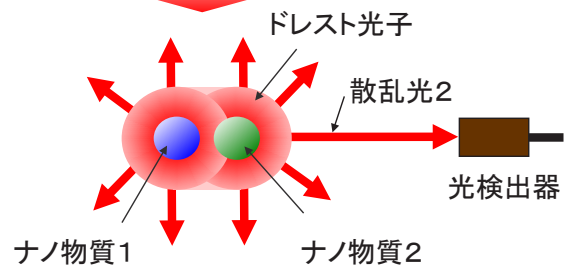
## IV まとめと今後

## ドレスト光子(DP) (その生成と測定)



DPはナノ物質の境界面（物質の表面など）に生成し、局在。

ナノ物質の寸法  
寸法  $\Delta x (\approx a) \ll \lambda$  (入射光の波長)



DPは近接するナノ物質間で双方向に移動（二つのナノ物質はDPを介して**相互作用**）。

場の破壊測定

## DPをどのように記述してきたか？

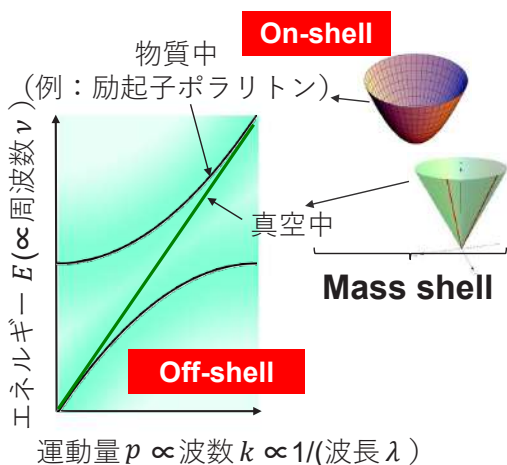
5

DPの寸法  $\Delta x (\approx a) \ll \lambda$  (入射光の波長)



ナノ物質の寸法

不確定性原理  $\Delta p \cdot \Delta x \geq \hbar \Rightarrow \Delta p \gg p$  ( $\Delta k \gg k$ )



### 記述の際の問題

- ・ off-shellの電磁場に起源をもつ「変形した光子の場」

さらに (一般論として)

- ・ 光・物質相互作用 (DPの生成に関わる) を誘起するには縦波のクーロンモードが関与【Ojima】(2006)。

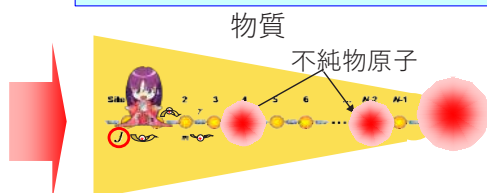
## DPをどのように記述してきたか？ (続き)

6

これまでの応急策：On-shell科学の理論手法を借用。

(フーリエ変換) 電磁場をモードの重ね合わせで表現し、それがナノ物質中の無限数のエネルギー準位の電子 (励起子) と相互作用。

光子は電子 (励起子) のエネルギーの衣をまとう(dress)



さらにDPはフォノンと相互作用、結合



# DPとは何か？その起源は？---Off-shell科学---

7



## ドレスト光子 (DP)

- ・ 光照射時の光・物質**相互作用**により生成された量子場。
  - ・ ナノ粒子に局在、その寸法は照射光波長より小さい。
- さらに
- ・ この量子場には**相互作用**を誘起する**縦波**のクーロンモードが関与。

DP = **off-shell**の電磁場に起源

## On-shell科学：通常の伝搬光（上記の照射光）

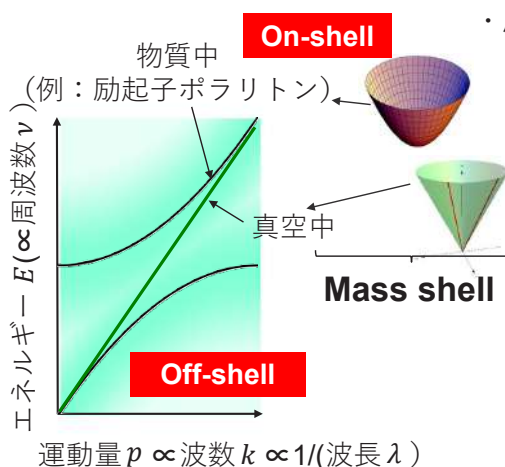
- ・ 光波長以上の巨視的領域にて観測可能な**on-shell**の電磁場。
- ・ 横波の光子。（縦波は非物理量と考えて排除）

## 相互作用を扱うには

- ・ **【Ojima】** (2006)の指摘に注意：  
縦波は非粒子モードとして物理的意味を持ち、**相互作用**に関わるクーロン力に関連。
- ・ 「**相互作用**」、「**縦波**」を扱う科学、理論が必要 = **Off-shell科学** → 佐久間理論

## On-shell vs. Off-shell

8



- ・ 原理・・・**相互補完**、重複無し
- ・ ∴現象・・・異なる
- ・ しかし
- ・ 応用技術・・・一部重複

On-shell科学



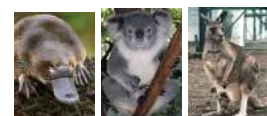
Off-shell 科学

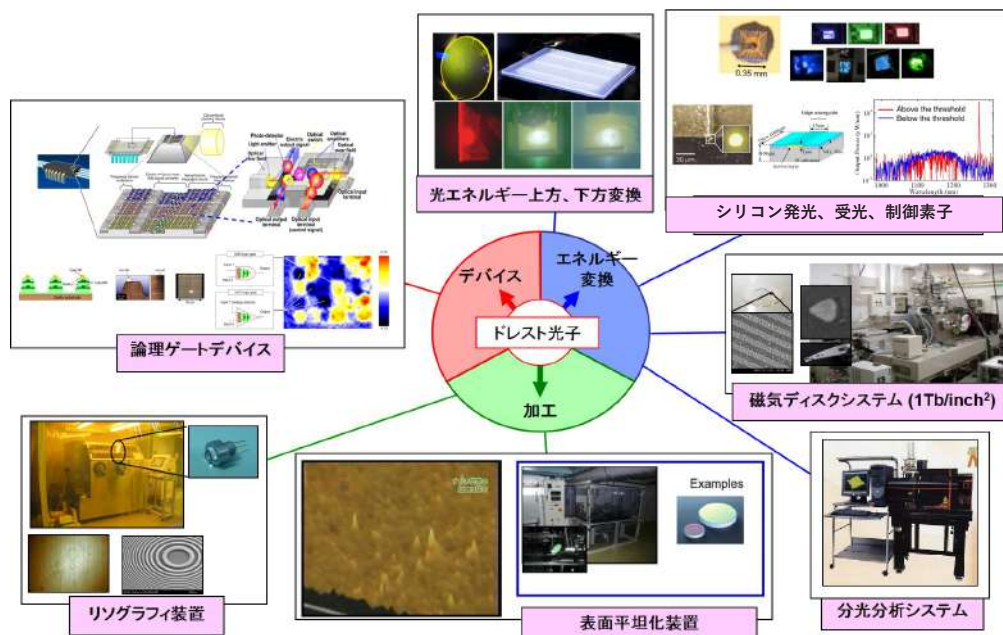


DPの寸法  $\Delta x (\approx a) \ll \lambda$  (入射光の波長)

↓ ナノ物質の寸法

不確定性原理  $\Delta p \cdot \Delta x \geq \hbar \Rightarrow \Delta p \gg p \ (\Delta k \gg k)$





## 目次

### I 原理確認

### II DPの生成と測定の基本的な方法

### III 見出された新奇な現象

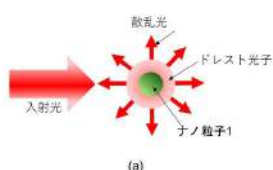
1. 相互作用の空間・時間特性
2. 単一光子での動作
3. DPの寸法の最大値
4. 発光ダイオード (LED)型デバイス、  
レーザー型デバイスとスピン0の光の発生

### IV まとめと今後

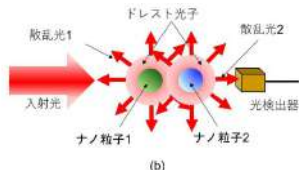
# ファイバプローブを使う

11

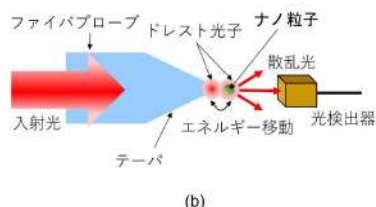
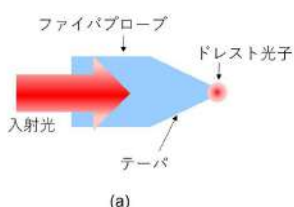
## DPの生成



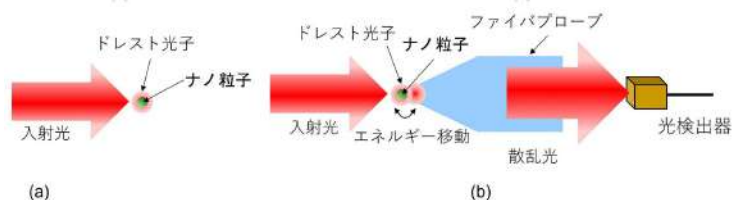
## DPの測定



## Iモード (Illumination)

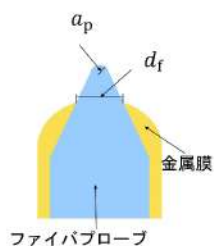
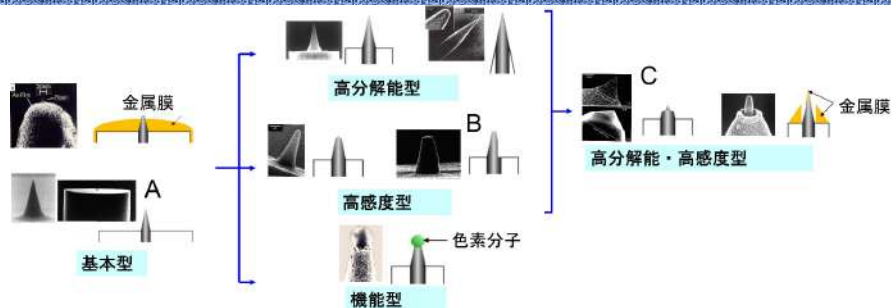


## Cモード (Collection)

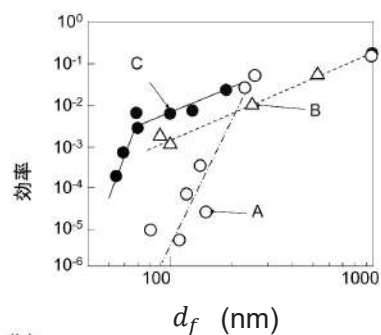


# ファイバプローブの実際と性能比較

12

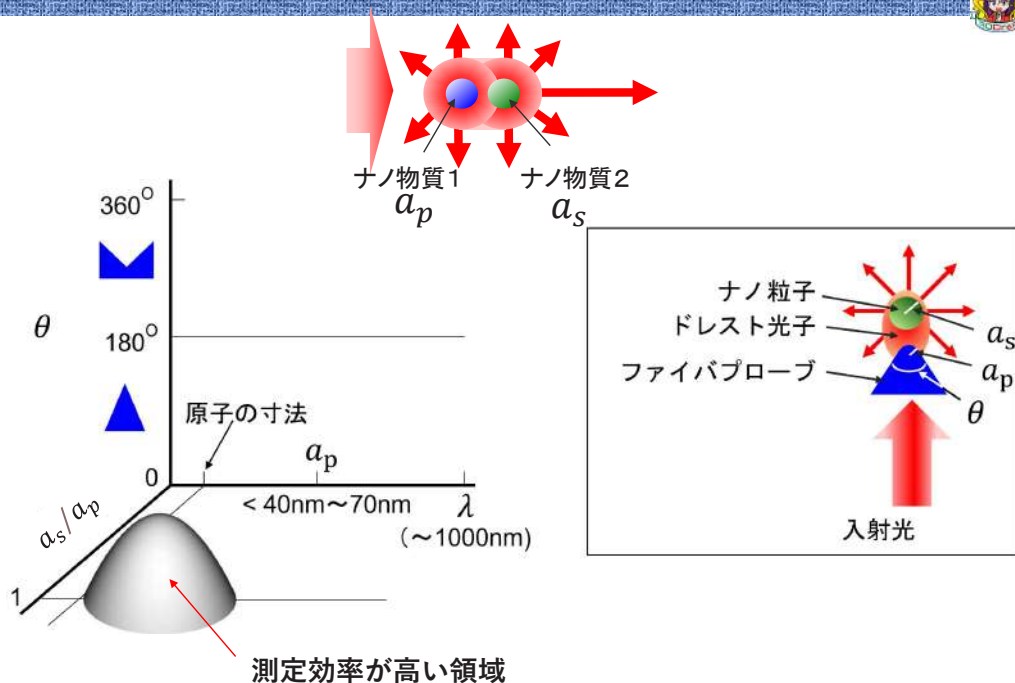


(a)



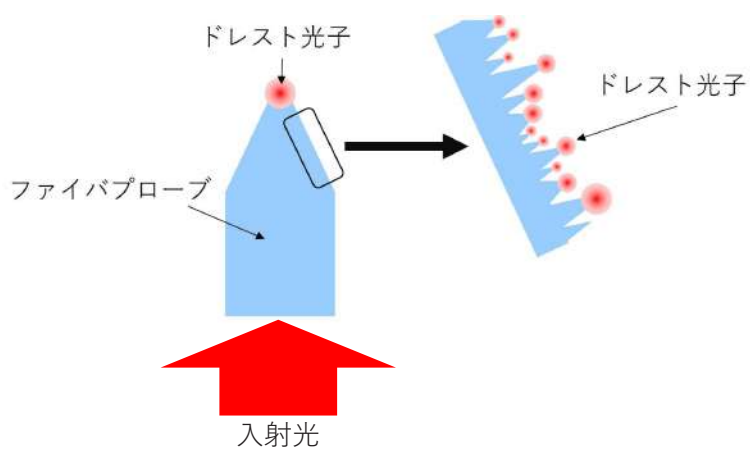
## 測定の効率

13



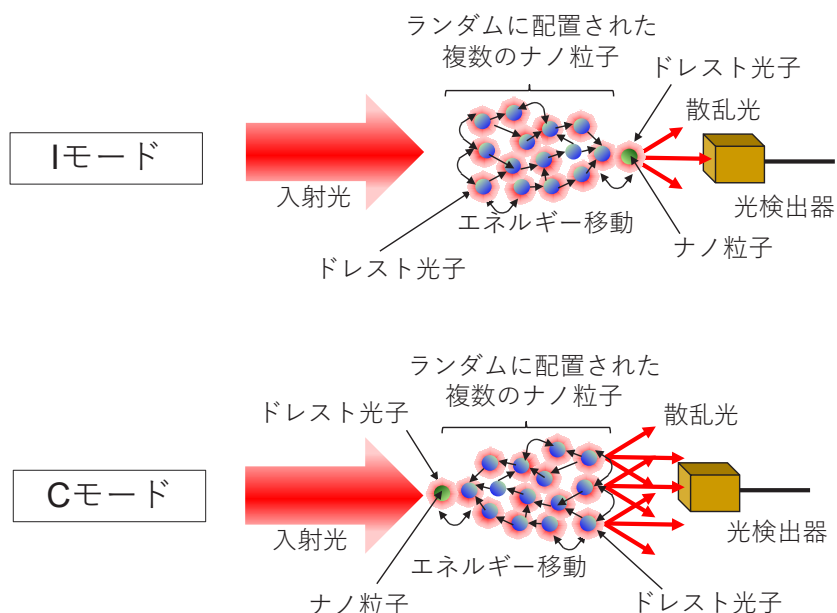
## DPの階層性：測定距離に依存

14



## 不規則配列のナノ粒子を使う

15



16

## 目次

### I 原理確認

### II DPの生成と測定の基本的な方法

### III 見出された新奇な現象

1. 相互作用の空間・時間特性
2. 単一光子での動作
3. DPの寸法の最大値
4. 発光ダイオード (LED)型デバイス、  
レーザー型デバイスとスピン0の光の発生

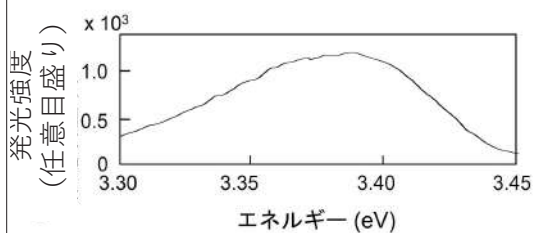
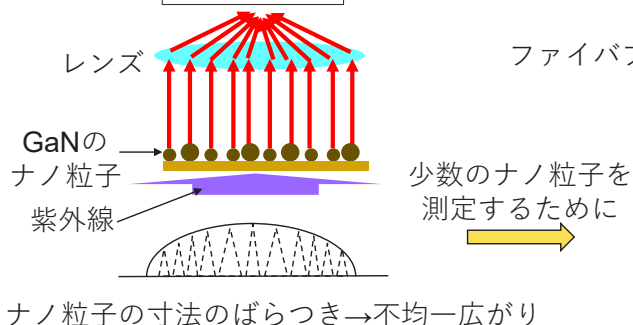
### IV まとめと今後

## DPエネルギー移動の選択性、非線形性

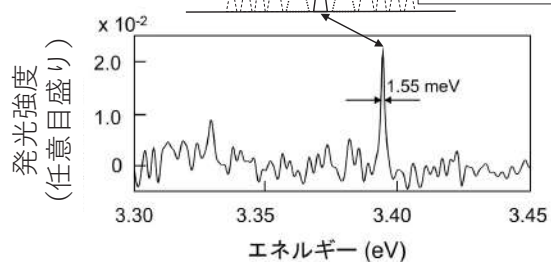
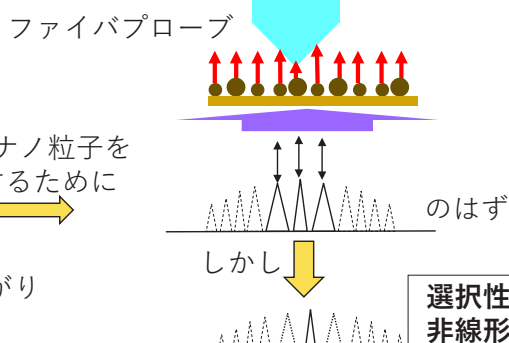
17



遠方で測定



近くで測定

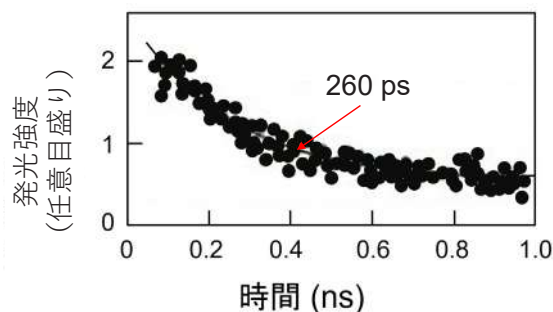
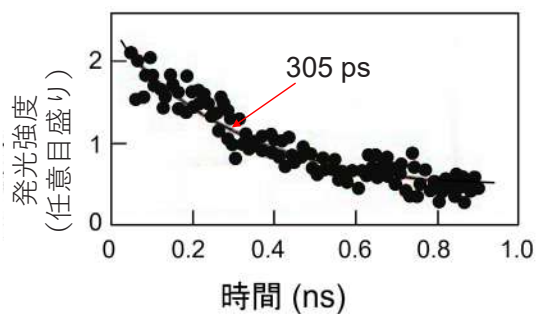
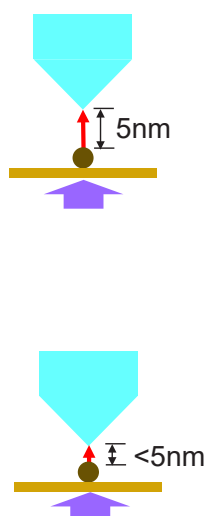
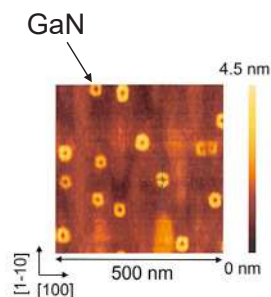


## DPエネルギー移動の距離依存性

18

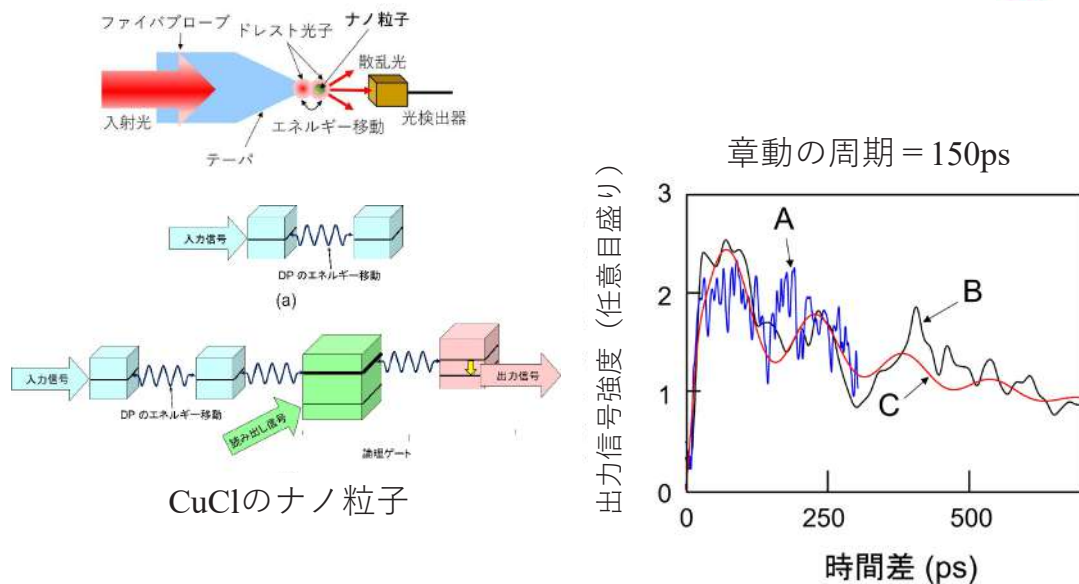


最低励起準位は  
電気双極子禁制。  
しかし発光。



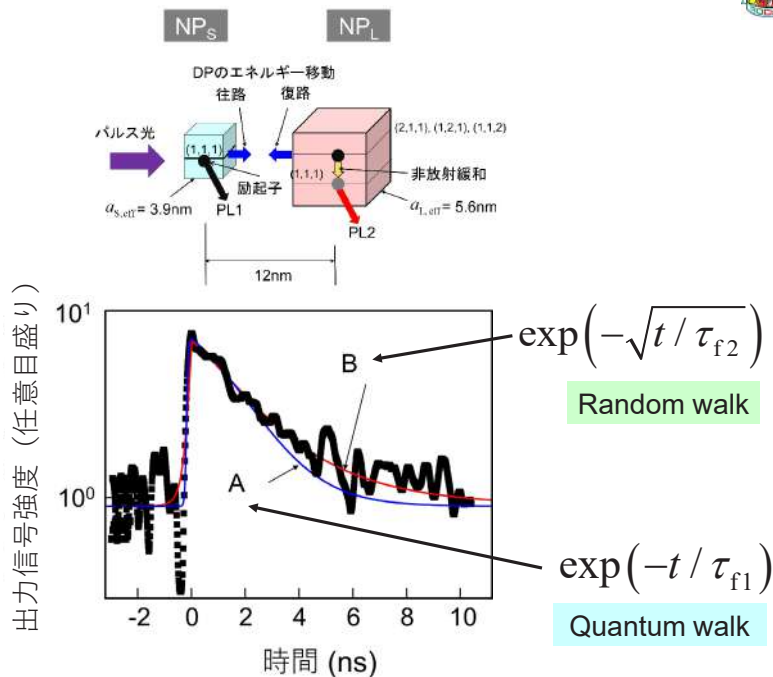
## DPエネルギー移動の双方向性

19



## DPエネルギー移動： Random walkでよい？

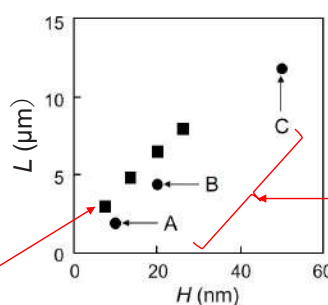
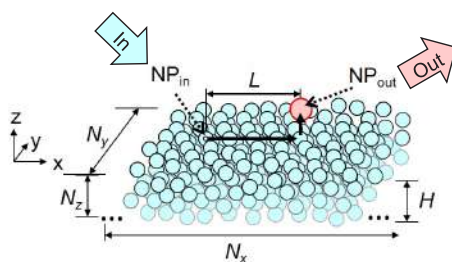
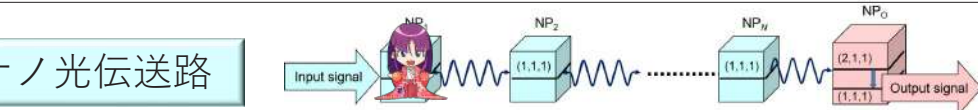
20





ナノ粒子 (NP) は固定、その間をDPのエネルギーが移動する系

ナノ光伝送路



実験  
(CdSeのNP)

発生する伝搬光のパワーが最大になるよう、DPはそのエネルギー移動経路を自律的に選択

自律的に結果へと至る

## 目次

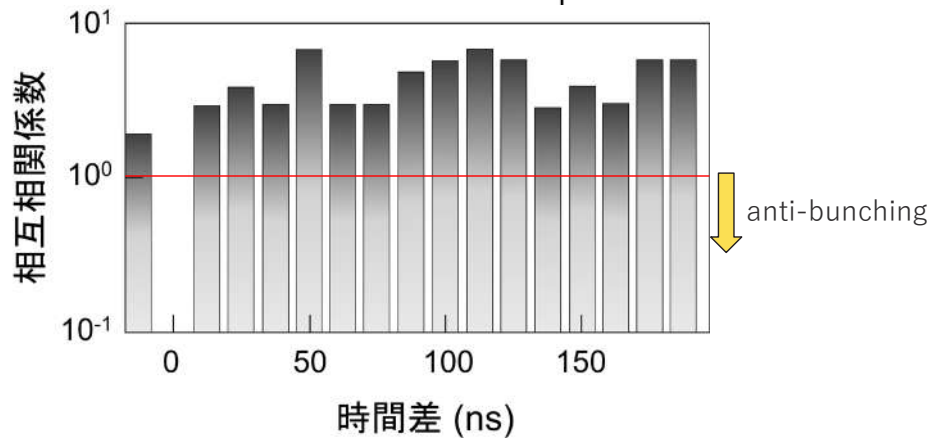
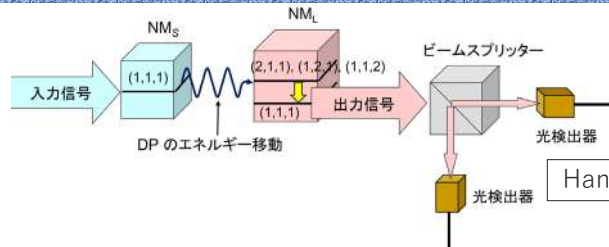
### I 原理確認

### II DPの生成と測定的基本的方法

### III 見出された新奇な現象

1. 相互作用の空間・時間特性
2. 単一光子での動作
3. DPの寸法の最大値
4. 発光ダイオード (LED)型デバイス、  
レーザー型デバイスとスピンの光の発生

### IV まとめと今後



## 目次

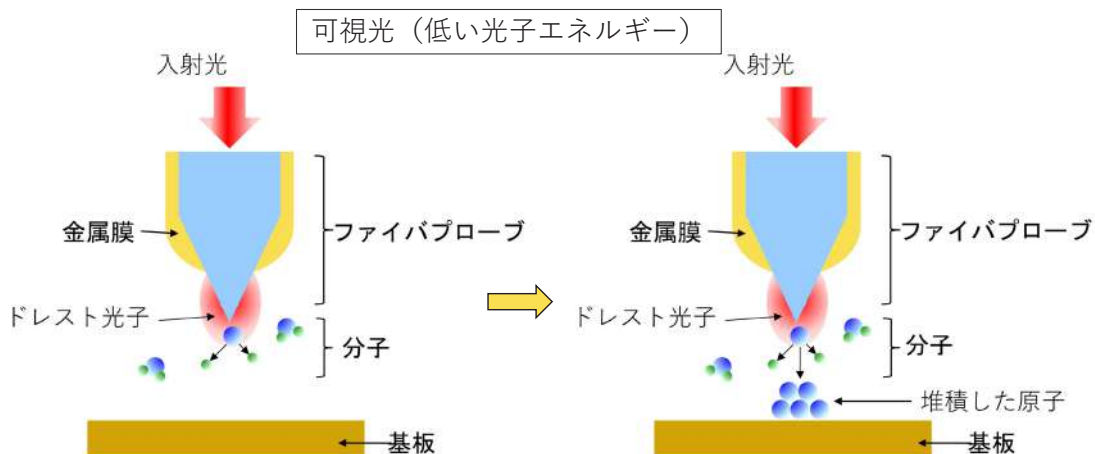
### Ⅲ 見出された新奇な現象

1. 相互作用の空間・時間特性
2. 単一光子での動作
3. DPの寸法の最大値

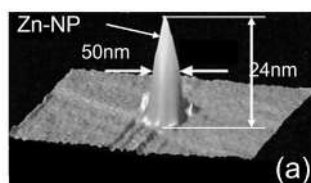
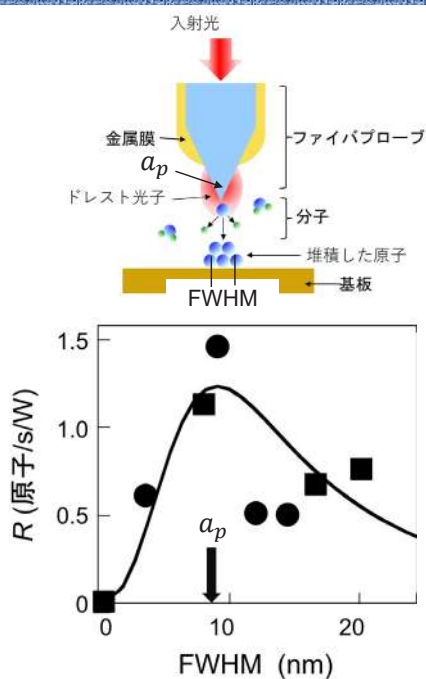
#### 佐久間理論

##### 【DPの寸法の最大値】

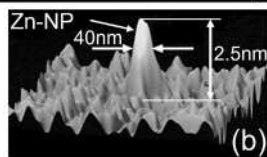
- ・ DP場の空間的広がり（湯川関数）を表す正の定数 $\kappa_r$ の最小値は $\kappa_0$ 。
- ・  $(\kappa_0)^2$ は離散的なエネルギーの量子に相当
- ・ DP の最大寸法は $1/\kappa_0$  (DP定数) ・ ・ Heisenbergカット



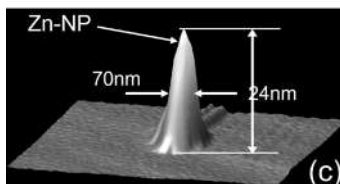
結果



分子： DEZn  
光源波長： 488 nm



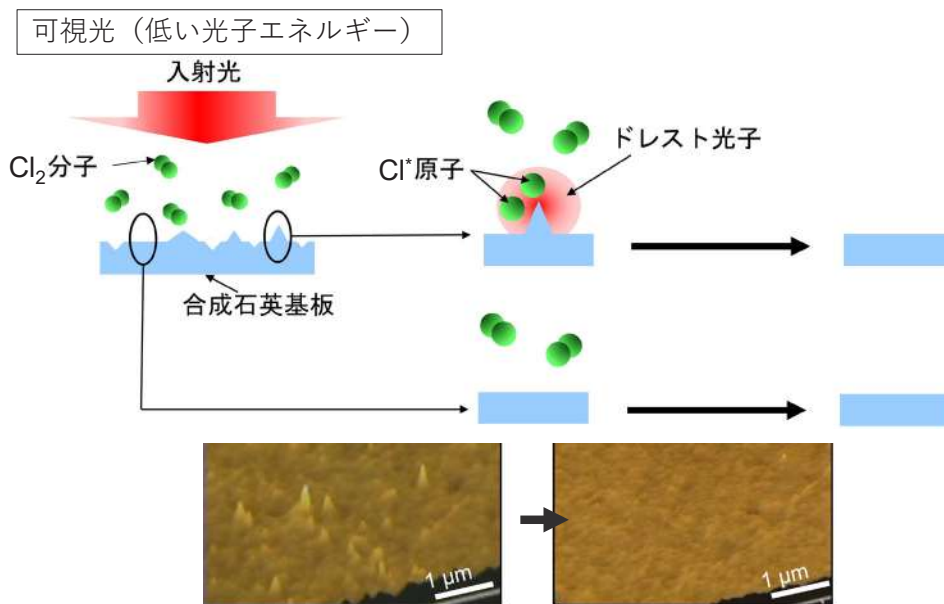
分子： DEZn  
光源波長： 684 nm



分子：  $\text{Zn}(\text{acac})_2$   
光源波長： 457 nm

DPの寸法の最大値 = 40～70 nm

# 自律的エッチングによる物質表面平坦化の実験による推定 :27 原理



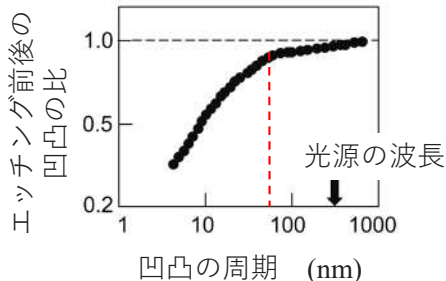
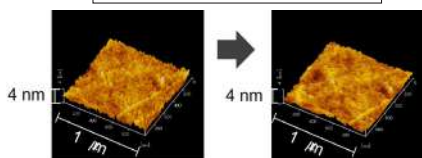
## 結果

28



可視光（低い光子エネルギー）

DPを使った方法

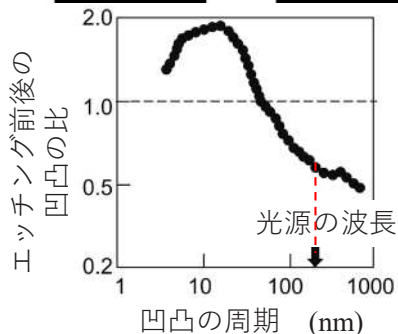
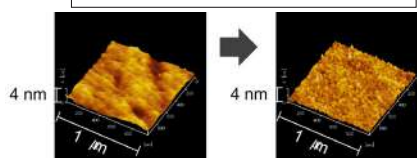


波長以下が平坦化

DPの寸法の最大値 = 40~70 nm

紫外線（高い光子エネルギー）

伝搬光を使った方法



波長以上が平坦化

# 目次

## Ⅲ 見出された新奇な現象

### 4. 発光ダイオード (LED)型デバイス、 レーザー型デバイスとスピン0の光の発生

#### 佐久間理論

【DPから発生した伝搬光は普通の光とは違う】

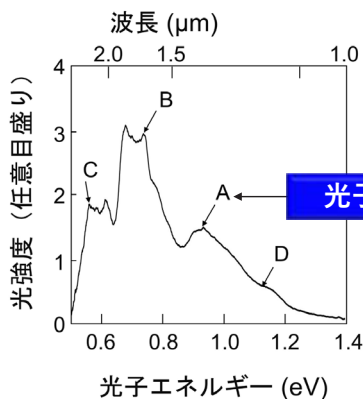
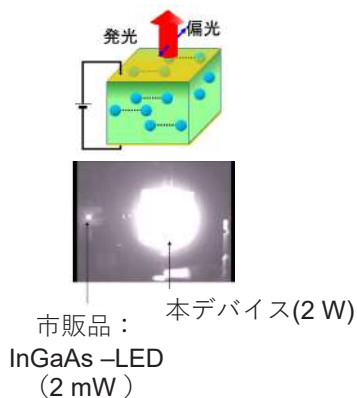
- ・ DP場のスピンの場合、それが脱励起・発生した伝搬光のスピンも0。
- ・ スピン0の粒子が近接しているとそのクラスターはエネルギーの蓄積された単一粒子（弾丸）として振る舞う。

→LED, レーザーの光とは異なる、新しい光。

## LED型のSi光デバイス ( $\lambda_{em}=1.2-1.3 \mu m$ )

### 新奇な現象

DP援用アニールを施されたSi結晶は間接遷移型半導体にもかかわらず、高い光パワーを放出する光デバイスとなる。



### 新奇な現象

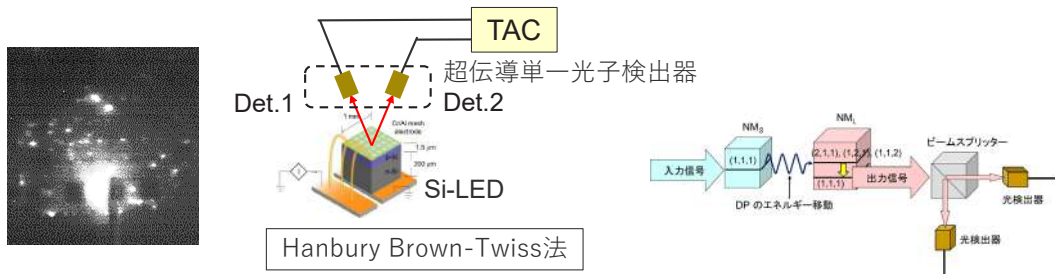
発光の光子エネルギー ( $\neq$  Siのバンドギャップエネルギー)  
= DP援用アニールの際の照射光の光子エネルギー

## スピン0のDP場から発生した伝搬光の特性測定 31



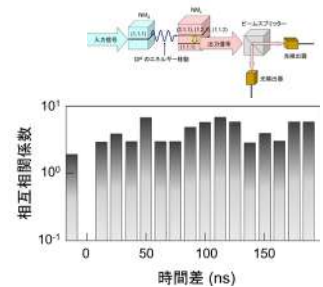
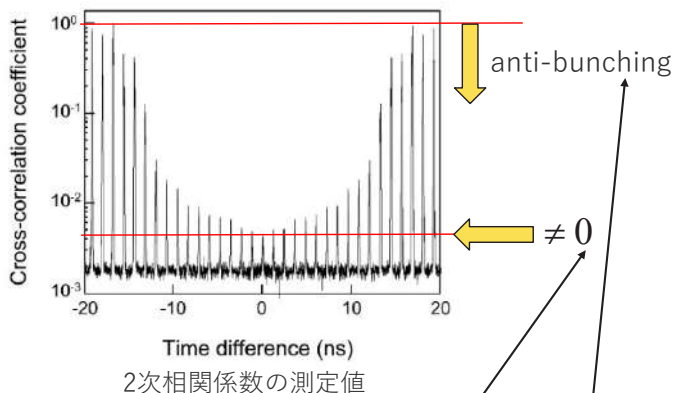
- LED型のSi光デバイス \*表面付近の複数の微小輝点からの発光のパルス列を測定。

(\*) 直流電流注入時の発光はパルス列 (幅: 約50ps, 繰り返し: 約1GHz)



- 接近した複数の微小輝点から発生する光のパルス列を測定。
- 微弱な単一光子の計測ではない。  
光子クラスターを測定。しかし・・・

## スピン0のDP場から発生した伝搬光の特性測定 32



- LED型のSi光デバイス中の近接した複数の輝点から発生する光子に起因。
- それらが近接しクラスターとなっているので単一光子のように振る舞う。

DPクラスター光 ← スピン0粒子の局在性に関係

### 新奇な現象

- スピン0の粒子が近接しているとそのクラスターはエネルギーの蓄積された単一粒子 (弾丸) として振る舞う→LED, レーザーの光とは異なる、新しい光。

# 目次

## I 原理確認

## II DPの生成と測定の基本的な方法

## III 見出された新奇な現象

1. 相互作用の空間・時間特性
2. 単一光子での動作
3. DPの寸法の最大値
4. 発光ダイオード (LED)型デバイス、  
レーザー型デバイスとスピン0の光の発生

## IV まとめと今後

## 新理論による裏付け



### 【DPの発生の機構】

- ・ timelike Majorana粒子・反粒子の対が生成した後、それが消滅すると boson場が生まれる。これがDP！

### 【DPの寸法の最大値】

- ・ DP場の空間的広がり（湯川関数）を表す正の定数 $\kappa_r$ の最小値 $\kappa_0$ の逆数 $1/\kappa_0$   
 ・ ・ ・ DP の最大寸法

### 【DPから発生した伝搬光は普通の光とは違う】

- ・ スピン0の粒子が近接し、そのクラスターはエネルギーの蓄積された単一粒子（弾丸）として振る舞う。  
 →LED, レーザーの光とは異なる、新しい光。

## 発生したDPのエネルギー移動の時空特性は？

35

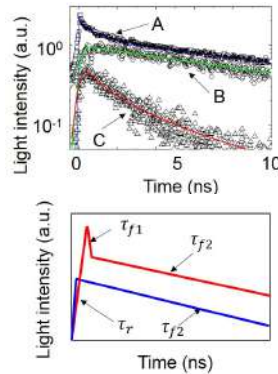
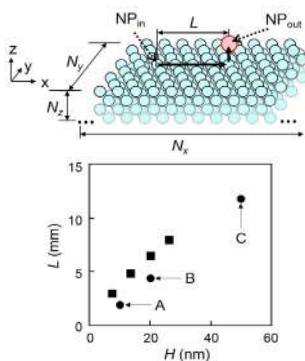


- ・発生したDPは、近隣のナノ粒子に跳躍（DPのエネルギーは近隣のナノ粒子に移動）
- ・この移動はナノ粒子間での光・物質相互作用によるエネルギーの授受。

実験によると

### 新奇的な現象

DPの移動には階層性がある。 } 空間  
 DPはナノ物質間を自律的に移動。 }  
 DPのエネルギー移動の時間変化はランダムウォーク過程のそれより急速。 } 時間



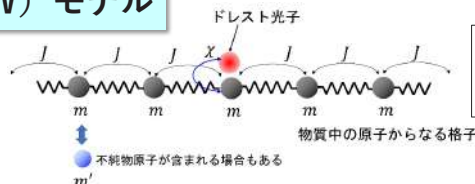
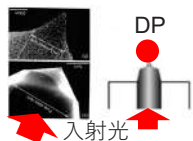
## 発生したDPのエネルギー移動の時空特性は？

36

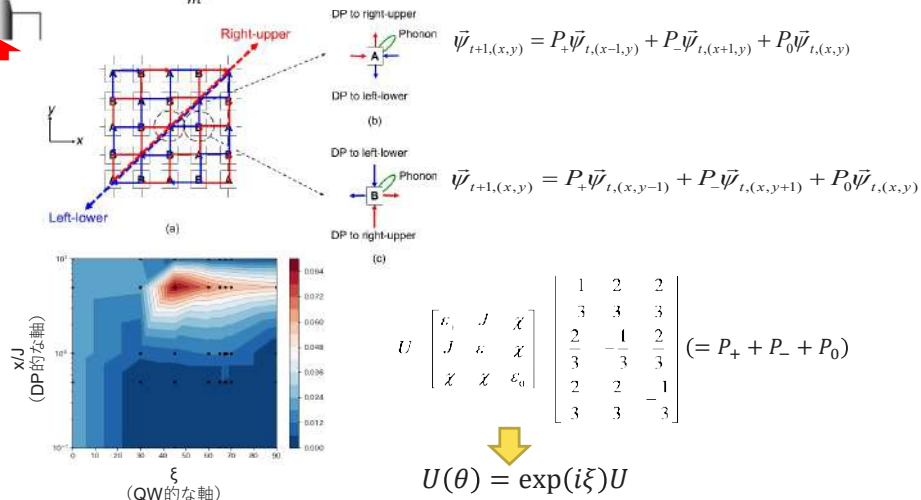


### 量子ウォーク（QW）モデル

ファイバプロープ



$$\vec{\psi}_{t,(x,y)} = \begin{bmatrix} y_{DP+} \\ y_{DP-} \\ y_{Phonon} \end{bmatrix}_{t,(x,y)}$$



九州大学IMI共同利用・共同研究拠点【研究集会】  
解析から設計に向けたオフシェル数理科学

**RICOH**  
imagine. change.

民間セクターからの招待講演:

## ドレスト光子ー自由光子の変換とナノ構造形成に関する考察

### Considerations on Dressed and Free Photon Conversion and Nanostructure Formation

株式会社リコー 先端技術研究所 HDT研究センター  
三宮 俊

Human Digital Twin Institute,  
Advanced Technology R&D Division, Ricoh Co., Ltd.  
Suguru Sangu

2022/2/22,24

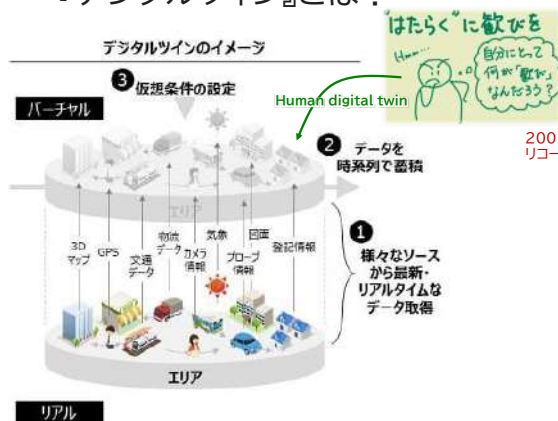
解析から設計に向けたオフシェル数理科学 (Zoomミーティング)

1

## リコーでの仕事、ドレスト光子研究との関わり

**RICOH**  
imagine. change.

### 『デジタルツイン』とは？



<https://www.accenture.com/jp-ja/insights/public-service/digitaltwin-city>

2022/2/22,24

解析から設計に向けたオフシェル数理科学 (Zoomミーティング)

### リコーでの研究履歴



赤枠: 三宮が関わる／関わったもの

2

1. DP-FP変換の仮説(Symmetry論文概説)
2. 不純物を含む系の数値シミュレーションモデル
3. シミュレーション結果の考察
  - (a)不純物配置とDPの局在状態
  - (b)誘導放出の効果について
4. 不純物の自律的最適配置の再現に向けて
5. まとめ

2022/2/22,24

解析から設計に向けたオフシェル数理科学 (Zoomミーティング)

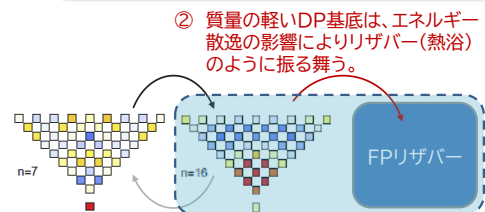
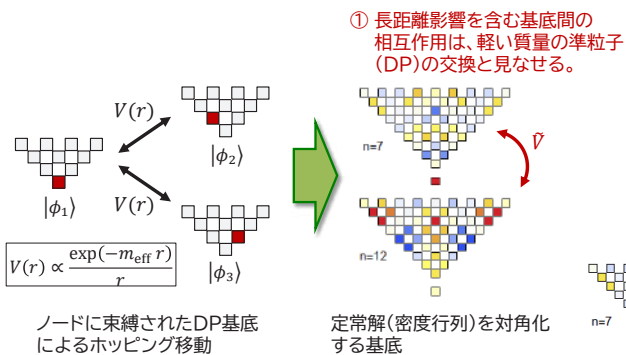
3

## ■ 1. DP-FP<sup>(※)</sup>変換の仮説(Symmetry論文概説)

※DP:ドレスト光子、FP:自由光子

- DPを表わす基底状態の検討

### 2Dティーパープローブの計算例



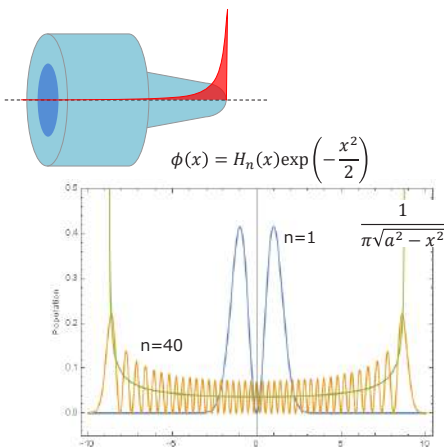
2022/2/22,24

解析から設計に向けたオフシェル数理科学 (Zoomミーティング)

4

## ■ 逆正弦法則との対応

RICOH  
imagine. change.



### ■ 本論理展開の起源(西郷先生の推論)

- 逆正弦法則における端部の振る舞いと、ドレスト光子の局在現象のアナロジー  
→ 境界の形状を反映した、高励起状態を含む様々な基底状態の混合状態としてDPを表現した。
- 逆正弦関数の幅(定義域)の広いものがFP的  
→ 大きな空間分布をもつ基底とエネルギー散逸(FPリザーバー)とを対応付けた。
- 量子古典対応?  
→ 大きな空間分布をもつ基底を介したデコヒーレンスにより、古典的な描像に繋がっている?

初期の目論見には、だいぶ近づくことができたのでは？

Ex. 調和振動子の高次モード

2022/2/22,24

解析から設計に向けたオフショール数値科学 (Zoomミーティング)

5

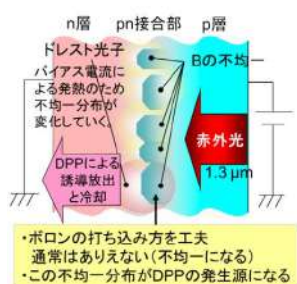
## ■ 2. 不純物を含む系の数値シミュレーションモデル

RICOH  
imagine. change.

- ドレスト光子特有の現象(エンジニアリング側)を現行モデルで定量的定性的に記述できないか？

### DPP(※)援用アニール

※ DPP=Dressed Photon Phonon



- ・ボロンの打ち込み方を工夫  
通常はありえない(不均一になる)
- ・この不均一分布がDPPの発生源になる

Fig. 2-8 DPP 援用アニール加工前

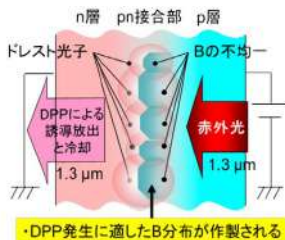


Fig. 2-9 DPP 援用アニール加工後

田中肇,「ドレスト光子フォノンを用いた pnホモ接合 Si赤外レーザー」, 東京大学 (2015) 博士論文

2022/2/22,24

解析から設計に向けたオフショール数値科学 (Zoomミーティング)

6

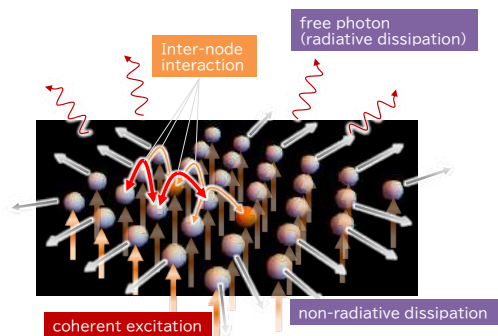
## ■ 不純物を含む系のシミュレーションモデル

**RICOH**  
imagine. change.

まず、不純物を含む系におけるDPの特徴的な振る舞いを押さえることを目的とする。

### ■ 本発表で採用するモデル

- 各ノードはDP(束縛された準粒子)の意味
  - フォノンの影響については今後改めて検討
- 物質の表現
  - 2次元物質を仮定
  - 不純物を1個または2個、自由に配置
- DPエネルギー移動
  - 同種または異種粒子間で異なる結合強さ
- エネルギー散逸
  - DPとして、2次元境界面(線)で非輻射散逸
  - FPとして、全てのノードから輻射散逸
    - 誘導放出なし/あり、それぞれを計算
- 入力は、全てのノードをコヒーレントに励起



サイト間の結合強さ:

$$V(r) = V_0 \exp(-\mu r)$$

$$V_0 = \begin{cases} 1 & (\text{同一粒子間}) \\ 0.5 & (\text{異種粒子間}) \end{cases}$$

2022/2/22,24

解析から設計に向けたオプティカル数理学 (Zoomミーティング)

7

## ■ 量子密度行列を用いたダイナミクスの記述

**RICOH**  
imagine. change.

### ■ 量子マスター方程式

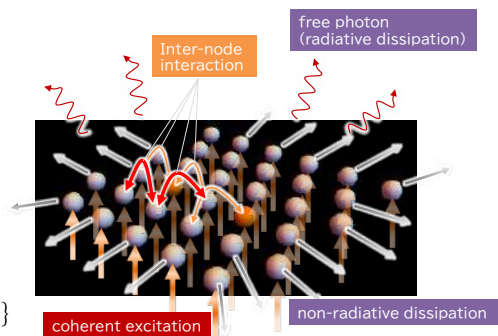
$$\begin{aligned} \frac{d\hat{\rho}(t)}{dt} \approx & \frac{i}{\hbar} \left[ \hat{\rho}(t), \hbar \sum_{i \neq j} V_{ij} (|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|) (\hat{A}_i^\dagger \hat{A}_j + \hat{A}_i \hat{A}_j^\dagger) \right] \\ & + \frac{i}{\hbar} \left[ \hat{\rho}(t), \sum_i \mu_i(t) (\hat{A}_i^\dagger + \hat{A}_i) \right] \\ & + \frac{\gamma_{nr}}{2} \sum_{i,j=(\text{edge})} \{ 2\hat{A}_i \hat{\rho}(t) \hat{A}_j^\dagger - \hat{A}_i^\dagger \hat{A}_j \hat{\rho}(t) - \hat{\rho}(t) \hat{A}_i^\dagger \hat{A}_j \} \\ & + \frac{\gamma_r}{2} \sum_{i,j} \{ 2\hat{A}_i \hat{\rho}(t) \hat{A}_j^\dagger - \hat{A}_i^\dagger \hat{A}_j \hat{\rho}(t) - \hat{\rho}(t) \hat{A}_i^\dagger \hat{A}_j \} \end{aligned}$$

① 格子点間(湯川型)相互作用

② 外場によるコヒーレント励起

③ 境界部への散逸(Lindblad型)

④ 自由光子場への散逸(Lindblad型)



各種パラメータ値

$$\begin{aligned} V_{i,i+1} &= 1.0 (\text{最隣接}) \\ \mu_i &= 1.0 \\ \gamma_{nr} &= 10, \quad \gamma_r = 0.01 \end{aligned}$$

2022/2/22,24

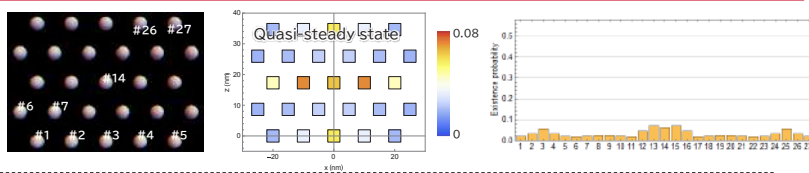
解析から設計に向けたオプティカル数理学 (Zoomミーティング)

8

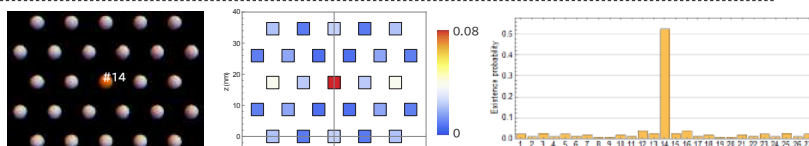
### 3. シミュレーション結果の考察 (a) 不純物配置とDPの局在性

**RICOH**  
imagine. change.

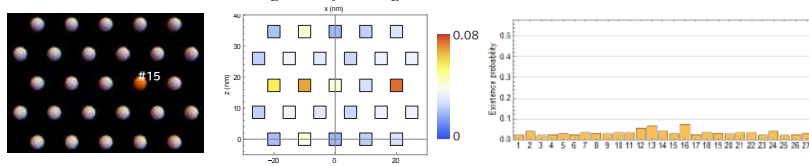
欠陥なし



1欠陥(中央)



1欠陥(非対称)



2022/2/22,24

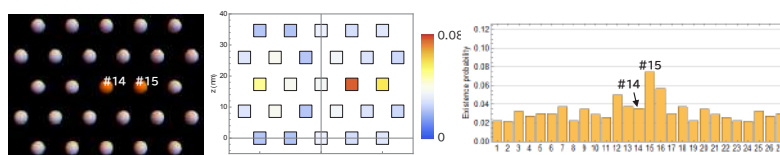
解析から設計に向けたオプショナル数理科学 (Zoomミーティング)

9

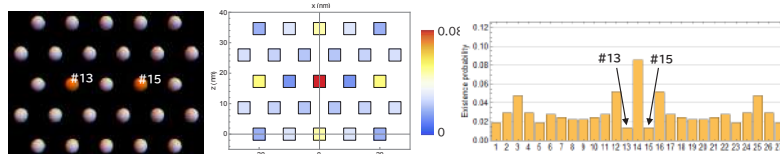


**RICOH**  
imagine. change.

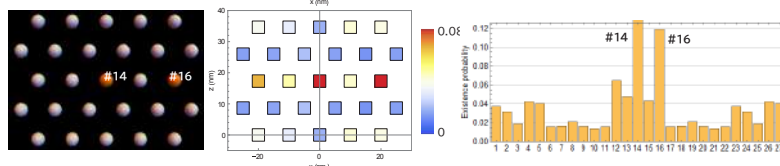
2欠陥(連続、非対称)



2欠陥(間欠、対称)



2欠陥(間欠、非対称)



2022/2/22,24

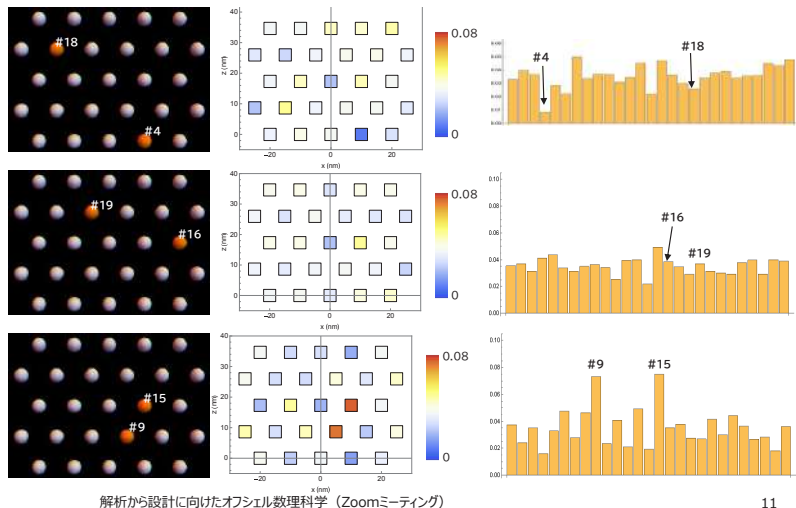
解析から設計に向けたオプショナル数理科学 (Zoomミーティング)

10



## 2欠陥(ランダム)

不純物位置や距離による  
DP局在状態の変化は見  
られるが、いまのところ  
法則性は掴めていない。



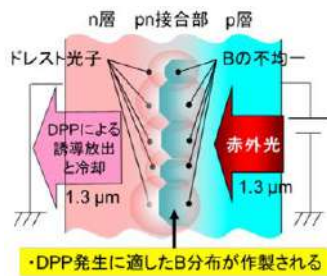
2022/2/22,24

解析から設計に向けたオフセル数理論科学 (Zoomミーティング)

11



## 3. シミュレーション結果の考察 (b) 誘導放出の効果について



田中肇, 「ドレスト光子フォノンを用いた pn 接合 Si 赤外レーザー」, 東京大学 (2015) 博士論文

### ■ 不純物(ドーパント)が固定される仕組み

誘導放出がある系では、  
DPを冷却しやすい(DPの局在を平滑化する)  
不純物配置がある？



基底変換により、DP真空状態と励起状態の  
遷移確率の高いモード(基底関数)を抽出して  
みる。

2022/2/22,24

解析から設計に向けたオフセル数理論科学 (Zoomミーティング)

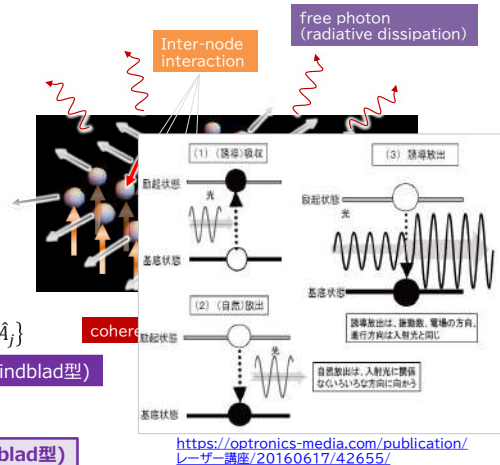
12

## 量子密度行列を用いたダイナミクスの記述

**RICOH**  
imagine. change.

### 量子マスター方程式(誘導放出あり)

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{\rho}(t)}{dt} \approx & \frac{i}{\hbar} \left[ \hat{\rho}(t), \hbar \sum_{i \neq j} V_{ij} (|r_i - r_j|) (\hat{A}_i^\dagger \hat{A}_j + \hat{A}_i \hat{A}_j^\dagger) \right] \\ & \text{①格子点間(湯川型)相互作用} \\ & + \frac{i}{\hbar} \left[ \hat{\rho}(t), \sum_i \mu_i(t) (\hat{A}_i^\dagger + \hat{A}_i) \right] \\ & \text{②外場によるコヒーレント励起} \\ & + \frac{\gamma_{nr}}{2} \sum_{i,j=(\text{edge})} \{ 2\hat{A}_i \hat{\rho}(t) \hat{A}_j^\dagger - \hat{A}_i^\dagger \hat{A}_j \hat{\rho}(t) - \hat{\rho}(t) \hat{A}_i^\dagger \hat{A}_j \} \\ & \text{③境界部への散逸(Lindblad型)} \\ & + \frac{\gamma_r}{2} [1 + n(\omega)] \sum_{i,j} \{ 2\hat{A}_i \hat{\rho}(t) \hat{A}_j^\dagger - \hat{A}_i^\dagger \hat{A}_j \hat{\rho}(t) - \hat{\rho}(t) \hat{A}_i^\dagger \hat{A}_j \} \\ & \text{④自由光子場へのエネルギー放出(Lindblad型)} \\ & + \frac{\gamma_r}{2} n(\omega) \sum_{i,j} \{ 2\hat{A}_i^\dagger \hat{\rho}(t) \hat{A}_j - \hat{A}_i \hat{A}_j^\dagger \hat{\rho}(t) - \hat{\rho}(t) \hat{A}_i \hat{A}_j^\dagger \} \\ & \text{⑤自由光子場からのエネルギー吸収(Lindblad型)} \end{aligned}$$



2022/2/22,24

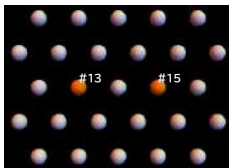
解析から設計に向けたオプティカル数理学 (Zoomミーティング)

13

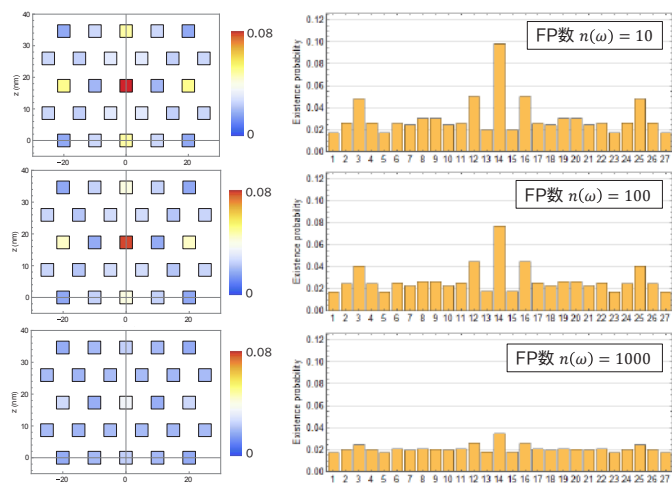
## 誘導放出下でのDP局在状態の変化

**RICOH**  
imagine. change.

2欠陥(間欠配置)



FP数の増加とともにDPの  
局在効果が弱くなっていく。



2022/2/22,24

解析から設計に向けたオプティカル数理学 (Zoomミーティング)

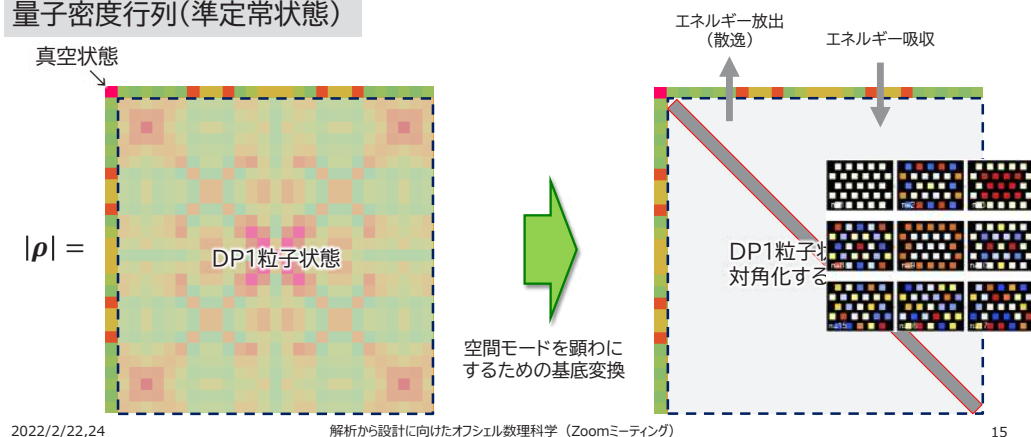
14

## DP(内部)とFP(外場)との相互作用の記述

RICOH  
imagine. change.

### DPの粒子数により切り分ける基底変換

量子密度行列(準定常状態)



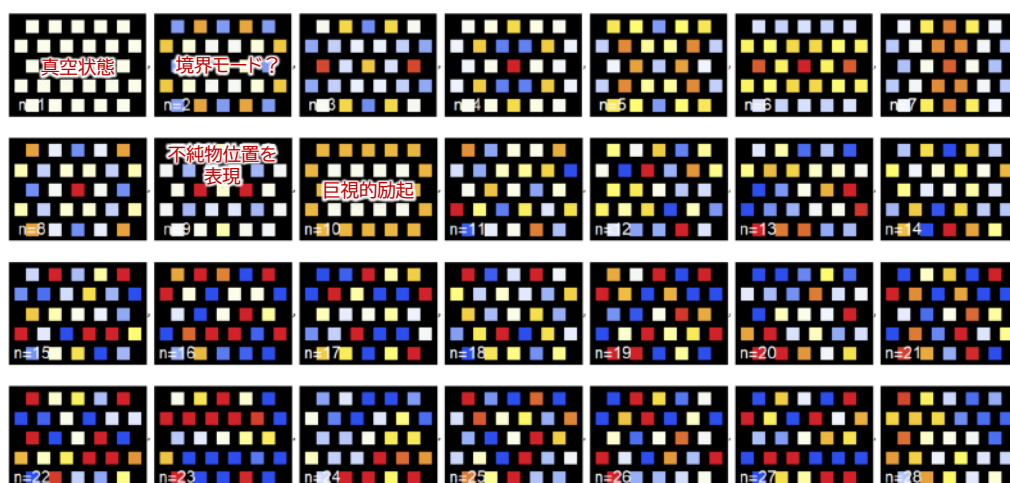
2022/2/22,24

解析から設計に向けたオフシエル数理科学 (Zoomミーティング)

15

## 基底関数セットの可視化例

RICOH  
imagine. change.



2022/2/22,24

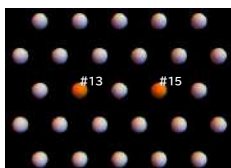
解析から設計に向けたオフシエル数理科学 (Zoomミーティング)

16

## ■ 主要空間モードの可視化

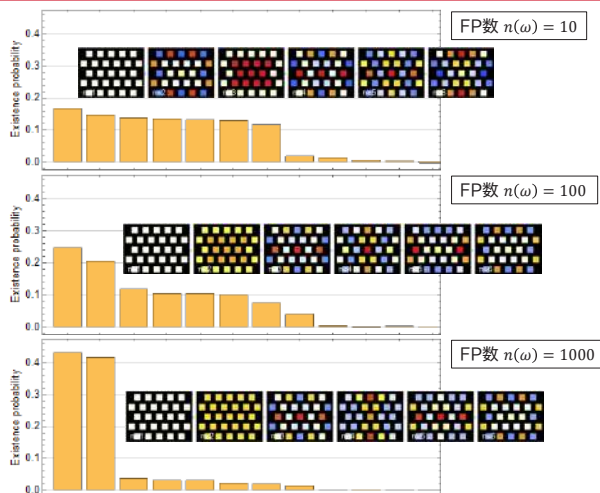
RICOH  
imagine. change.

- DP1粒子状態を  
対角化する基底変換



誘導放出影響が大きくなると、局在性の強いDP基底のエネルギー放出／吸収への寄与は小さくなる。

「冷却されている」と解釈できるか？



2022/2/22,24

解析から設計に向けたオフシエル数理論科学 (Zoomミーティング)

17

## ■ 4. 不純物の自律的最適配置の再現に向けて

RICOH  
imagine. change.

- 現状の問題点(表現できていない状況)
  - 背景(不純物以外)のノードによる誘導放出が含まれている。← Siの場合は禁制
  - 基底変換後のDP基底状態には自己エネルギーに対応する成分(対角成分)が含まれるが、フォノンの影響と捉えることはできないか？
- 自律的な最適配置を再現するには？
  - DPの真空状態と特定の基底状態の占有確率を高める(誘導放出が支配的な)不純物最適位置を探索すればよいのか？
    - ➔ 現状は、系全体に広がる空間分布をもつ基底状態が誘導放出を起こしている。
    - ➔ 現状は、局在性を有する基底状態は誘導放出により見えなくなる。
  - 誘導放出の過渡的応答を追跡すればよいのか？(不純物拡散→局在→誘導放出の過程をモニタ)

2022/2/22,24

解析から設計に向けたオフシエル数理論科学 (Zoomミーティング)

18

## ■ 5. まとめ

**RICOH**  
imagine. change.

### (DP現象の数値モデル化)

- 基底変換によりDPの空間分布を反映した状態を抽出する方法を提案し、(質量をもつ)DPが(質量ゼロの)FPへ接続する一つのモデルを説明した。

### (実際の物理現象のシミュレート)

- 上記モデルを用い、複数不純物の配置に依存したDPの局在性の変化を数値シミュレーションにより可視化した。(ただし、その法則性は見い出せていない。)
- FPの誘導放出が、DPの局在性を解消するように働くことを数値シミュレーションにより示した。

### (最適設計へのアプローチ)

- DP系が自律的に最適構造へ向かう仕組み(設計・制御)について、“現在検討中”

2022/2/22,24

解析から設計に向けたオフシェル数理科学 (Zoomミーティング)

19

ご清聴ありがとうございました。

**RICOH**  
imagine. change.

ドレストフォトンが関わる  
量子的散逸構造の理論  
Theory of Quantum Dissipative Structure  
associated with Dressed Photons

坂野 齋 I. Banno

山梨大学工学部 Univ. of Yamanashi

e-mail: banno@yamanashi.ac.jp

Feb. 22, 24, 2022

IMI 研究所

謝辞

ドレスト光子研究起点 (RODreP) での研究会のメンバーである次の方々に感謝いたします：大津元一博士 (RODreP)，小嶋泉博士 (RODreP)，佐久間弘文博士 (RODreP)，川添忠博士 (日亜化学)，西郷甲矢人博士 (長浜バイオ大学)，岡村和弥博士 (名古屋大学)，瀬川悦生博士 (横浜国立大学)，松岡雷士博士 (広島工業大学)，三宮 俊博士 (リコー)，門脇拓也博士 (日亜化学)，結城謙太氏。

この研究の一部はドレスト光子研究起点からの援助を受けています。

はじめに

摂動的扱い

非摂動的方法

## DP=内在電磁場を原因とする特異な現象 #1

不十分な光子エネルギーでの光化学反応

- CVD APL(2001) APL(2001)
- NF リソグラフィ J. Photolumin.(2007)
- NF エッチング APB(2008)
- CO<sub>2</sub> 分解 Scientific Reports(2013)

周波数上方変換 IEEE J. of Selected Topics in Quantum Electronics(2009)

禁制を破る遷移

- ナノファウンテン APL(2005)
- ナノフォトニックゲートデバイス APB(2011)
- Si-IR 検出器 APB(2012)

## DP=内在電磁場を原因とする特異な現象 #2

### PB デバイス

川添，大津らによって開発された，ドレスト光子援用アニールによって間接・直接遷移型半導体から作製される高効率発光デバイス．発光波長をプロセス中の照射光の波長で制御．

#### 間接遷移型半導体の高効率発光

- Si LED APB(2011)
- SiC LED *Silicon Light-Emitting Diodes and Lasers*(Springer,2016)
- Si IR laser APL(2012)

#### 巨大磁気光学効果（間接・直接遷移型）

- SiC *Silicon Light-Emitting Diodes and Lasers*(Springer,2016)
- ZnO *Scientific Reports*(2013)

#### 巨大偏"向"効果

- ZnO

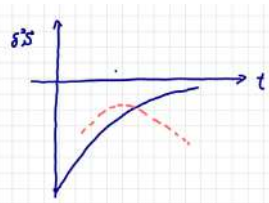
#### 静磁場への強磁性的応答

- Si LED 応用物理学会 (2021)

## PB デバイス発光と散逸構造 #1

散逸構造：プリゴジンらによる非平衡熱力学解放系の理論系内の化学反応によるエントロピー生成と系外へのエントロピー散逸の均衡で達成される定常状態（平衡状態から遠い動的秩序構造）

| 熱力学的平衡状態                                 | 散逸構造                                            |
|------------------------------------------|-------------------------------------------------|
| $\delta^2 S < 0$                         | $\delta^2 S < 0$                                |
| $\frac{d}{dt} \delta^2 S > 0$ 安定<br>第2法則 | $\frac{d}{dt} \delta^2 S < 0$ 不安定<br>散逸構造へ向かう兆候 |



PB デバイスの発光は，電子系，光学フォノン系のコヒーレント長 10-100nm 程度の島構造中での電子・正孔対の消滅と推察；  
 $e^- + h^+ \rightarrow \hbar\omega$ （オンシエル光）非線形性と散逸が原因の化学反応系の散逸構造との類似．

## PB デバイス発光と散逸構造 #2

エントロピーの最大値原理の代わりに，作用積分の最小値原理をたよりに記述できないだろうか？

| 熱力学的平衡状態                                   | 散逸構造                                            |
|--------------------------------------------|-------------------------------------------------|
| $\delta^2 S < 0$                           | $\delta^2 S < 0$                                |
| $\frac{d}{dt} \delta^2 S > 0$<br>安定，第 2 法則 | $\frac{d}{dt} \delta^2 S < 0$<br>不安定，散逸構造へ向かう兆候 |

| PB 前                                        | PB 後                                             |
|---------------------------------------------|--------------------------------------------------|
| $\delta^2 I > 0$                            | $\delta^2 I > 0$                                 |
| $\frac{d}{dt} \delta^2 I < 0$<br>安定，最小作用の原理 | $\frac{d}{dt} \delta^2 I > 0$<br>不安定，新しい構造へ向かう兆候 |

## DP=内在電磁場=オフシェル電磁場

熱力学の散逸構造をモチーフに，半古典論，非相対論的量子電磁力学の枠組み内で，物質に内在する電磁場の作用積分への寄与から PB デバイスの仕組みを考えたい。

$$A^\mu(x) = \underbrace{A^{(0)\mu}(x)}_{\text{On-shell}} + \underbrace{\int d^4x' \overbrace{G_\nu^\mu(x, x')}^{\text{順+反因果律}} j^\nu(x')}_{\Delta A^\mu(x) \text{ 非相対論的, Off-shell, DP, 内在}}$$

$$j^\mu(x) = j^{(0)\mu}(x) + \underbrace{\int d^4x' \chi_{\mu_1}^\mu(x, x_1) \Delta A^{\mu_1}(x_1)}_{\Delta j^\mu(x) \text{ 非相対論的, 誘導電流密度}}$$

- 非相対論的物質応答により生じる  $\Delta A^\mu(x)$  は真空中の分散関係を満たさないオフシェル電磁場 = DP = 内在電磁場。
- 横電流密度 - 電磁場を関係づけるのは，遅延グリーン関数と先進グリーン関数の平均（後述）。
- $A^\mu(x)$  の交換関係は物質場の交換関係を反映。

はじめに

摂動的扱い

非摂動的方法

## 非相対論系で再定義された 電磁ポテンシャルと単一感受率 #1

再定義された摂動・誘導電磁ポテンシャル：

- 非相対論系のハミルトニアンでは、運動量に関する VP は 2 次式、エネルギーと関係する SP は 1 次式という依存性の違いがあり、VP の 2 乗から作られるスカラーは電荷密度と結合する。

$$\begin{aligned}\hat{H} &= \int d^3r \left\{ \frac{1}{2m} \left( \frac{\hbar}{-i} \partial_i - qA_i \right) \hat{\psi}_\alpha^\dagger(x) \left( \frac{\hbar}{i} \partial_i - qA_i \right) \hat{\psi}_\alpha(x) + \hat{\psi}_\alpha^\dagger(x) q\phi(x) \hat{\psi}_\alpha(x) \right\} \\ &= \hat{H}^{(0)} + \int d^3r \left\{ \hat{\rho}(x) \underbrace{\left( \Delta\phi(x) - \frac{q}{2m} \Delta A_i(x) \Delta A_i(x) \right)}_{\Delta\tilde{\phi}(x)} - \hat{j}_i(x) \underbrace{\Delta A_i(x)}_{\Delta\tilde{A}_i(x)} \right\}\end{aligned}$$

ここで、

$$\hat{H}^{(0)} = \hat{H} \Big|_{\mathbf{A}=\mathbf{A}^{(0)}, \phi=\phi^{(0)}} ,$$

$$\hat{\rho}(x) = q\hat{\psi}_\alpha^\dagger(x)\hat{\psi}_\alpha(x), \quad \hat{j}_i(x) = \frac{q}{2m} \left( \hat{\psi}_\alpha^\dagger(x) \left( \frac{\hbar}{i} \partial_i - q\mathbf{A}_i \right) \hat{\psi}_\alpha(x) + \text{h.c.} \right),$$

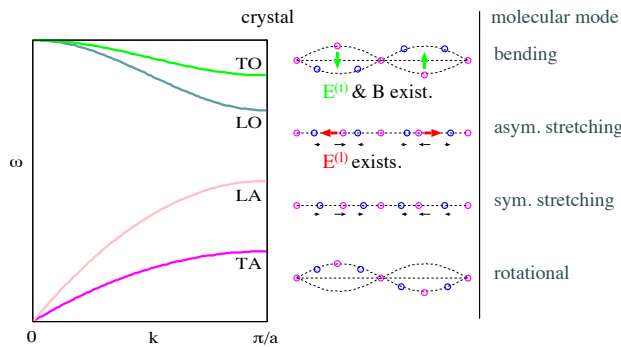
## 非相対論系で再定義された 電磁ポテンシャルと単一感受率 #2

非共鳴描像

$$\begin{aligned}\Delta A^\mu(x) &\rightarrow \Delta \tilde{A}^\mu(x) \equiv \left( \Delta \phi(x) + \frac{-q}{2m} |\Delta \mathbf{A}(x)|^2, c \Delta \mathbf{A}(x) \right), \\ \hat{\chi}_{\mu_1 \dots \mu_n}^\mu(x, x_1, \dots, x_n) &\rightarrow \frac{1}{n!} \left( \frac{1}{i\hbar c^2} \right)^{n-1} \hat{T} \left[ [\dots [\hat{\chi}_{\mu_1}^\mu(x, x_1), \hat{j}_{\mu_2}^{(in0)}(x_2)], \dots], \hat{j}_{\mu_n}^{(in0)}(x_n) \right], \\ \text{但し, } \hat{\chi}_{\mu_1}^\mu(x, x_1) &= \frac{-q}{mc^2} \delta_{\mu_1}^\mu \delta^4(x - x_1) \hat{j}^{(in0)0}(x) + \frac{1}{i\hbar c^2} \theta(ct - ct_1) [\hat{j}^{(in0)\mu}(x), \hat{j}^{(in0)\mu_1}(x_1)]\end{aligned}$$

- VP の 2 次のスカラーを SP に繰り込んで、SP、VP を再定義し、非共鳴非線型項を 1 次低い SP への応答に繰り込める (非共鳴描像)。
- 感受率は元々の共鳴項のみ残り簡単化。  $\Delta \tilde{A}^\mu(x)$  は非相対論的な物質と結びついており相対論的共変性はない。
- ゲージ変換不変性も破れ、クーロンゲージが望ましい。
- 新 SP 中の VP の 2 次の寄与はキャリア（電子，正孔）に必ず引力ポテンシャルとして働く。
- しかも、同じベクトル場の 2 乗なので、角周波数  $\sim 0$ ，かつ、空間波数  $\sim 0$  の成分；作用積分増大の因子。

## PB デバイスに関する今までの推察 #1



- 光学フォノンには半波長  $L$  内で同位相の電流密度を伴う
- この電流密度が生む内在 VP 非局所的重ね合わせにより増強，
- この VP の 2 次から作られる有効 SP は  $k \simeq 0$ ， $\omega \simeq 0$  成分をもち、キャリアに静的引力ポテンシャルを提供。

## PB デバイスに関する今までの推察 #2

- 光学フォノン ( $\sim 50\text{meV}$ ) に伴う VP から作られる, 新 SP が働く領域のサイズ  $L$  について  $0.1\mu\text{m} \leq L \leq 6\mu\text{m}$  と見積もられ, 島構造が望ましい.

$L$  の下限はキャリアに対する引力ポテンシャルが 2 フォノン励起に打ち勝つ条件, 上限は光学フォノンの電流密度がつくる VP が時間遅れの効果が効かずに同じ方向で重畳され巨大化する条件.

- 2 次非線形応答から磁気光学効果の実験を再現する電子系のサイズ  $L_e$  を見積もると  $1\mu\text{m}$  のオーダーとなる. ただし, 不純物由来の多数存在する 2 準位系がコヒーレントであってそれぞれの準位をお互いに利用可能であると仮定.
- 光学フォノンに関係するサイズ  $L$  と電子系のサイズ  $L_e$  がともに同程度であることは, 光学フォノンの VP がつくる有効 SP の引力ポテンシャルにキャリアが閉じこめられている描像と整合する.

## VP から作られる新 SP の誘導源泉への寄与

$$\begin{aligned}
 \delta\rho(x) = & \int dt_1 \int d^3r_1 \theta(t-t_1) \frac{1}{i\hbar} [\rho^{(0)}(x), \rho^{(0)}(x_1)] \delta\left(\phi(x_1) - \frac{q}{2m} |\mathbf{A}(x_1)|^2\right) \\
 & + \int dt_1 \int d^3r_1 \int dt_2 \int d^3r_2 \hat{T} \left(\frac{1}{i\hbar}\right)^2 [[\rho^{(0)}(x), \rho^{(0)}(x_1)], \rho^{(0)}(x_2)] \\
 & \delta\left(\phi(x_1) - \frac{q}{2m} |\mathbf{A}(x_1)|^2\right) \delta\left(\phi(x_2) - \frac{q}{2m} |\mathbf{A}(x_2)|^2\right) \\
 \delta j_i(x) = & -\frac{q}{m} \rho^{(0)}(x) \delta A_i(x) \\
 & + \int dt_1 \int d^3r_1 \theta(t-t_1) \frac{1}{i\hbar} [j_i^{(0)}(x), \rho^{(0)}(x_1)] \delta\left(\phi(x_1) - \frac{q}{2m} |\mathbf{A}(x_1)|^2\right) \\
 & - \int dt_1 \int d^3r_1 \theta(t-t_1) \frac{1}{i\hbar} [j_i^{(0)}(x), j_{i_1}^{(0)}(x_1)] \delta A_{i_1}(x_1) \\
 & + \frac{1}{2!} \frac{-q}{m} \int dt_1 \int d^3r_1 \theta(t-t_1) \frac{1}{i\hbar} [\rho^{(0)}(x), \rho^{(0)}(x_1)] \delta A_i(x) \delta\left(\phi(x_1) - \frac{q}{2m} |\mathbf{A}(x_1)|^2\right) \\
 & - \frac{1}{2!} \frac{-q}{m} \int dt_1 \int d^3r_1 \theta(t-t_1) \frac{1}{i\hbar} [\rho^{(0)}(x), j_{i_1}^{(0)}(x_1)] \delta A_i(x) \delta A_{i_1}(x_1) \\
 & + \frac{1}{2!} \int dt_1 \int d^3r_1 \int dt_2 \int d^3r_2 \hat{T} \left(\frac{1}{i\hbar}\right)^2 [[j_i^{(0)}(x), j_{i_1}^{(0)}(x_1)], j_{i_2}^{(0)}(x_2)] \delta A_{i_1}(x_1) \delta A_{i_2}(x_2) \\
 & + \frac{-2}{2!} \int dt_1 \int d^3r_1 \int dt_2 \int d^3r_2 \hat{T} \left(\frac{1}{i\hbar}\right)^2 [[j_i^{(0)}(x), \rho^{(0)}(x_1)], j_{i_2}^{(0)}(x_2)] \delta\left(\phi(x_1) - \frac{q}{2m} |\mathbf{A}(x_1)|^2\right) \delta A_{i_2}(x_2) \\
 & + \frac{1}{2!} \int dt_1 \int d^3r_1 \int dt_2 \int d^3r_2 \hat{T} \left(\frac{1}{i\hbar}\right)^2 [[j_i^{(0)}(x), \rho^{(0)}(x_1)], \rho^{(0)}(x_2)] \\
 & \delta\left(\phi(x_1) - \frac{q}{2m} |\mathbf{A}(x_1)|^2\right) \delta\left(\phi(x_2) - \frac{q}{2m} |\mathbf{A}(x_2)|^2\right)
 \end{aligned}$$

## VP から作られる新 SP の作用積分への寄与

均一電流がながれる島構造ができ、 $\frac{-q}{2m}|\mathbf{A}|^2$  が有意の大きさがあるとして、この項が寄与する部分に着目。

$$\begin{aligned}\delta I_{mat} &= \int dt \int d^3r \delta j_i(x) \delta A_i(x) - \delta \rho(x) \delta \left( \phi(x) - \frac{q}{2m} |\mathbf{A}(x)|^2 \right) \\ &= \int dt \int d^3r \frac{-q}{m} \rho^{(0)}(x) |\delta \mathbf{A}(x)|^2 \\ &\quad + \int dt \int d^3r \int dt_1 \int d^3r_1 \frac{1}{i\hbar} \left[ j_i^{(0)}(x), \rho^{(0)}(x_1) \right] \delta A_i(x) \delta \left( \phi(x_1) - \frac{q}{2m} |\mathbf{A}(x_1)|^2 \right)\end{aligned}$$

- 第 1 項は反磁性電流の寄与で負定値、通常、常磁性電流が有意だが、「島構造」生成によりそれに勝つことできる。この場合の反磁性電流は回復の方向であり、系の安定性を意味する。（＊発表後の註を最後に書かせていただきます）
- 電流注入により、第 3 項は負にも正にもなる。正の方向は揺らぎの増長、不安定を意味し新しい構造に向かうと考えられる。
- $\frac{-q}{2m}|\mathbf{A}|^2$  の 2 つ、3 つの項は、 $\delta j_i(x) \delta A_i(x) - \delta \rho(x) \delta \left( \phi(x) - \frac{q}{2m} |\mathbf{A}(x)|^2 \right)$  の 2 つの寄与によりキャン

はじめに

摂動的扱い

非摂動的方法

## 量子的散逸構造探索のための準備

- 量子的散逸構造（動的構造，定常状態）を探索するには，作用積分の最小値原理を拠り所にする．基底状態から遠い動的状態を議論するのにエネルギー最小値原理は役に立たないだろう．
- 系外からキャリア電流注入，系外へ伝搬光（オンシエル光）を散逸させる QED の部分系の作用積分は未開発．
- 島構造の内を系内，その外に注入電流の源（source），発光の吸い込み（sink）があるとして，空間的境界で部分系を定義するのがやりやすい．
- 非摂動的扱いとしては，物質の電子系に必須である電子間相互作用を考慮するために，SP を電荷密度間相互作用に書き直すことは必須のこととして伝統的に行われてきたが，VP を電流密度間相互作用とみることが重要視されてこなかった．これが内在電磁場，DP に対する無関心の一因となったように思う．SP をお手本に VP にも同じことを行う．
- 粒子-電磁場系で行う．

## 部分系の作用積分，電磁場を消去 #1

- (1) 孤立系では，系内の電荷密度，電流密度から電磁場が生じ，系内の電荷密度，電流密度で減する．電磁場は電荷密度間，電流密度間の相互作用を担う．
- (2) 横電磁場（横 VP 自由度）は，波動方程式のグリーン関数に書き換えられるが，その際，遅延グリーン関数と先進グリーン関数の平均が採用される．それは，上記 (1) により，生成，消滅が系内でかならず均衡しているべきだから．質量と電荷をもつ粒子  $q_\ell(t)$ ,  $\ell = 1, 2, \dots$  の孤立系では，

$$\begin{aligned}
 I[\{q_\ell(t)\}] &= \sum_{\ell} \frac{m_{\ell}}{2} \dot{q}_{\ell}(t) \dot{q}_{\ell}(t) \\
 &+ \frac{1}{8\pi\epsilon_0 c^2} \int dt \int d^3 r \int dt' \int d^3 r' j_i(x) \frac{1}{2} \left( G_{ij}^{(ret)}(x, x') + G_{ij}^{(adv)}(x, x') \right) j_j(x') \\
 &- \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \int dt \int d^3 r \int dt' \int d^3 r' \rho(x) G_{ij}^{(Coulomb)}(x, x') \rho(x')
 \end{aligned}$$

## 部分系の作用積分，電磁場を消去 #2

(3) 空間的境界で，粒子を分けて部分系を定義する．外の粒子は電磁場の入射源（湧き出し），出射源（引き込み）となる．

(4) 境界より電流注入を，ゲージ関数と結合させて考慮した．

質量と電荷をもつ粒子  $q_\ell(t), \ell = 1, 2, \dots$  の部分系では，

$$\begin{aligned}
 I[\{q_\ell(t)\}] = & \sum_{\ell \in V} \frac{m_\ell}{2} \dot{q}_\ell(t) \dot{q}_\ell(t) \\
 & + \frac{1}{8\pi\epsilon_0 c^2} \int dt \int_V d^3r \int dt' \int_V d^3r' j_i(x) \frac{1}{2} \left( G_{ij}^{T(ret)}(x, x') + G_{ij}^{T(adv)}(x, x') \right) j_j(x') \\
 & - \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \int dt \int_V d^3r \int dt' \int_V d^3r' \rho(x) G_{ij}^{(Coulomb)}(x, x') \rho(x') \\
 & + \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \int dt \int_V d^3r \int dt' \int_{\bar{V}} d^3r' j_i(x) \left( G_{ij}^{T(ret)}(x, x') j_j^{(source)}(x') + G_{ij}^{T(adv)}(x, x') j_j^{(sink)}(x') \right) \\
 & - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int dt \int_V d^3r \int dt' \int_{\bar{V}} d^3r' \rho(x) G_{ij}^{(Coulomb)}(x, x') \rho(x') \\
 & + \int dt \int_V d^3r \partial_t(\rho(x)\chi(x)) + \partial_i(j_i(x)\chi)
 \end{aligned}$$

## まとめ

(1) 非相対論系でベクトルポテンシャルの 2 乗が電荷密度と結合するスカラーポテンシャルの一部とみなせることと最小作用の原理を用いて，フォトンブリーディングデバイスの散逸構造を摂動的に論じた．

(2) 誘導電流密度の式から，電荷密度と結合するベクトルポテンシャルの 2 乗が，巨大 MO や大きな磁気応答に関与していることが示唆される．

(3) 非摂動的扱いの準備として，部分系の作用積分を提案した．電荷密度間相互作用は因果律に従わないことは知られていたが，電流密度間相互作用も同様である．

発表後の註： $\frac{-q}{2m}|\mathbf{A}|^2$  が十分大きくなった場合，反磁性電流の作用積分への寄与の負定値を考慮して，あらたな状態を見出し，そこからの揺らぎの正負を議論すべきところでした．今後，調べてみます．お詫びして訂正します．

# 量子ウォークの Comfortability

## Comfortability of quantum walk

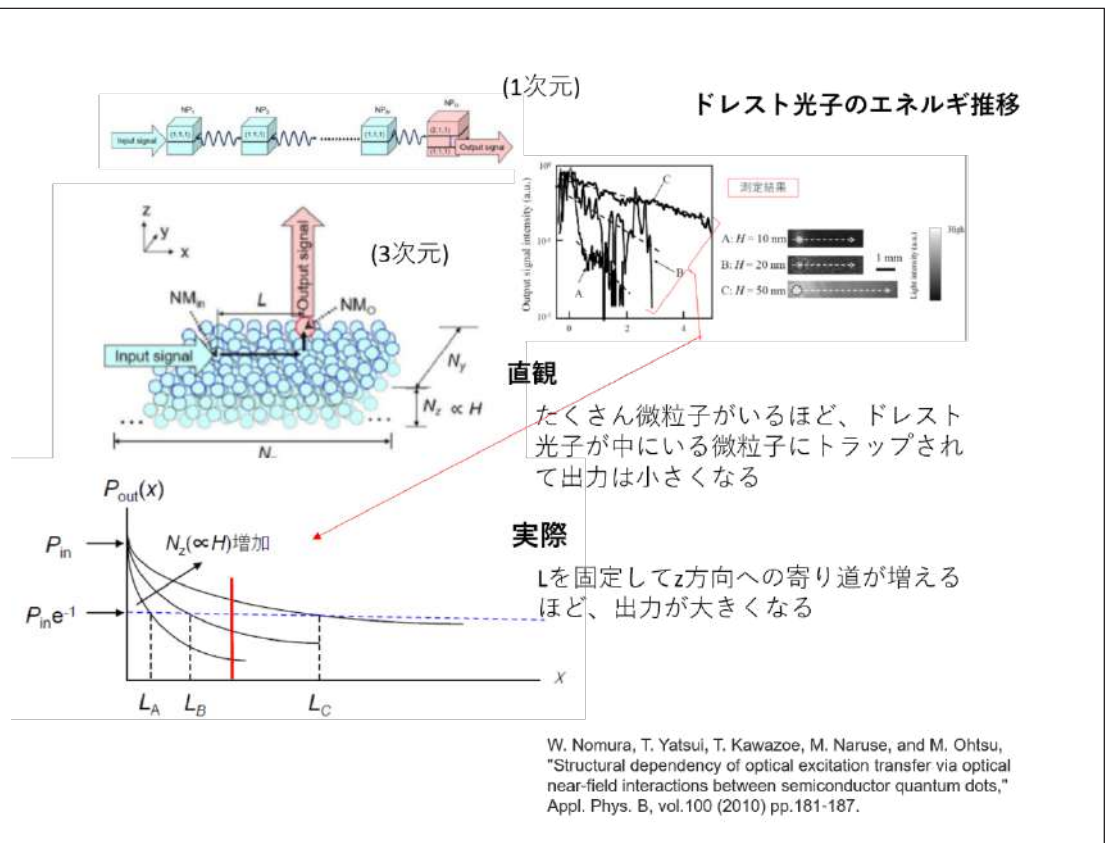
瀬川悦生

横浜国立大学 環境情報学研究院

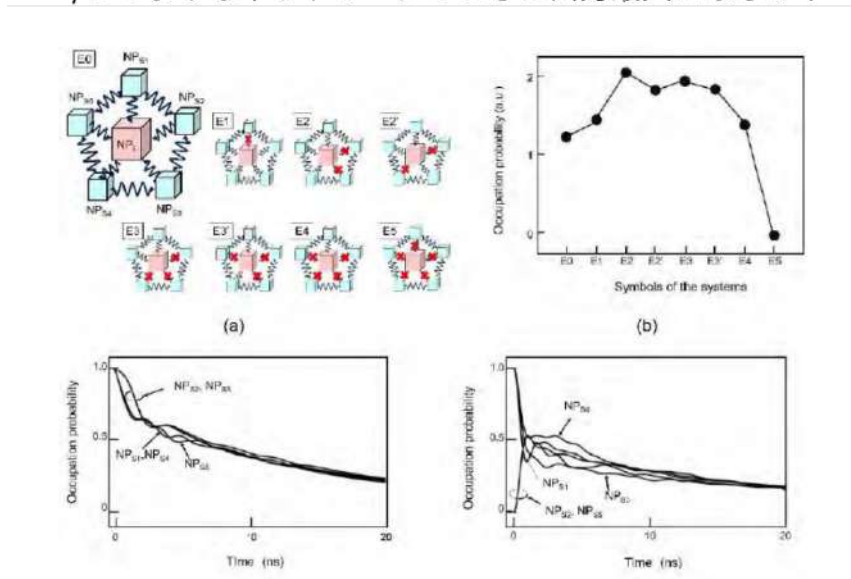
### アブストラクト

内部グラフに対して量子ウォークの打ち込みを続けることにより、そのグラフの表面から応答が得られる。この応答から、内部グラフの構造の情報を得ることができる場合がある。この研究ではさらに進んで、このグラフの量子ウォークによる「表面上の様子」だけではなく、その「内面」についても観察したい。そのための一つの手段として Comfortability という概念を導入し、量子ウォーカーが十分に時間が経過したときに、どの位そのグラフに蓄積されているか、つまり、どのくらいこのグラフを居心地よく感じているかに着目する。すると、この量が量子ウォークによって誘導されるグラフのある幾何的な構造を表す量によって表現されることがわかったので、報告する。

A response from the surface of the internal graph is obtained by sequential input of quantum walks to the graph. This response tells some information on the graph structure. In this study, we will observe not only the information on the surface but also its interior induced by quantum walks. To this end, we introduce the notion of "comfortability" which gives how quantum walkers are stored in this graph for large time step; that is, how quantum walkers feel comfortable to this graph. We show that the comfortability can be expressed by some quantity of the graph geometry induced by quantum walk.

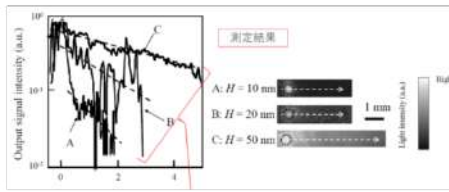


ドレスト光子が自律的に探し出す経路  
/どのようなネットワークのときに出力最大になるか？

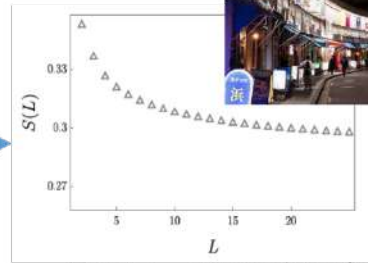


[5] M. Naruse, K. Leibnitz, F. Peper, N. Tate, W. Nomura, T. Kawazoe, M. Murata, M. Ohtsu, "Autonomy in excitation transfer via optical near-field interactions and its implications for information networking," Nano Communication Networks, 2 (2011) pp.189-195.

# ドレスト光子・量子ウォーク類似性



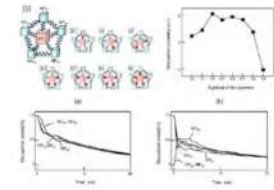
ドレスト光子のナノ粒子間  
エネルギー推移の実験結果



量子ウォークハシゴ酒現象

[Konno, Koyama, Segawa, Stefanak(2022+)]

ドレスト光子が自発的に探し出す経路



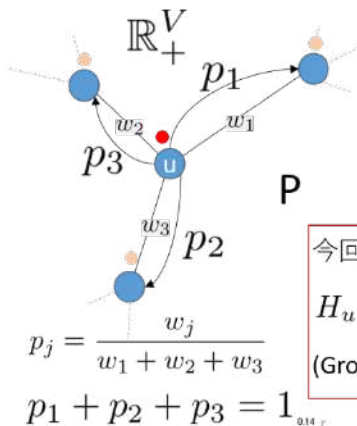
[3] M. Naruse, K. Lehtinen, F. Peier, N. Tate, W. Nonaka, T. Kawazoe, M. Maruta, M. Ohno, "Autonomy in excitation transfer via optical near-field interactions and its implications for information networking," *Nano Communication Networks*, 2 (2011) pp 189-195.

最短経路を結ぶセルフループ対が寄与(数学的に証明)

[Konno, Segawa, Stefanak, Symmetry(2021)]

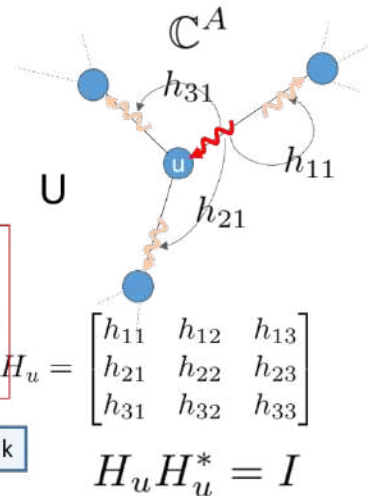
量子ウォークの“好む経路”セルフループ対の最短経路”

(可逆な) ランダムウォーク



今回はこの行列に固定  
$$H_u = \frac{2}{d(u)} J_{d(u)} - I_{d(u)}$$
  
(Grover walk)

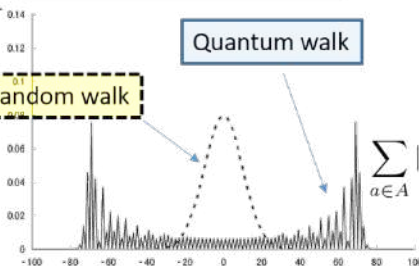
量子ウォーク



$$\sum_{u \in V} (Pf)(u) = \sum_{u \in V} f(u)$$

Random walk

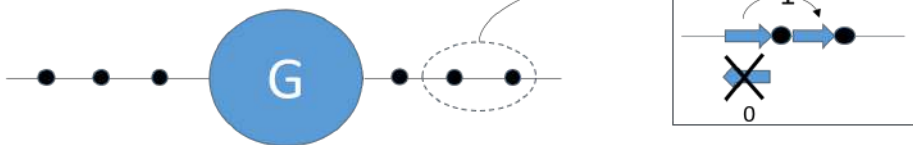
Quantum walk



$$\sum_{a \in A} |(U\psi)(a)|^2 = \sum_{a \in A} |\psi(a)|^2$$

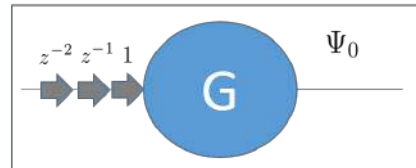
## ここで扱う量子ウォークモデル

Grover walk on graph with infinite length "tails"

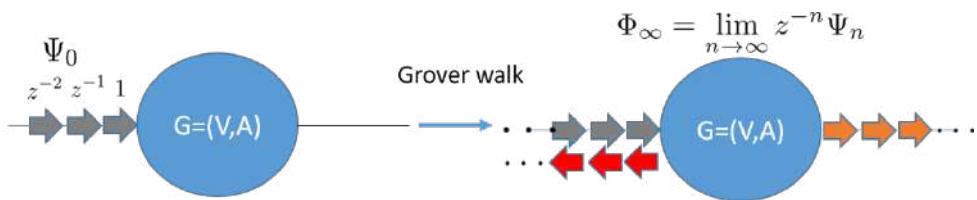
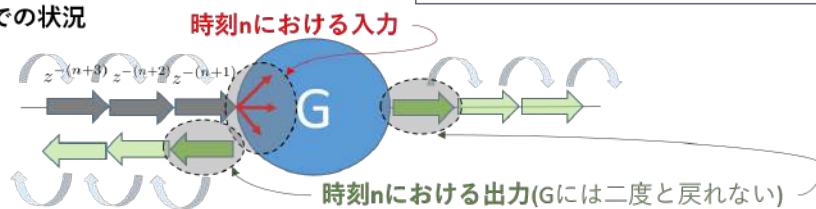


初期状態:  $|z|=1$

$$\Psi_0(a) = \begin{cases} z^{-j} & : a = e_j, j = 0, 1, \dots \\ 0 & : \text{otherwise} \end{cases} \cong$$



時刻 $n$ での状況



**Theorem 1 [Higuchi, S JPA (2019)]**  $\lim_{n \rightarrow \infty} z^{-n} \Psi_n(a) =: \Phi_\infty(a)$

### Questions

グラフの「表面上」の情報

Q1. 時刻無限大のときの出力をみるだけ, グラフの情報を得られるか?

グラフの「内部」の情報

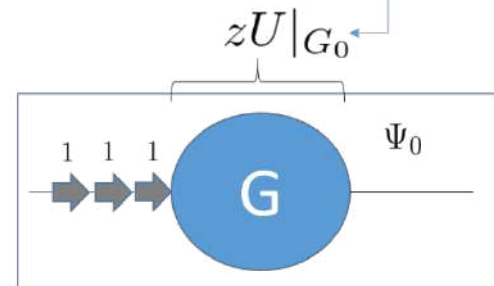
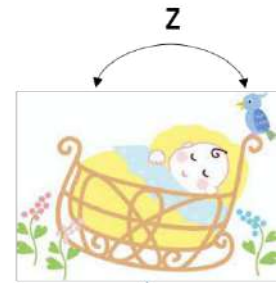
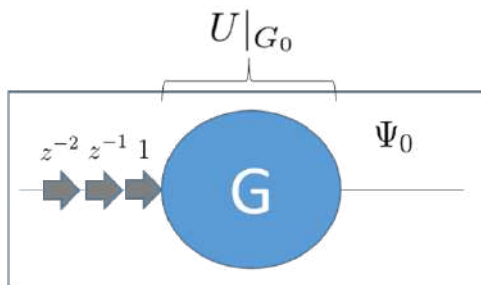
Q2. このグラフは、どの位置量子ウォークに居心地よく思われているか?

Comfortability of quantum walk to G

$$\mathcal{E}_{QW}(G) := \frac{1}{2} \sum_{a \in A} |\Phi_\infty(a)|^2$$



初期状態の考え方

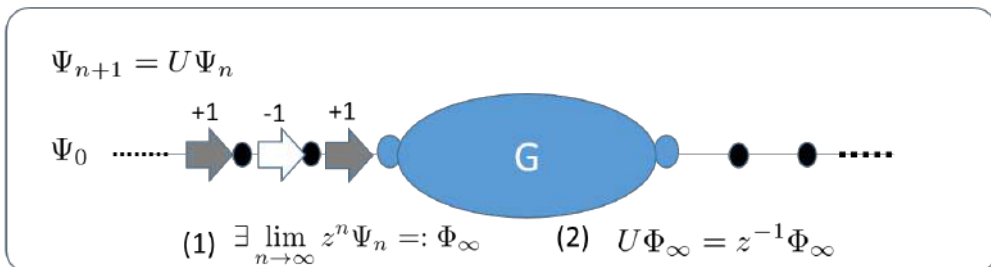


グラフの立場からすれば



毎時刻, グラフの全体を $z$ だけ”揺らす”

The setting of the inflow today :  $z = -1$  (“alternating current”), **Grover walk**



Q1.時刻無限大のときの出力をみるだけ, グラフの情報を得られるか?

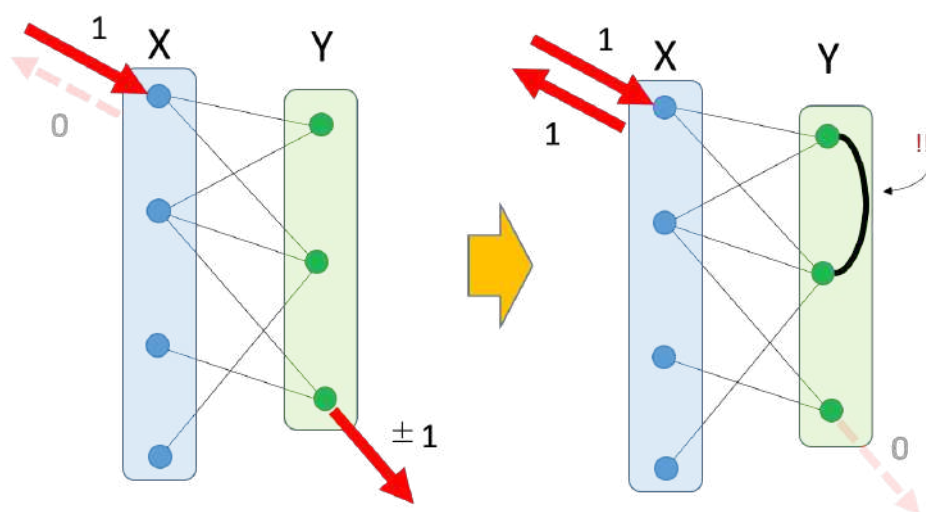
**Theorem 1. Yes !** [Higuchi Sabri S 2022, arXiv:2201.01926]

もしグラフが**二部グラフ**ならば, 散乱は**完全透過**  
一方でも**二部グラフでない**ならば, 散乱は**完全反射**.

Q2.このグラフは、どの位置量子ウォークに居心地よく思われているか?

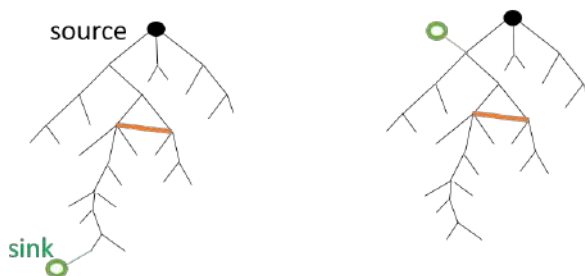
**Theorem 2.** [Higuchi Sabri S 2022, arXiv:2201.01926]

量子ウォークにとっての居心地の良さはあるグラフの因子を数えることで得られる(より詳細は次のスライドから)

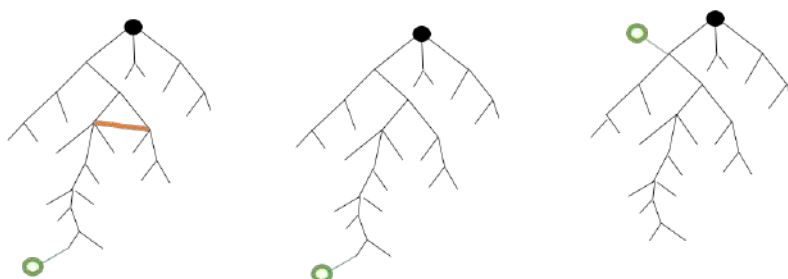


量子ウォークによるグラフの因子を見つけた結果

「量子ウォークの居心地の良さ」目線だと**同じ**グラフ

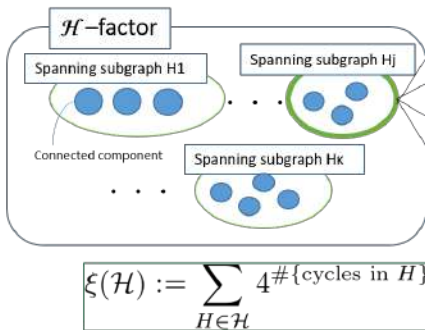


「量子ウォークの居心地の良さ」目線だと**異なる**グラフ



## 量子ウォーカーにとっての居心地の良さを決める4つのグラフ因子

$$\mathcal{H} \in \{\mathcal{T}, \mathcal{T}_{u_1} - \mathcal{T}_{u_N}, \mathcal{C}_o, \mathcal{T}_{u_1} - \mathcal{C}_o\}$$



量子ウォークで数え上げるべき量

( $z=1$  のときはグラフによらずにオレンジ)  
( $z=-1$  のとき)

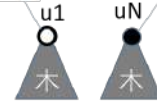
Theorem 2 のより詳細

$$\mathcal{E}_{QW}(G) = \begin{cases} (1/4) \cdot \{ \xi(\mathcal{T}_{u_1} - \mathcal{T}_{u_N}) / \xi(\mathcal{T}) + |E_0| \} & : G \text{ is bipartite} \\ \xi(\mathcal{T}_{u_1} - \mathcal{C}_o) / \xi(\mathcal{C}_o) & : G \text{ is non-bipartite} \end{cases}$$

① Tree-factor  $\mathcal{T}$



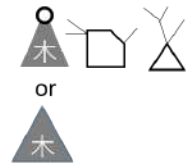
② Tree-Tree-factor  $\mathcal{T}_{u_1} - \mathcal{T}_{u_N}$



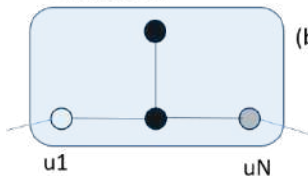
③ Odd unicyclic-factor  $\mathcal{C}_o$



④ Tree-Odd unicyclic-factor  $\mathcal{T}_{u_1} - \mathcal{C}_o$



### Example 1.



$\kappa_1$ : # of Spanning tree = 1

$\kappa_2$ : # tree-tree-factor = 2



(An isolate vertex is regarded as a tree)

$$\mathcal{E}_{QW} = 1/4 \cdot (2 + 3) = 5/4$$

$$\mathcal{E}_{QW} := \begin{cases} (1/4) \cdot \{ \kappa_2(G; u_1, u_N) / \kappa_1(G) + |E_0| \} & : G \text{ bipartite} \\ \iota_2(G; u_1) / \iota_1(G) & : G \text{ non-bipartite} \end{cases}$$

$$\kappa_1(G) := \#\mathcal{T}$$

$$\kappa_2(G; u_1, u_N) := \#\mathcal{T}_{u_1} - \mathcal{T}_{u_N}$$

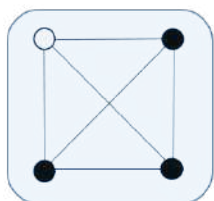
$$\iota_1(G) = \sum_{H \in \mathcal{C}_o} 4^{\#\{\text{odd cycles in } H\}}$$

$$\iota_2(G; u_1) = \sum_{H \in \mathcal{T}_{u_1} - \mathcal{C}_o} 4^{\#\{\text{odd cycles in } H\}}$$



入り口と出口を両方含んでいるのでこれは除外

**Example 2.**



(Non-bipartite)

$$\mathcal{E}_{QW} := \begin{cases} (1/4) \cdot \{\kappa_2(G; u_1, u_N)/\kappa_1(G) + |E_0|\} & : G \text{ bipartite} \\ \iota_2(G; u_1)/\iota_1(G) & : G \text{ non-bipartite} \end{cases}$$

$$\kappa_1(G) := \#\mathcal{T}$$

$$\kappa_2(G; u_1, u_N) := \#\mathcal{T}_{u_1} - \mathcal{T}_{u_N}$$

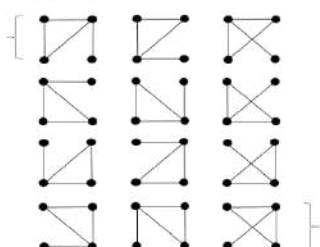
$$\iota_1(G) = \sum_{H \in \mathcal{C}_o} 4^{\#\{\text{odd cycles in } H\}}$$

$$\iota_2(G; u_1) = \sum_{H \in \mathcal{T}_{u_1} - \mathcal{C}_o} 4^{\#\{\text{odd cycles in } H\}}$$

$\mathcal{C}_o$

$\mathcal{T}_{u_1} - \mathcal{C}_o$

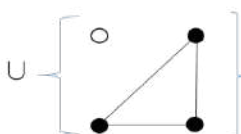
$$\iota_1(G) = 4^1 \times 12 = 48$$



$$\iota_2(G; u_1) = 4^0 \times 16 + 4^1 = 20$$

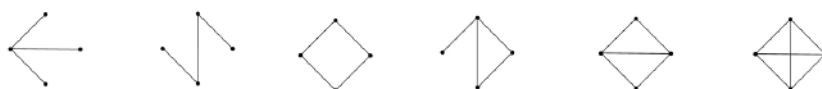
Spanning trees of  $K_4$

$$N^{N-2} = 4^2 = 16$$

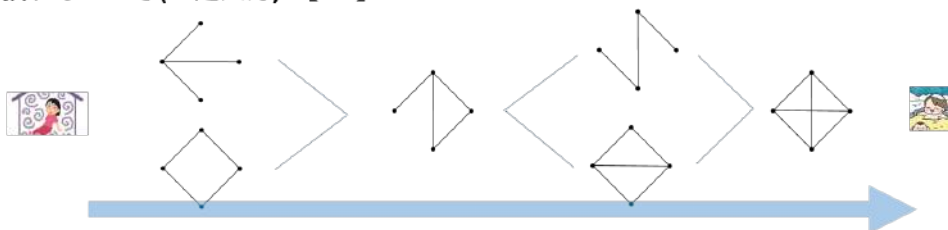


$$\mathcal{E}_{QW} = \frac{20}{48} = \frac{5}{12}$$

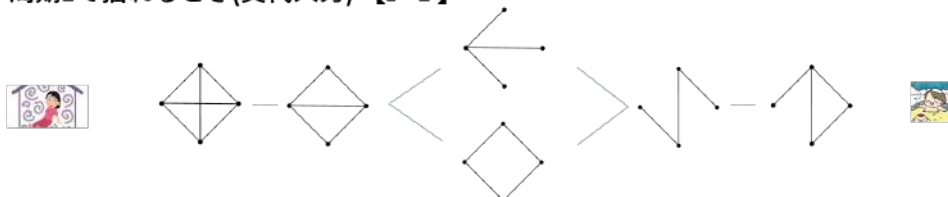
**例：頂点数4のときの量子ウォークにとっての居心地よさランキング**



揺れないとき(一定入力)  $[z=1]$

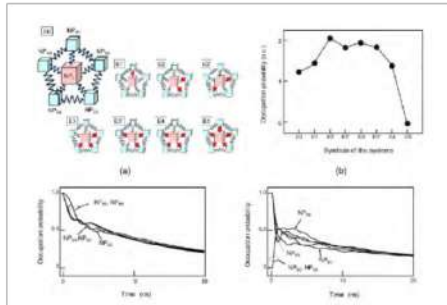


周期2で揺れるとき(交代入力)  $[z=-1]$



# まとめ

ドレスト光子  
出力を最大にする空間構造は何か？



量子ウォークの類似性  
出力を上げる要因として  
⇒ Comfortability of quantum walker

$z=+1$

$$\mathcal{E}_{QW}(G) = (1/4) \cdot (\xi(\mathcal{T}_{u_1-u_2})/\xi(\mathcal{T}) + |E_0|)$$

$z=-1$

$$\mathcal{E}_{QW}(G) = \begin{cases} (1/4) \cdot \{ \xi(\mathcal{T}_{u_1}-\mathcal{T}_{u_N})/\xi(\mathcal{T}) + |E_0| \} & : G \text{ is bipartite} \\ \xi(\mathcal{T}_{u_1}-\mathcal{C}_0)/\xi(\mathcal{C}_0) & : G \text{ is non-bipartite} \end{cases}$$

グラフの部分木と、部分奇サイクルが寄与

$z$ がそれ以外：未解決問題だが様々なグラフの構造が抽出できることが期待される

# ネットワーク量子ウォークモデル における迷路解決挙動

広島工業大学

松岡 雷士

1

## 本日の内容

1. 少しだけ自己紹介
2. ネットワーク量子ウォークモデル
3. 量子ウォーク迷路解法
  1. 解けるネットワークと解けないネットワーク
  2. 収束ステップ数の検証
  3. 有理数の残留振幅
  4. 高速計算法の開発と検証
  5. 既存の量子探索との関連

ネットワーク形成に関する共同研究  
金子悠人さん（指導教員：瀬川悦生 先生）  
2020 年度 横浜国立大学理工学部数物 電子情報軽学科 数理科学EP  
卒業論文「量子ウォークによって誘導される成長ネットワークの構成」

2

# 1. 少しだけ自己紹介

1998– 2007: 東京大学大学院工学系研究科システム量子工学専攻（原子力）  
・ 原子物理、レーザー冷却

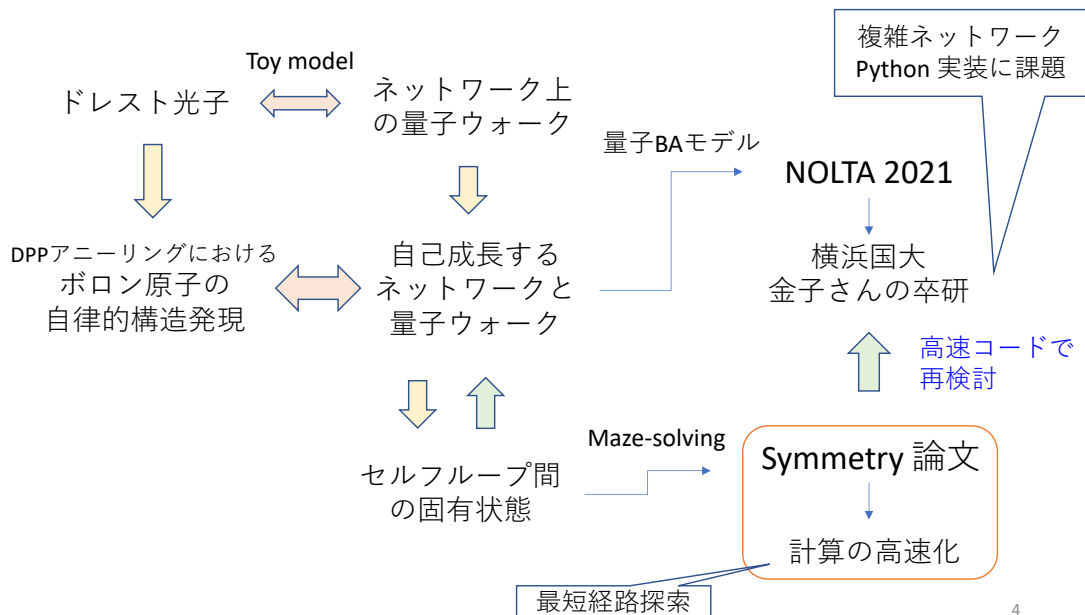
2007– 2013: 原子力研究開発機構 博士研究員・任期付き研究員  
・ 二原子分子の量子制御、量子ウォークによる同位体分離

2013– 2019: 広島大学大学院工学研究科機械物理工学専攻 助教  
・ 半導体レーザーによるプラズマ計測、光誘導ドリフト  
・ 量子ウォークに関する理論研究  
・ 直交多項式、マシユー方程式

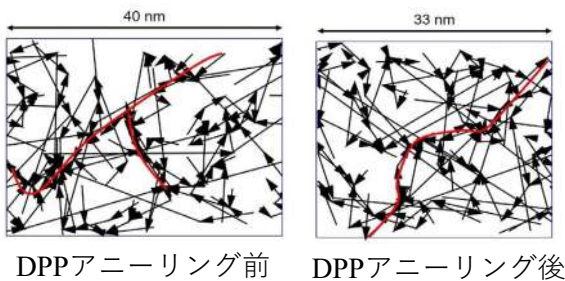
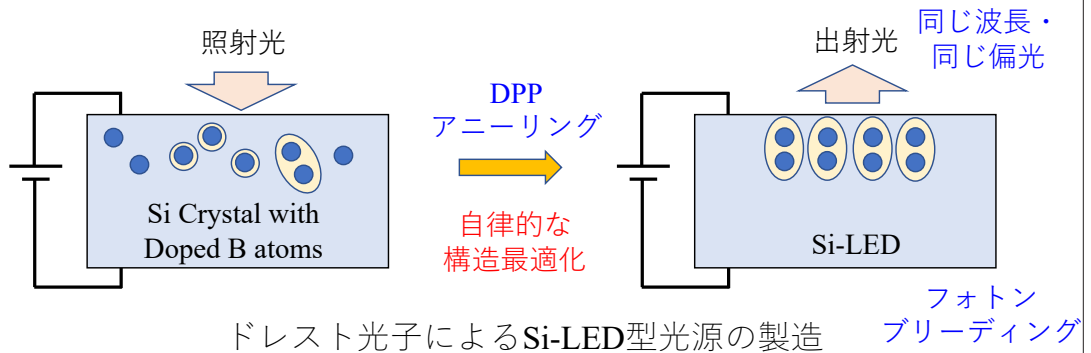
2019– 現在: 広島工業大学工学部電気システム工学科 准教授  
・ ドレスト光子研究起点への参加  
・ ネットワーク量子ウォーク  
・ 上記のやり残したこと全て



## 2. ネットワーク量子ウォークモデル （必要性と研究の流れ）



## ボロン原子の自律的構造発現



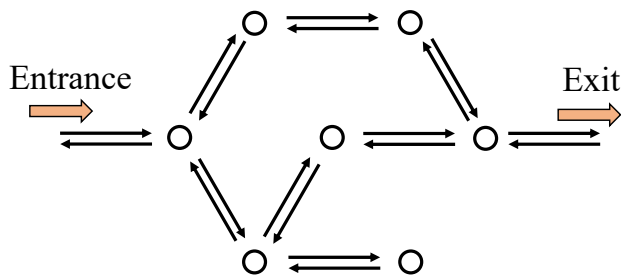
### B原子対の鎖状構造の生成？

M. Ohtsu, T. Kawazoe, Advanced material letters (2019)

ドレスト光子には自律的に材料の構造を最適化する作用がある??

5

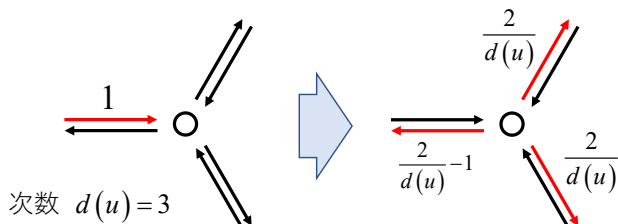
## ネットワーク量子ウォークモデル



- ノード間の有向エッジが複素振幅を持っている
- 定常的に複素振幅を注入することで、システム全体は定常状態に達する

ドレスト光子現象と対応

### 各ノードの時間発展



- グローバーウォークと呼ばれる時間発展法
- 複素振幅の二乗和が時間発展の前後で保存

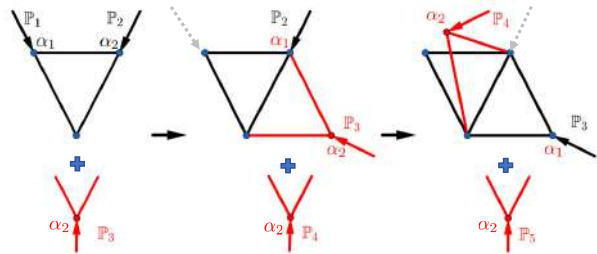
6

# 量子BAモデル

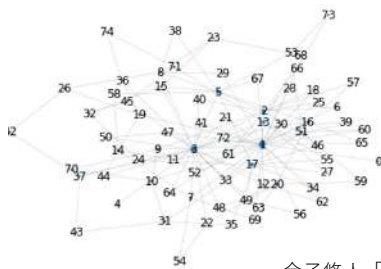
## 量子ウォークによる優先選択

ネットワーク上の**量子ウォークの定常分布**を基準にして優先選択を発動させる

スケールフリーネットワークの量子ウォーク版



最初の数ステップ  
(※ 前ステップとの差異を赤で表記)



出口を固定すると、量子ウォーク特有の性質が出なかった（スケールフリーっぽい）

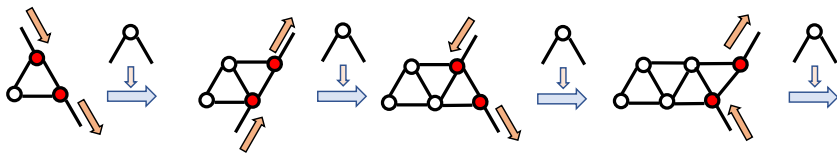
どうすれば直鎖出来るのか？

金子悠人「量子ウォークによって誘導される成長ネットワークの構成」 7

## 量子BAモデル（改良）

入口と出口の付替え：

- ① 新規ノードが出口
- ② 古い入口は削除
- ③ 1ステップ前の出口が入口となる



入口から - 1、出口から 1  
の振幅を定常的に注入



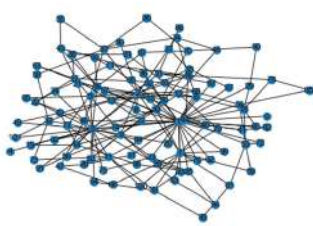
金子悠人「量子ウォークによって誘導される成長ネットワークの構成」 8

# ネットワーク形成

入口からの注入  $\alpha_1 = \sqrt{2} \sin(\theta - 45^\circ)$

$$0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$$

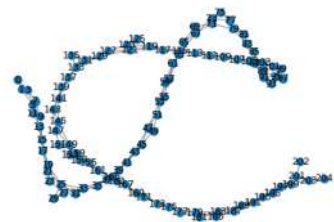
出口からの注入  $\alpha_2 = \sqrt{2} \cos(\theta - 45^\circ)$



$\theta = 90^\circ$

入口から - 1、出口から 1  
の振幅を定常的に注入

この条件に限って  
直鎖構造が形成



$\theta = 0^\circ$

このモデルによるポピュレーション伝播には二つの成分が存在する  
高速伝播成分（電流成分）と低速滞留成分（ランダムウォーク成分）

直鎖が出来るとき、低速滞留成分は全て打ち消されている

金子悠人「量子ウォークによって誘導される成長ネットワークの構成」

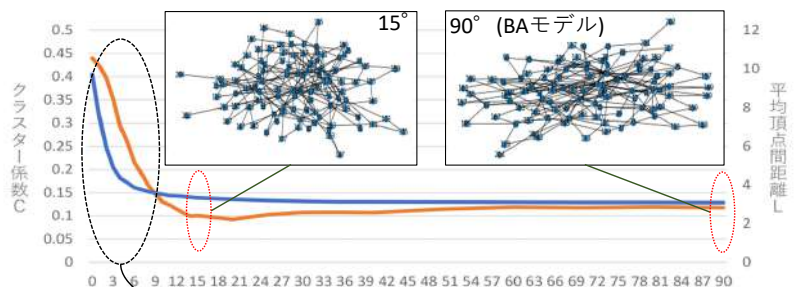
9

スモールワールド  
性との共存

平均頂点間距離  $L$

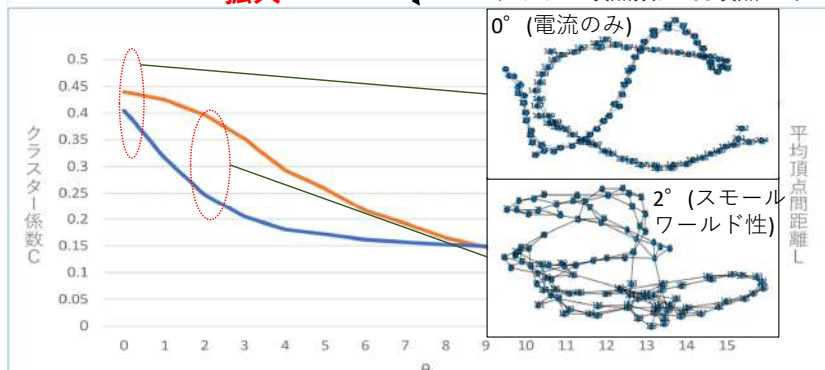
クラスター係数  $C$   
(友人の友人が友人である割合)

→量子ウォークによってスケールフリー性とスモールワールド性が同時に発現



拡大

※橙の線が  $C$  で青の線が  $L$  を表す。  
グラフの頂点数は100頂点であ



金子悠人「量子ウォークによって誘導される成長ネットワークの構成」

# ネットワーク形成の課題

- ・ プログラムの実装におけるメモリ不足 100ノード程度が限界
- ・ 行列計算の課題 (行列の累乗の実装に不備)
- ・ ネットワーク特徴量 (平均距離・クラスター係数) が決定しきれなかった



- ・ 流入が無くてもシンプルなMaze-solvingを優先して論文化
- ・ 粘菌コンピューティングの量子ウォーク版
- ・ 計算・可視化のノウハウの蓄積



行列計算の高速化・省メモリ化  
ネットワーク特徴量の計算は要検討  
再挑戦の準備が整う

11

## 3. 量子ウォーク迷路解法

1. 解けるネットワークと解けないネットワーク
2. 収束ステップ数の検証
3. 有理数の残留振幅
4. 高速計算法の開発と検証
5. 既存の量子探索との関連

12

# 論文出版



Submit to this Journal

Review for this Journal

Edit a Special Issue

## Article Menu

### Article Overview

- Abstract
- Open Access and Permissions
- Share and Cite
- Article Metrics
- Order Article Reprints

### Article Versions

### Related Info Links

Open Access Article

## Maze Solving by a Quantum Walk with Sinks and Self-Loops: Numerical Analysis

by Leo Matsuoka<sup>1,\*</sup>, Kenta Yuki<sup>2</sup>, Hynek Lavička<sup>3</sup> and Etsuo Segawa<sup>4</sup>

<sup>1</sup> Faculty of Engineering, Hiroshima Institute of Technology, Hiroshima 731-5193, Japan

<sup>2</sup> Independent Researcher, Tokyo 150-0023, Japan

<sup>3</sup> Blocksize Capital GmbH, 60329 Frankfurt am Main, Germany

<sup>4</sup> Graduate School of Environment Information Sciences, Yokohama National University, Yokohama 240-8501, Japan

\* Author to whom correspondence should be addressed

Academic Editor: Motochi Ohtsu

Symmetry 2021, 13(12), 2263; <https://doi.org/10.3390/sym13122263>

Received: 29 September 2021 / Revised: 15 November 2021 / Accepted: 19 November 2021 /

Published: 28 November 2021

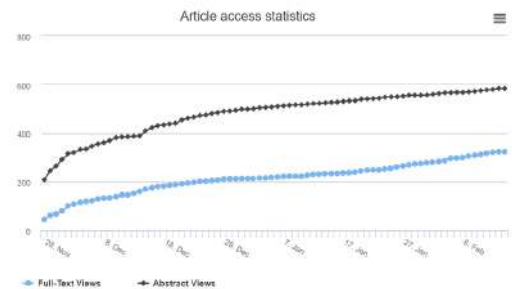
(This article belongs to the Special Issue Quantum Fields)

[View Full-Text](#)

[Download PDF](#)

[Browse](#)

### Article Access Statistics

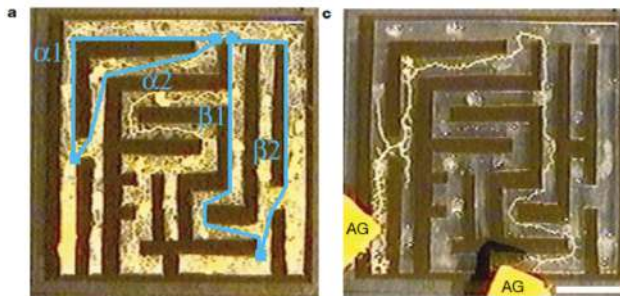


- ・わかりやすいテーマ
- ・グローバー探索の新展開

## 自然現象における自律的経路探索機構

- ・ドレスト光子の自律的挙動 → 局所的なルールに還元できる？

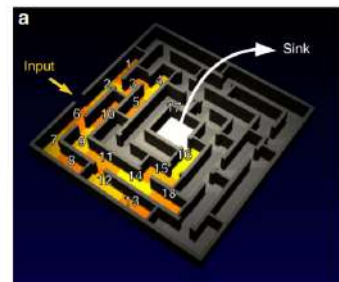
ドレスト光子以外にも



## Maze-solving by an amoeboid organism

Toshiyuki Nakagaki<sup>\*†</sup>,  
Hiroyasu Yamada<sup>\*†‡</sup>, Ágota Tóth<sup>§</sup>

NATURE | VOL 407 | 28 SEPTEMBER 2000 | [www.nature.com](http://www.nature.com)



### ARTICLE

Received 16 Jul 2015 | Accepted 19 Apr 2016 | Published 1 Jun 2016

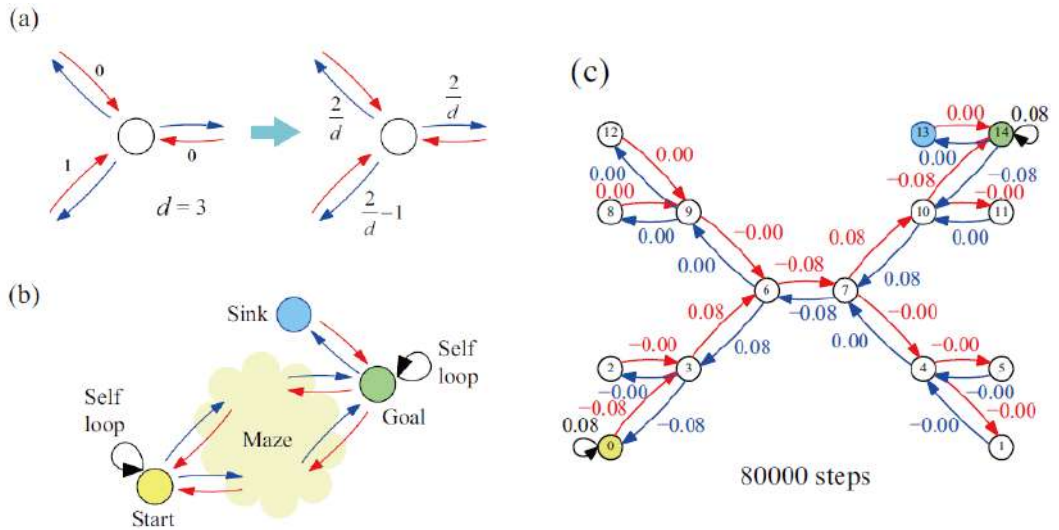
DOI: 10.1038/ncomms16682

OPEN

## Fast escape of a quantum walker from an integrated photonic maze

Filippo Caruso<sup>1</sup>, Andrea Crespi<sup>2,3</sup>, Anna Gabriella Ciriolo<sup>3</sup>, Fabio Sciarrino<sup>4</sup> & Roberto Osellame<sup>1,2,4</sup>

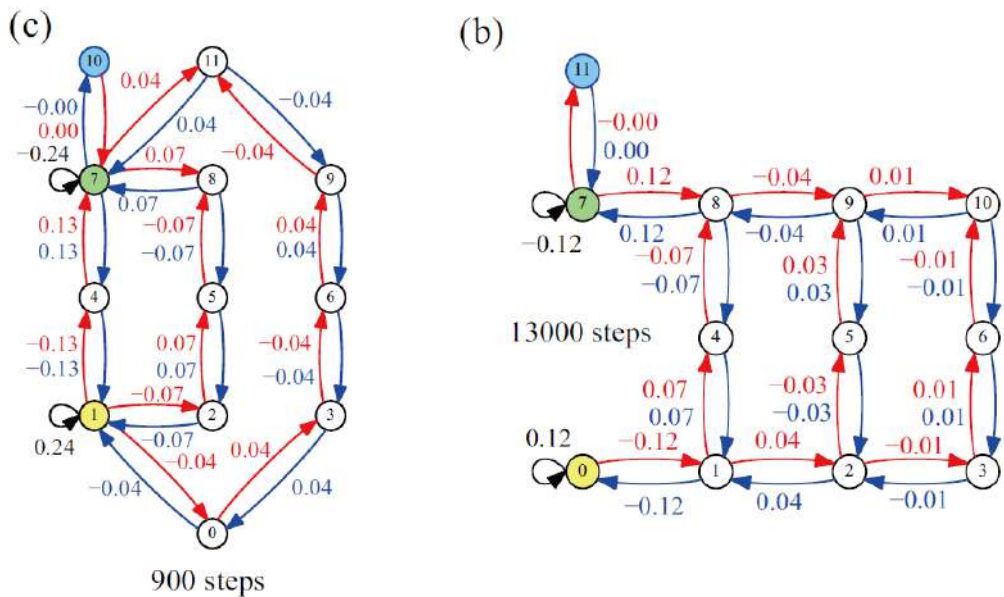
## 論文の概要



**Figure 1.** Conceptual schematics of the numerical model. (a) Example of the time-evolution for a node with three edges injected with the amplitude 1 from one edge. (b) Setup of the start and goal with self-loops and a sink. The colors of the start (yellow), the goal (green), and the sink (blue) are unified in all the examples given later.

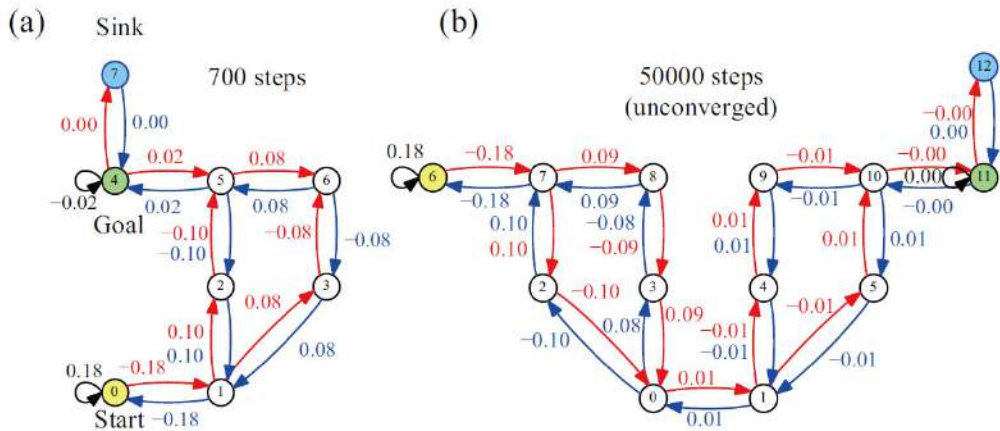
15

## 計算結果



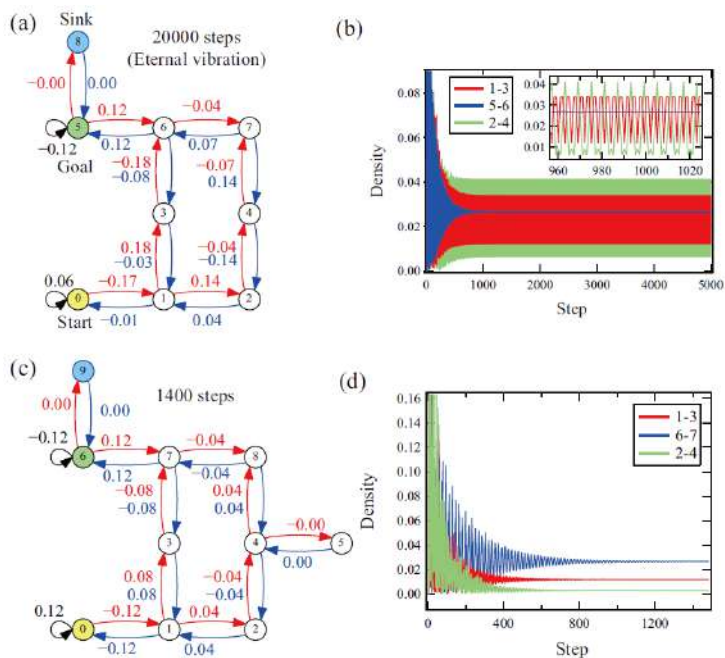
16

## 解けない場合（奇数ループ）



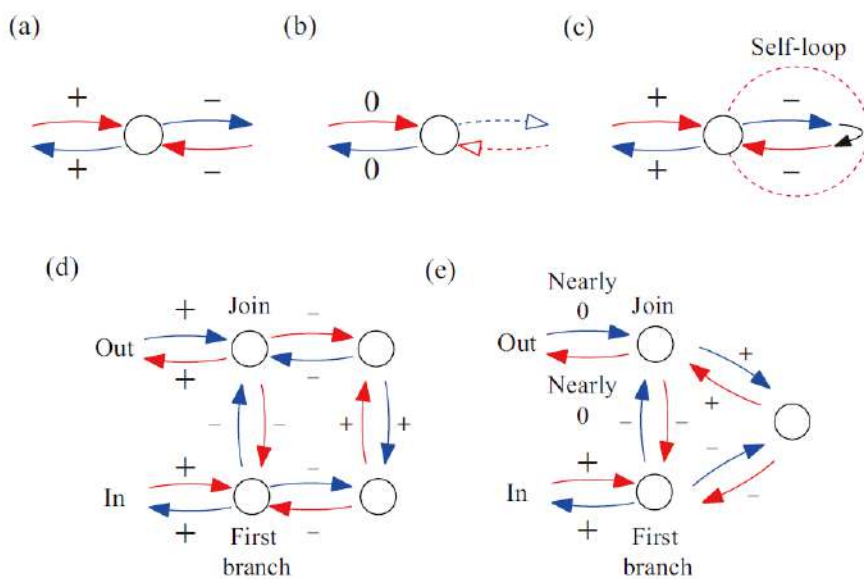
17

## 解けない場合（永久振動）



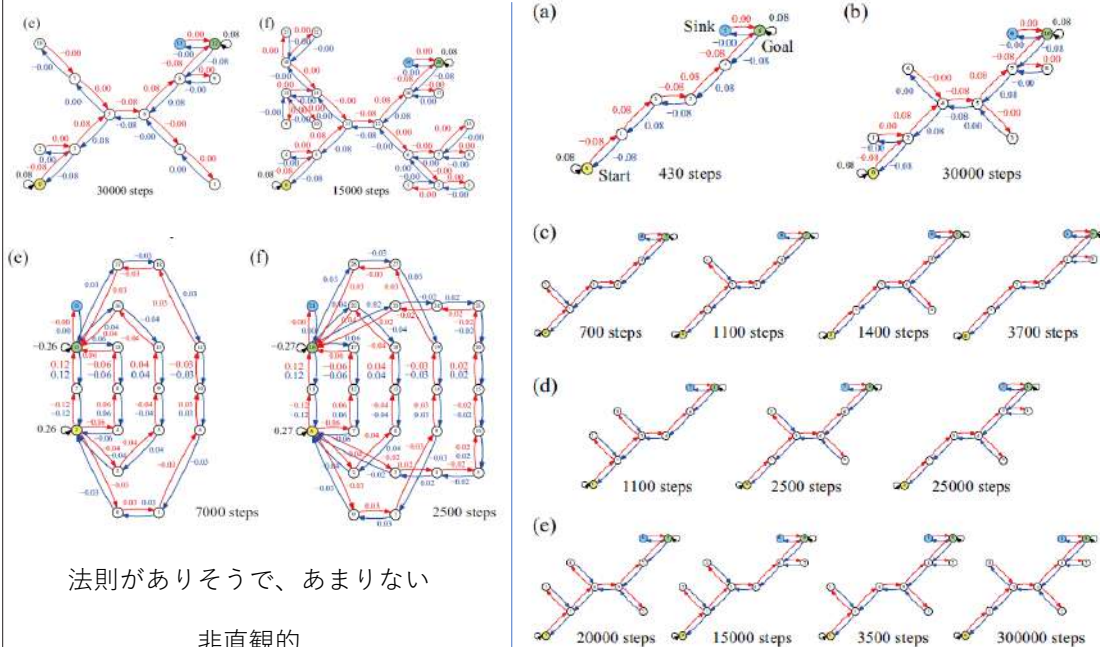
18

## 残留振幅のルールについて



19

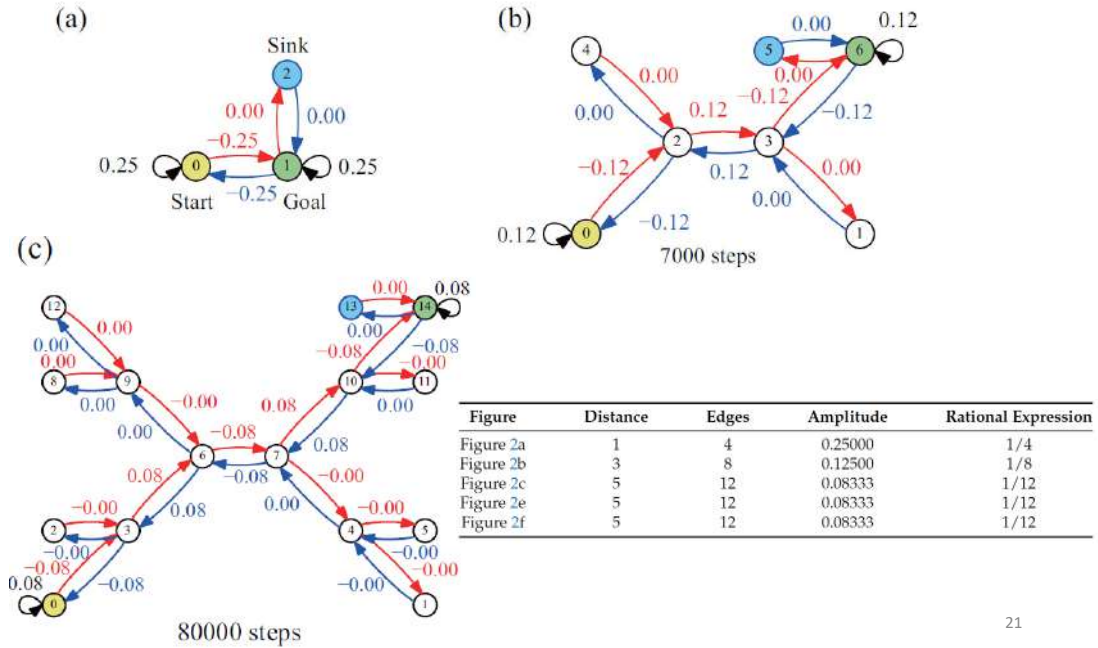
## 収束ステップ数について



法則がありそうで、あまりない

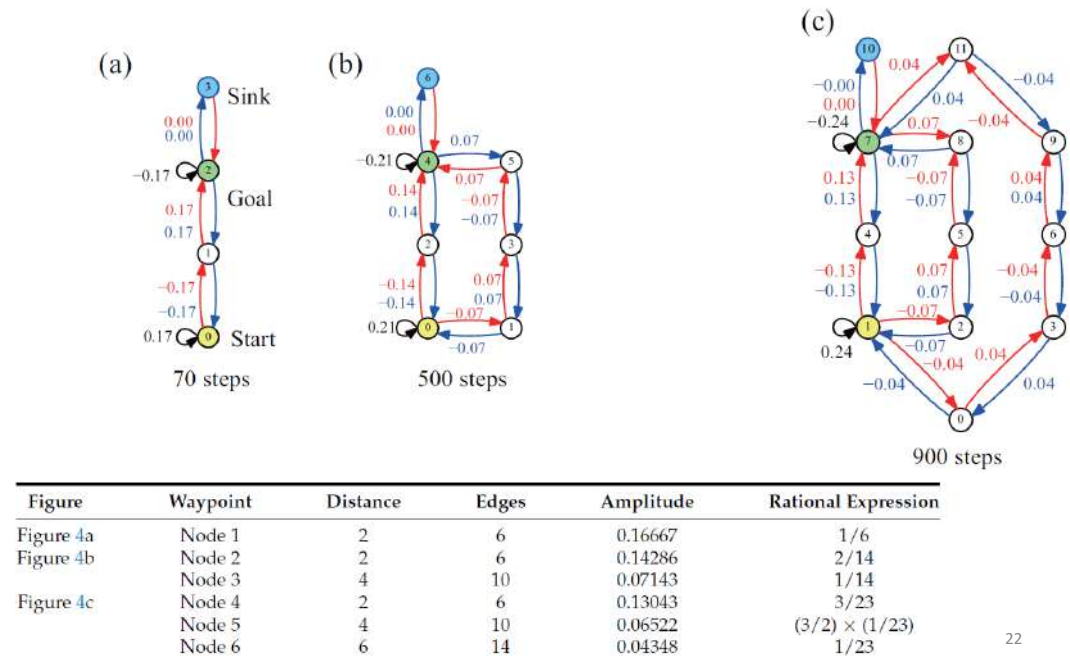
非直観的

## 残量振幅は全て有理数



21

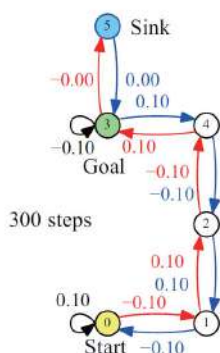
## 振幅の大きさは距離に反比例



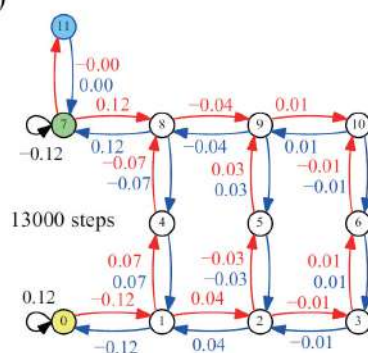
22

## ルート共有があると規則がわからなくなる

(a)



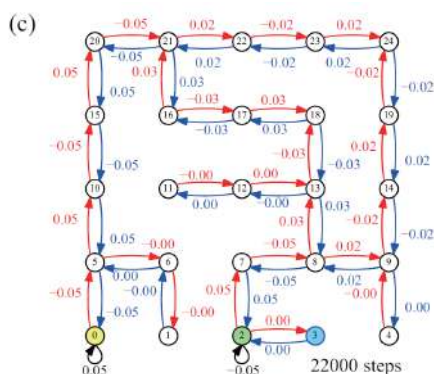
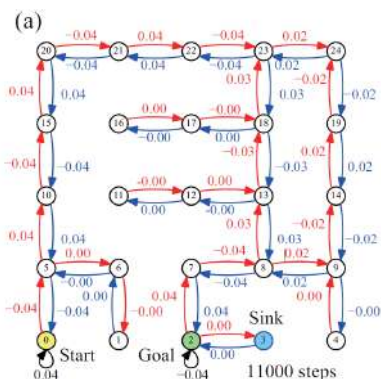
(b)



| Figure    | Waypoint | Distance    | Edges | Amplitude | Rational Expression |
|-----------|----------|-------------|-------|-----------|---------------------|
| Figure 5a | Node 2   | 4           | 10    | 0.10000   | 1/10                |
| Figure 5b | Node 4   | 4           | 10    | 0.0735    | 5/68                |
|           | Node 5   | 6 (= 4 + 2) | 14    | 0.0294    | 2/68                |
|           | Node 6   | 8 (= 4 + 4) | 18    | 0.0147    | 1/68                |

23

## 分岐した部分の距離には確かに反比例

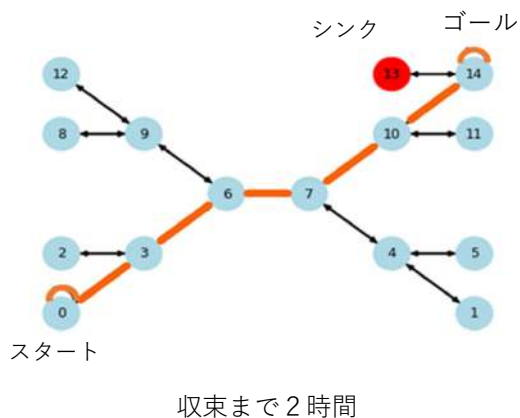


| Figure    | Waypoint | Distance | Amplitude | Rational Expression   |
|-----------|----------|----------|-----------|-----------------------|
| Figure 6a | Node 18  | 9 + 3    | 0.0263    | 1/38                  |
|           | Node 19  | 9 + 5    | 0.0158    | $(3/5) \times (1/38)$ |
| Figure 6c | Node 13  | 7 + 5    | 0.027     | 1/37                  |
|           | Node 14  | 7 + 7    | 0.019     | $(5/7) \times (1/37)$ |

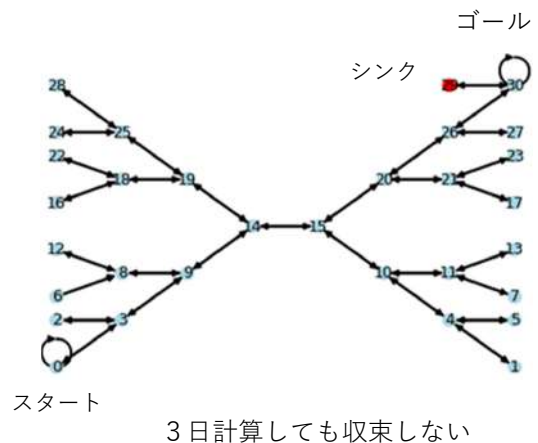
24

## 高速化前の計算時間

### $2^3$ のツリーライク構造



### $2^4$ のツリーライク構造



25

## ボトルネックと高速化手法の概要

### 旧コード

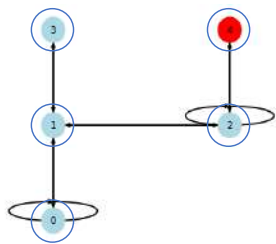
- 各ノードを「オブジェクト」で表現
- 「オブジェクト」が散乱行列をメモリ内に保持している
- 各ノードを可視化する際の座標の設定が容易
- 時間発展のたびに各ノードの「オブジェクト」を呼び出す

### 高速化

- 系の全時間発展を一つの行列で表現
- オブジェクト呼び出しが一回で済む
- 行列の累乗を専用関数で実行
- 対角化により一瞬で計算が終了

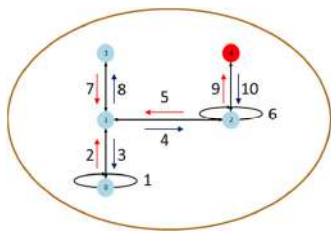
26

## 高速化手法の概要



$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{d}-1 & \frac{2}{d} & \frac{2}{d} & \cdots & \frac{2}{d} \\ \frac{2}{d} & \frac{2}{d}-1 & \frac{2}{d} & \cdots & \frac{2}{d} \\ \frac{2}{d} & \frac{2}{d} & \frac{2}{d}-1 & \cdots & \frac{2}{d} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{2}{d} & \frac{2}{d} & \frac{2}{d} & \cdots & \frac{2}{d}-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ \vdots \\ a_d \end{pmatrix}$$

全てのノード  
で時間発展操  
作を逐次行う



$$\begin{pmatrix} A_1(t+1) \\ A_2(t+1) \\ A_3(t+1) \\ A_4(t+1) \\ A_5(t+1) \\ A_6(t+1) \\ A_7(t+1) \\ A_8(t+1) \\ A_9(t+1) \\ A_{10}(t+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/2-1 & 2/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2/2-1 & 2/2 & 2/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2/2 & 2/2-1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2/2-1 & 2/2 & 2/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2/2 & 0 \\ 0 & 0 & 2/2 & 2/2-1 & 2/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2/2 & 2/2 & 2/2-1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2/2 & 2/2-1 & 2/2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1(t) \\ A_2(t) \\ A_3(t) \\ A_4(t) \\ A_5(t) \\ A_6(t) \\ A_7(t) \\ A_8(t) \\ A_9(t) \\ A_{10}(t) \end{pmatrix}$$

全てのノードの時間発展操作をまとめて行う

27

## 高速化の検証結果

### 2<sup>3</sup>のツリーライク構造

|                          | 10 <sup>6</sup> ステップ[s] | 2 × 10 <sup>6</sup> ステップ[s] |
|--------------------------|-------------------------|-----------------------------|
| 非行列プログラム                 | 7200                    | 14400                       |
| 行列化プログラム                 | 15.2571                 | 31.0626                     |
| GPU使用時                   | 814.4004                | 1647.1699                   |
| linalg.matrix_power(CPU) | 0.0005~0.0006           | 0.0005~0.0015               |
| linalg.matrix_power(GPU) | 0.0043                  | 0.0044                      |

行列化と対角化により、  
**10<sup>8</sup>倍**の計算スピードアッ  
プを実現

GPUの利用は現在はスピー  
ドダウンだが、大きなシス  
テムではさらなる高速化の  
可能性

### 2<sup>4</sup>のツリーライク構造

|                          | 10 <sup>6</sup> ステップ[s] | 2 × 10 <sup>6</sup> ステップ[s] |
|--------------------------|-------------------------|-----------------------------|
| 非行列プログラム                 | 測定不可能                   | 測定不可能                       |
| 行列化プログラム                 | 21.2829                 | 42.9818                     |
| GPU使用時                   | 813.7310                | 1628.5093                   |
| linalg.matrix_power(CPU) | 0.0009~0.0015           | 0.001~0.002                 |
| linalg.matrix_power(GPU) | 0.0028                  | 0.0029                      |

大岩 舜 卒業論文「量子ウォー  
ク迷路解法の計算アルゴリズム  
改善による高速化」

28

# 高速化の成功で見えてくる可能性

- $10^8$ 倍以上の計算スピードアップ
- 大きな系での速度検証
- 系の自動生成と自動解析による性質解明
- ネットワーク形成の計算が容易に
- 古典経路探索アルゴリズムとの速度比較

29

## 量子探索の本質的发展か？

### Finding paths with quantum walks or quantum walking through a maze

Daniel Reitzner

RCQI, Institute of Physics, Slovak Academy of Sciences, Dubravská cesta 9, 845 11 Bratislava, Slovakia

Mark Hillery and Daniel Koch

Department of Physics, Hunter College of the City University of New York,  
695 Park Avenue, New York, NY 10065 USA and

Physics Program, Graduate Center of the City University of New York, 365 Fifth Avenue, New York, NY 10016

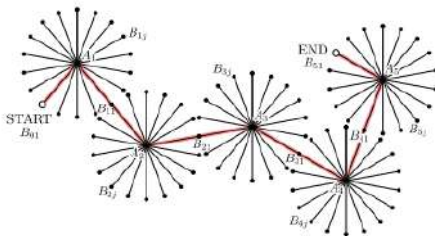


FIG. 1: In the chain of stars  $\mathcal{G}$  the task is to find the whole path from a known start vertex to an unknown end vertex.

Transient signal から Steady-state へ

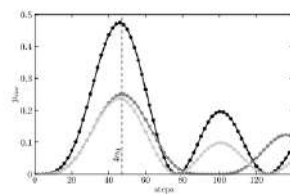
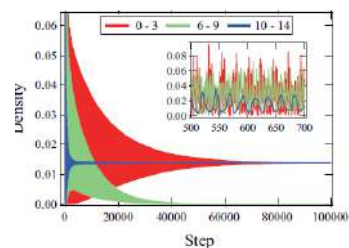
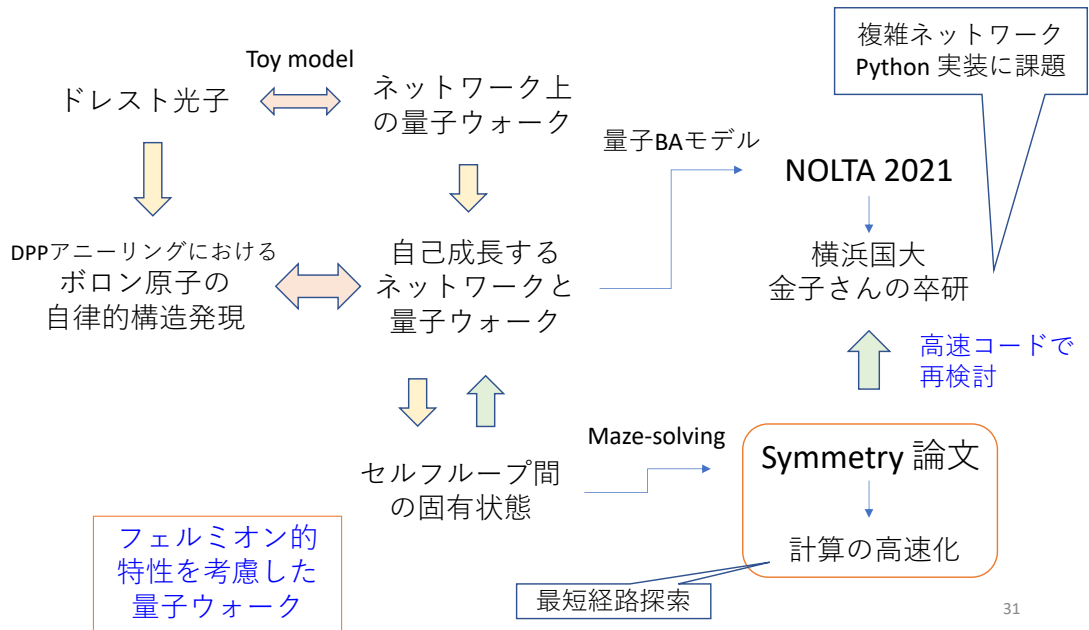


FIG. 2: Typical evolutions of the success probability to find the next connection in the chain of stars for different starting stars connections with  $J_f = 11$ ,  $N = 450$ —dark when starting near the start vertex, medium gray when starting at the first connection, and light when starting in the connection of some middle (fifth and sixth) stars, or without correcting terms from reflections. Dots represent exact solution from Eq. (29), while the lines are approximations by Eq. (33).



30

## まとめにかえて



31

# Off-shell mathematical science toward system's analysis and designing

2022年2月22日、2月24日 @九州大学IMI

(On Line開催)

量子コヒーレンス・デコヒーレンス指標と  
その時間発展についての考察  
＝光合成の研究解析に向けて＝

Theoretical consideration on measures of quantum coherence and  
decoherence and its time evolution  
＝Towards to studies of photosynthesis＝

T. Yabuki

矢吹哲夫(北星学園大学 全学共通教育科目部門)

 Hokusei Gakuen University

九大IMI共同利用研究集会(オンライン)

1

## 今回の話題提供内容

光合成とドレスト光子も念頭に置いた、環境との相互作用(散逸)の中での  
量子コヒーレンス・デコヒーレンス解析  $\Rightarrow \hat{\rho}$ を用いて

(0) 光合成におけるコヒーレンスとデコヒーレンス (Goldilock Effect)

(I) 指標(measure)の比較解析 私自身の考察と再構成、試論的考察

○4つの指標について(2自由度と3自由度以上について)

(1) Indistinguishability index  $P_{ID}(\hat{\rho})$  (By Mandel) 2自由度に限定

(2) Purity of state  $P(\hat{\rho})$

(3) Entropy index  $S(\hat{\rho})$   $\hat{\rho} = \sum_{i,j} \rho_{ij} |\psi_i\rangle \langle \psi_j| \Rightarrow \rho_{ij}$  (密度行列)

(4) determinant  $Det(\hat{\rho})$

(II) 時間発展について(密度行列に対するマスター方程式)

過去の研究(特に②について)の紹介とそれを踏まえた我々の(前田氏との)研究と今後の展望  
私自身の考察と再構成、試論的考察

(III) まとめ、今後の考察課題

今回も私自身の試論的考察を踏まえた先行研究の咀嚼紹介

●心配は2点:

①釈迦に説法 or ②私論的勘違い

九大IMI共同利用研究集会(オンライン)

2

## (0) 光合成におけるコヒーレンスとデコヒーレンス

### (Goldilock Effect ?)

#### ○目的:

光合成システムでの、特に集光色素集団が光子を吸収した後の反応中心 (RC) までの高効率、高速な励起エネルギー移動を量子コヒーレンスとその消失 (デコヒーレンス) で説明できるという近年の研究の理解その有力なメカニズム理論の一つとして「量子ランダムウォーク」がある。ただし、近年の (光合成を含めた) 生物物理学の研究では、コヒーレンスとデコヒーレンスが共に重要な働きをして、移送効率等を高めているという共通理解が出来ている。(Goldilock Effect ! ?)

#### ●量子コヒーレンスの度合いを測る指標について:

以下複数の指標がある! ? (特に 4 については、光合成の熱 (量子) 統計力学的なダイナミクスを解析するためにオリジナルに提起した指標である。)

1 Indistinguishability  $P_{ID}$  (by L.Mandel : 2次元に限られる?)

2 Purity of state  $\text{Tr}(\rho^2)$

3  $\det \rho$  (比較参考のために今回考察した。)

4  $S(\rho)$  (by T.Y)

近年のこのテーマでの論文では、主に (2) が使われている。

#### ●量子コヒーレンスの消失 (デコヒーレンス) と散逸を含む時間発展方程式

近年の光合成解析では、多く「Lindblad方程式」が使われている。

目的テーマの理論解析では、色素分子の「基底状態と励起状態」では、2 準位系について (パウリ行列を用いた) の「Lindblad方程式」が使われていて、その解析内容については、しばらく前に自分なりの定量的トレースを行なった内容を踏まえて、今回その解の振舞いを解析的に調べた。

九大IMI共同利用研究集会 (オンライン)

3

## 参考文献

### ①The quantum Goldilocks effect:

Seth Lloyd, Masoud Mohseni, Alireza Shabani, Herschel Rabitz [arXiv preprint](#)

### ②Quantum coherence in biological systems :

Seth Lloyd *J. Phys.: Conf. Ser.* **302** 012037, 2011

### ③Environment-Assisted Quantum Walks in Photosynthetic Energy Transfer

Masoud Mohseni, Patrick Rebentrost, Seth Lloyd, and Alan Aspuru-Guzik *J. Chem. Phys.* **129**, 174106 (2008)

### ④Quantum effects in biology: golden rule in enzymes, olfaction, photosynthesis and magnetodetection

⑤ Decoherence, einselection, and the quantum origins of the classical  
W.H. Zurek *Rev. Mod. Phys.* **75**, 715, 2003

### ⑥Coherence and indistinguishability

L.Mandel *Optics Letters* vol16.No.23, 1991

### ⑦ Dephasing-assisted transport: quantum networks and biomolecules

M B Plenio, S F Huelga - *New Journal of Physics*, 2008

### ⑧ Noise-assisted energy transfer in quantum networks and light-harvesting

complexes A W Chin<sup>1,4</sup>, A Datta<sup>2,3</sup>, F Caruso<sup>1,2,3</sup>, S F Huelga<sup>1,4</sup> and M B Plenio<sup>1,2,3</sup> *New Journal of Physics*, **12** 065002, 2010

### ⑨ Recovery of Purity in Dissipative Tunneling Dynamics

Sambarta Chatterjee and Nancy Makri\* *The Journal of Physical Chemistry Letters*, 2020

⑩ Survival of quantum features in the dynamics of a dissipative quantum system and their effect on the state purity  
Davinder Singh *Phys. Rev. E* **103**, 052124, 2021

九大IMI共同利用研究集会 (オンライン)

4

# 急遽引用文 (大津先生の冒頭講演をお聞きして)

文献③ **Environment-Assisted Quantum Walks in Photosynthetic Energy Transfer** Masoud Mohseni, Patrick Rebentrost, Seth Lloyd,<sup>2</sup> and Alan Aspuru-Guzik *J. Chem. Phys.* **129**, 174106 (2008)

## Environment-Assisted Quantum Walks in Photosynthetic Energy Transfer

Masoud Mohseni,<sup>1</sup> Patrick Rebentrost,<sup>1</sup> Seth Lloyd,<sup>2</sup> and Alán Aspuru-Guzik<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Department of Chemistry and Chemical Biology, Harvard University, 12 Oxford St., Cambridge, MA 02138

<sup>2</sup>Department of Mechanical Engineering, Massachusetts Institute of Technology, 77 Massachusetts Avenue, Cambridge MA 02139

In this work, we develop a theoretical framework for studying the role of quantum coherence in energy transfer dynamics in molecular systems within the Born-Markov approximation in the Lindblad formalism.

...

We demonstrate **that the efficiency increases from 70% for a purely unitary quantum walk to 99% in the presence of environment-assisted quantum jumps.**

九大IMI共同利用研究集会(オンライン)

5

6

## 紅色細菌の生活環境

### 紅色細菌(purple bacteria)

図.指導卒論より(北田勇人氏)

生活環境



池の中



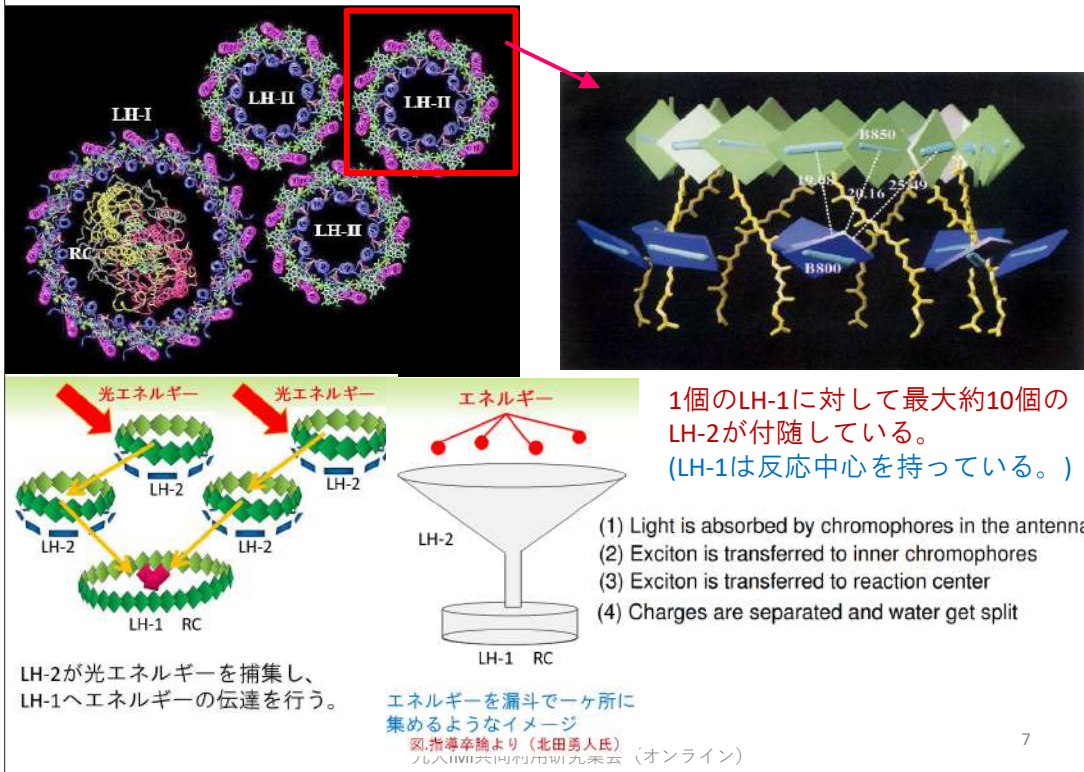
上層の土壌内

$\lambda=500\text{nm}$ 付近  
 $\lambda=800\text{nm}$ 以上 } の光だけが**紅色細菌(purple bacteria)**に到達する

植物が光合成で使用するPAR(光合成有効放射)は  
波長が**400nm~700nm**の光である

**紅色細菌(purple bacteria)**は他の植物以上に過酷な環境から進化圧を受けながら、より効率的に光捕集を行うことが出来るように卓越した**光捕集システム**を発展させてきた。

## Purple Bacteria



7

<引用> The quantum Goldilocks effect:

Seth Lloyd<sup>1,2</sup>, Masoud Mohseni<sup>2</sup>, Alireza Shabani<sup>3</sup>,  
Herschel Rabitz [arXiv preprint](#)

## The Goldilocks principle for complex,

The story of Goldilocks and the three bears was published by the English poet Robert Southey in 1837, although it is presumably a variation on a much older folktale. In the version known today, a small girl with blonde hair, Goldilocks, is lost in a forest. She finds a house whose inhabitants have just left it. The house contains three of everything – there are three chairs, three bowls of porridge sitting on a table, three beds, etc. One of the chairs is too big for Goldilocks, one too small, and one just the right size. So she sits on the one that is just right. One of the bowls of porridge is too hot, one too cold, and one just the right temperature. So she eats the one that is just right. One of the beds is too hard, one too soft, and one just the right degree of firmness. So she lies down on the one that is just right and falls asleep. At this point the three bears arrive home and . . . – the ending ranges from gruesome to happy depending on the version.

※porridgeオートミールに牛乳または水を入れて作ったかゆ; 英国人は朝食によく食べる

### ゴールドロックスの原理(松竹梅の法則)

経済やマーケティングをはじめ、さまざまな領域でこの概念は用いられる。

九大IMI共同利用研究集会(オンライン)

8

# ( I ) 指標(measure)の比較解析

私自身の考察と再構成、試論的考察

○4つの指標について(2自由度と3自由度以上について)

(1) Indistinguishability index (By Mandel)

(2自由度に限定して)

(2) Purity of state

(3) Entropy index

(4) determinant

九大IMI共同利用研究集会 (オンライン)

9

## (1) Indistinguishability index (By Mandel)

OPTICS LETTERS / Vol. 16, No. 23 / December 1, 1991

### Coherence and indistinguishability

L. Mandel

Department of Physics and Astronomy, University of Rochester, Rochester, New York 14627

Received July 2, 1991

It has long been known that the interference produced by two light beams is related both to their mutual coherence and also to the intrinsic indistinguishability of the photon paths. With the help of a decomposition of the density operator it is shown that the degree of indistinguishability equals the degree of coherence. This provides the fundamental link between the wave and the particle descriptions.

#### ＝論文概要＝ (矢吹的把握)

一光子の、2つのスリット(2次の射出源) 1, 2から射出された2つの状態(スクリーンまでの2つの経路を辿る状態)を包含する量子状態の上で、「密度演算子」(その行列表現としての「密度行列」)によって表現される“純粋状態”、“混合状態”を考察し、純粋状態に特徴的な2つの“経路光子”の“干渉”を経路を区別できないindistinguishabilityとして位置付けて、その度合いを(連続的に)測る指標が提起されている。そして、この指標値 $P_D$ が場の相関関数と一致することが示されている。

九大IMI共同利用研究集会 (オンライン)

10



## (2) Purity of state $P(\rho)$

純粋状態を測る指標

$$P(\rho) \equiv \text{tr} \rho^2$$

○例えば

$$\rho_{IDij} = \begin{pmatrix} |\alpha|^2 & \alpha\beta^* \\ \alpha^*\beta & |\beta|^2 \end{pmatrix} \longrightarrow \text{tr} \rho^2 = (|\alpha|^2)^2 + (|\beta|^2)^2 + 2|\alpha\beta|^2$$

$$= (|\alpha|^2 + |\beta|^2)^2 = 1 \quad \therefore P(\rho) = 1$$

純粋状態

$$\rho'_{IDij} = \begin{pmatrix} |\alpha|^2 & 0 \\ 0 & |\beta|^2 \end{pmatrix} \longrightarrow \text{tr} \rho'^2 = |\alpha|^4 + |\beta|^4$$

$$= (|\alpha|^2 + |\beta|^2)^2 - 2|\alpha\beta|^2 = 1 - 2|\alpha\beta|^2$$

$$\therefore P(\rho') < 1$$

混合状態

## Purity of state

純粋状態を測る指標 Purity of state

$$P(\hat{\rho}) \equiv \text{tr} \hat{\rho}^2$$

密度演算子  $\hat{\rho}$  は、

- ①  $\hat{\rho}^\dagger \hat{\rho} = \hat{I}$  (エルミート行列)
- ②  $\hat{\rho}$  の固有値  $> 0$  (対角成分  $\rho_{ii} > 0$ )
- ③  $\text{tr} \hat{\rho} = 1$  (対角成分の和 = 1)



トレースのサイクリック不変性（循環性？）より

- ④ Purity of state  $P(\hat{\rho}) \equiv \text{tr} \hat{\rho}^2$  は、 $\hat{\rho}$  についてのユニタリー不変性を備えている。

①より、密度演算子  $\rho$  は、ユニタリー変換で対角化され、③より  $P(\rho)$  は対角化表示で計算しても良い！

$$P(\hat{\rho}) \equiv \text{tr} \hat{\rho}^2 = \sum_{i=1}^n \rho_{Dii}^2 \quad \text{以下 } \rho_{Dii} = p_i \text{ と書く。}$$



研究ノート No.146 9/30(木)

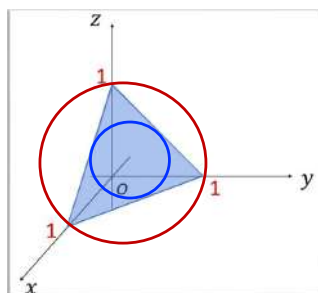
# Purity of state

純粋状態を測る指標 Purity of state

$$P(\hat{\rho}) \equiv \text{tr} \hat{\rho}^2$$



$$\frac{1}{n} \leq P(\hat{\rho}) \leq 1$$



○多様な方法で自己検証（証明）を行なったが、ここでは幾何学的な証明に基づく理解を記しておきたい。

対角化表示で

$$\text{tr} \hat{\rho} = 1 \Rightarrow p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1 \Rightarrow n\text{個の座標軸切片が1の超平面}$$

$$\text{tr} \hat{\rho}^2 = p_1^2 + p_2^2 + \dots + p_n^2 \Rightarrow \text{半径} \sqrt{\text{tr} \hat{\rho}^2} \text{ の } n\text{次元球面}$$

・最大になるのは球面が $n$ 個の座標軸切片1を通るとき  $\Rightarrow$  半径  $\sqrt{\text{tr} \hat{\rho}^2} = 1$

$$\therefore \text{Max} P(\hat{\rho}) = 1$$

・最小になるのは球面が超平面に接するとき

$$\Rightarrow \text{原点と超平面の距離} = \frac{|1 \cdot 0 + 1 \cdot 0 + \dots + 1 \cdot 0 - 1|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + \dots + 1^2}} = \frac{1}{\sqrt{n}} \quad \therefore \text{Min} P(\hat{\rho}) = \frac{1}{n}$$



対角化表示で

・  $\text{Max} P(\hat{\rho}) = 1 \Rightarrow$  対角成分の一つだけ1で他はすべて0 < 純粋状態 >

・  $\text{Min} P(\hat{\rho}) = \frac{1}{n} \Rightarrow$  対角成分がすべて  $1/n$  < 最大混合状態 >

九大IMI共同利用研究集会（オンライン）

= 自己確認（幾何ベクトルによる証明の結果） =

（1）半径  $R$  の  $d$  次元球  $B$  と  $(d-1)$  次元の超平面  $L$  が接するとき：

$R = \frac{1}{\sqrt{d}}$  で、その時の接点は  $(\frac{1}{d}, \frac{1}{d}, \dots, \frac{1}{d})$  であり、このとき

$$\text{Tr}(\rho^2) = R^2 \text{ は最小値 } \left(\frac{1}{\sqrt{d}}\right)^2 = \frac{1}{d} \text{ となる。}$$

（2）半径  $R$  の  $d$  次元球  $B$  が  $(d-1)$  次元の超平面  $L$ （超正三角形？）の  $d$  個の頂点を通るとき、

$R = 1$  で、その時の  $d$  個の交点は  $(1, 0, \dots, 0)$ 、 $(0, 1, \dots, 0)$ 、 $\dots$ 、 $(0, 0, \dots, 1)$  であり、このとき

$$\text{Tr}(\rho^2) = R^2 \text{ は最大値 } = 1 \text{ となる。}$$

## = 自己確認(数式による証明) =

$$\frac{1}{d} \leq \text{Tr}(\rho^2) \leq 1$$

= 証明 =

$$\text{Tr}(\rho^2) = \sum_{i=1}^d p_i^2 = (p_1 + \dots + p_d)^2 - 2 \sum_{i>j} p_i p_j = 1 - 2 \sum_{i>j} p_i p_j$$

$p_i \geq 0$  より、

$$\text{Tr}(\rho^2) \leq 1 \quad (\text{等号成立は、} p_i = \delta_{im} \text{ のときで純粋状態})$$

一方、

$$p_i^2 + p_j^2 \geq 2p_i p_j \quad \dots \textcircled{5}$$

(等号成立は  $p_i = p_j$  のとき)

両辺を  $\sum_{i>j}^d$  の総和をとって、

$$\sum_{i>j}^d (p_i^2 + p_j^2) \geq 2 \sum_{i>j}^d p_i p_j \quad \dots \textcircled{6}$$

$$\text{左辺} = \sum_{i>j}^d (p_i^2 + p_j^2) = (d-1) \sum_{i=1}^d p_i^2 \quad \dots \textcircled{7}$$

④より、

$$\text{右辺} = 2 \sum_{i>j}^d p_i p_j = 1 - \sum_{i=1}^d p_i^2 \quad \dots \textcircled{8}$$

⑦、⑧を⑥に代入して、

$$(d-1) \sum_{i=1}^d p_i^2 \geq 1 - \sum_{i=1}^d p_i^2 \quad \dots \textcircled{9}$$

$$\therefore \sum_{i=1}^d p_i^2 \geq \frac{1}{d} \quad (\text{等号成立はすべて} i \text{ で } p_i = \frac{1}{d} \text{ のとき}) \quad \dots \textcircled{10}$$

$$\therefore \text{Tr}(\rho^2) \geq \frac{1}{d} \quad (\text{等号成立はすべて} i \text{ で } p_i = \frac{1}{d} \text{ のとき}) \quad \dots \textcircled{11}$$

よって、

$$\frac{1}{d} \leq \text{Tr}(\rho^2) \leq 1 \quad \text{が成立する。//}$$

九大IMI共同利用研究集会(オンライン)

17

## Purity of state

純粋状態を測る指標 **Purity of state**

対角化表示で  $P(\hat{\rho}) \equiv \text{tr} \hat{\rho}^2$

- ・ 純粋状態 → 対角成分の一つだけ 1 で他はすべて 0

演算子表示で  $\hat{\rho} = |\Phi_i\rangle \langle \Phi_i|$

- ・ 混合状態 → 対角成分がすべて  $1/n$

演算子表示で  $\hat{\rho} = \sum_{i=1}^n |\Phi_i\rangle \langle \Phi_i|$

○ 2 自由度状態で考察

$$P(\hat{\rho}) \equiv \text{tr} \hat{\rho}^2 = \rho_{11}^2 + \rho_{22}^2$$

- ・ 最大になるのは球面が2個の座標軸切片が 1 を通るとき → 半径  $\sqrt{\text{tr} \hat{\rho}^2} = 1$

$$\rho_{Dij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ or } \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

九大IMI共同利用研究集会(オンライン)

18

### (3) Entropy index $S(\hat{\rho})$

$$S(\hat{\rho}) \equiv -\text{tr} \hat{\rho} \ln \hat{\rho}$$

密度演算子  $\hat{\rho}$  は、ユニタリー変換で対角化され、③より  $P(\hat{\rho})$  は対角化表示で計算しても良い！

$$S(\hat{\rho}) = -\sum_{i=1}^n \rho_{Dii} \ln \rho_{Dii} = -\sum_{i=1}^n p_i \ln p_i$$



$$0 \leq S(\hat{\rho}) \leq \ln n$$

< 純粋状態 >

< 完全混合状態 >

密度演算子  $\hat{\rho}$  の固有値（分布）のエントロピー！？

※偏光度を測る指標である、偏光エントロピーも同じ着眼

→ ただし、（熱力学第2法則に対応する）ダイナミクスとしてのエントロピーとしては完全な定式化ではない！？

位相空間の情報と絡めて、（量子統計力学的）ダイナミクスとしての補正項（！？）を導出（2016年物理学会発表）

### (4) determinant index $Det(\hat{\rho})$

$Det(\hat{\rho}) \equiv \hat{\rho}$  の固有値の積

密度演算子  $\hat{\rho}$  は、ユニタリー変換で対角化され、 $Det(\hat{\rho})$  は対角化表示で計算しても良い！

$$Det(\hat{\rho}) = \prod_{i=1}^n p_i \quad \rightarrow \quad 0 \leq Det(\hat{\rho}) \leq \left(\frac{1}{n}\right)^n$$

< 純粋状態 >

< 完全混合状態 >

= 自己検証 =

$$p_i \geq 0$$

$$\sum_{i=1}^n p_i = 1$$

より相加平均  $\geq$  相乗平均を使って、

$$= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n p_i \geq \left( \prod_{i=1}^n p_i \right)^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n}$$

∴  $\left(\frac{1}{n}\right)^n \geq Det(\hat{\rho})$  最大値をとるのは、すべて  $p_i = \frac{1}{n}$  の完全混合状態

## 2 自由度での 4 つの指標の比較考察

### (1) Indistinguishability index

$$P_{ID}(\hat{\rho}) \equiv \frac{|\rho_{12}|}{\sqrt{\rho_{11}\rho_{22}}}$$

$$\Rightarrow P_{ID}^2 = \frac{|\rho_{12}|^2}{\rho_{11}\rho_{22}} \quad \text{より} \quad \text{Det}(\hat{\rho}) = \rho_{11}\rho_{22} - |\rho_{12}|^2 \quad \text{と逆相関}$$

$$\text{Det}(\hat{\rho}) = \rho_{11}\rho_{22}(1 - P_{ID}^2) \quad \text{一対一対応}$$

### (2) Purity of state

= 対角化表示 =

$$P(\hat{\rho}) \equiv \text{tr} \hat{\rho}^2 = p_1^2 + p_2^2 = 1 - 2p_1 p_2 = 1 - 2\text{Det}(\hat{\rho})$$

### (3) Entropy index

$$S(\hat{\rho}) \equiv -\text{tr} \hat{\rho} \ln \hat{\rho} = -(p_1 \ln p_1 + p_2 \ln p_2) \quad \text{= 対角化表示 =}$$

### (4) Determinant

$$\text{Det}(\hat{\rho}) = p_1 p_2 \quad \text{= 対角化表示 =}$$

九大IMI共同利用研究集会（オンライン）

21

## 2自由度での 4 つの指標の比較考察

○増減を調べた結果、

以下のように符号の反転はあるが、同じ振舞い（増減、最大、最小）であることが確認された

| $p_1$                    | 0    |                                                                                     | $1/2$      |                                                                                     | 1    |
|--------------------------|------|-------------------------------------------------------------------------------------|------------|-------------------------------------------------------------------------------------|------|
| $P_{ID}(\hat{\rho})$     | 最大 1 |  | 最小 0       |  | 最大 1 |
| $P(\hat{\rho})$          | 最大 1 |  | 最小 $1/2$   |  | 最大 1 |
| $S(\hat{\rho})$          | 最小 0 |  | 最大 $\ln 2$ |  | 最小 0 |
| $\text{Det}(\hat{\rho})$ | 最小 0 |  | 最大 $1/4$   |  | 最小 0 |

九大IMI共同利用研究集会（オンライン）

22

### 3 自由度以上での 4 つの指標の比較考察

= 対角化表示 =

#### (1) Indistinguishability index

$$P_{ID}(\hat{\rho}) \equiv \frac{|\rho_{12}|}{\sqrt{\rho_{11}\rho_{22}}} \rightarrow \text{対象外!}$$

#### (2) Purity of state

$$P(\hat{\rho}) \equiv \text{tr} \hat{\rho}^2 = p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 \cdots + p_n^2$$

#### (3) Entropy index

$$S(\hat{\rho}) \equiv -\text{tr} \hat{\rho} \ln \hat{\rho} = -(p_1 \ln p_1 + p_2 \ln p_2 + p_3 \ln p_3 \cdots + p_n \ln p_n)$$

#### (4) Determinant index

$$\text{Det}(\hat{\rho}) = p_1 p_2 p_3 \cdots p_n$$



一対一対応はない! → 相互関係を解析した

九大IMI共同利用研究集会 (オンライン)

23

### ★ 3 自由度以上での 4 つの指標の比較考察

一対一対応はない! → 相互関係を解析した

対角化表示で考察解析

#### (1) Purity of state $P(\hat{\rho})$ と Entropy index $S(\hat{\rho})$

$$P(\hat{\rho}) = p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 \cdots + p_n^2$$

$$S(\hat{\rho}) = -(p_1 \ln p_1 + p_2 \ln p_2 + p_3 \ln p_3 \cdots + p_n \ln p_n)$$

一般に下に凸の関数  $f(x)$  に対して以下の不等式が成り立つ = 数学的帰納法で自己証明 =

$$\frac{m_1 f(x_1) + m_2 f(x_2) + \cdots + m_n f(x_n)}{m_1 + m_2 + \cdots + m_n} \geq f\left(\frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + \cdots + m_n x_n}{m_1 + m_2 + \cdots + m_n}\right)$$



下に凸の関数  $-\ln x$  に対して

$$S(\hat{\rho}) = \frac{p_1(-\ln p_1) + p_2(-\ln p_2) + \cdots + p_n(-\ln p_n)}{p_1 + p_2 + \cdots + p_n} \geq -\ln\left(\frac{p_1 p_1 + p_2 p_2 + \cdots + p_n p_n}{p_1 + p_2 + \cdots + p_n}\right)$$

九大IMI共同利用研究集会 (オンライン)

24

### ★ 3 自由度での 4 つの指標の比較考察

一対一対応はない！ → 相互関係を解析した

対角化表示で考察解析

$\text{tr} \hat{\rho} = 1$  より、

$$p_1 + p_2 + \cdots + p_n = 1$$

$$S(\hat{\rho}) = \frac{p_1(-\ln p_1) + p_2(-\ln p_2) + \cdots + p_n(-\ln p_n)}{p_1 + p_2 + \cdots + p_n} \geq \underbrace{-\ln \left( \frac{p_1 p_1 + p_2 p_2 + \cdots + p_n p_n}{p_1 + p_2 + \cdots + p_n} \right)}_{-\ln P(\hat{\rho})}$$

$$\therefore S(\hat{\rho}) \geq -\ln P(\hat{\rho})$$

$$\therefore e^{-S(\hat{\rho})} \leq P(\hat{\rho})$$

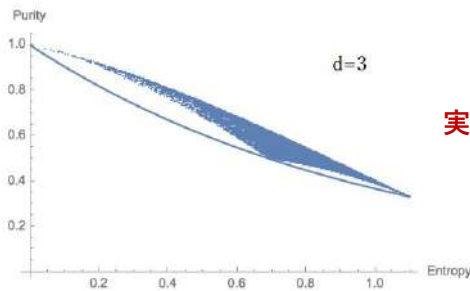
「マセマティカ」を使って、d次元のベクトルをランダムに1万個生成し、ベクトルの成分和が1となるように規格化してグラフ表示して検証した。

九大IMI共同利用研究集会（オンライン）

25

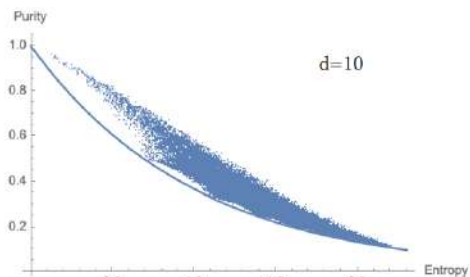
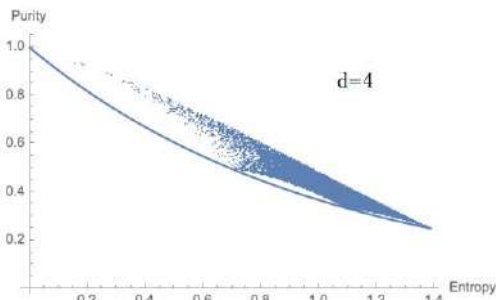
### $P(\hat{\rho}) \geq e^{-S(\hat{\rho})}$ の数値解析検証

「マセマティカ」を使って、d次元のベクトルをランダムに1万個生成し、ベクトルの成分和が1となるように規格化してグラフ表示して検証した。



実線は、 $P(\hat{\rho}) = e^{-S(\hat{\rho})}$

Entropy が小さい  $\hat{\rho}$  に対しては、両者の近似性は高くない！？



九大IMI共同利用研究集会（オンライン）

26

# 参照論文の中でのコメントとして

Linear Entropy という表現を使って、以下の式が紹介されていた。  
量子情報の分野でも Linear entropy as an entanglement measure として使われている！？

$$S(\hat{\rho}) \equiv -\text{tr} \hat{\rho} \ln \hat{\rho} \sim -\text{tr} \hat{\rho} (\hat{\rho} - 1) \equiv S(\hat{\rho}) \quad \text{実際の } S(\hat{\rho}) \text{ 最大値は } \ln(n)$$

$$\text{このとき、} S(\hat{\rho}) \equiv -\text{tr}(\hat{\rho}^2 - \hat{\rho}) = -\text{tr} \hat{\rho}^2 + \text{tr}(\hat{\rho}) = -P(\hat{\rho}) + 1 \quad \ln(n) \sim n - 1$$

$$\text{○定式化根拠？} \quad \ln \hat{\rho} = \ln\{1 + (\hat{\rho} - 1)\} \approx (\hat{\rho} - 1) \quad \text{近似条件が不整合！？}$$

$$P(\hat{\rho}) \text{ 最大値 } 1 \Leftrightarrow S(\hat{\rho}) \text{ 最小値 } 0$$

★私自身の立場（研究目標）

$$P(\hat{\rho}) \text{ 最小値 } 1/n \Leftrightarrow S(\hat{\rho}) \text{ 最大値 } (n - 1)/n$$

“量子統計力学”的に dynamics の追求を目指している点から、単にコヒーレント等の“評価メジャー”としてではなく、“物理量”（エネルギー効率等を予言する）としての指標を見出すことを目標としている。その観点から、物理的な意味のある「エントロピー-S」の定式化を行ないたい、と考えている。＝今後の課題＝

## ★3自由度以上での4つの指標の比較考察

一対一対応はない！ → 相互関係を解析した

対角化表示で考察解析

## (2) Purity of state $P(\hat{\rho})$ と Determinant index $Det(\hat{\rho})$

3つの正の数  $p_1, p_2, p_3$  に対して

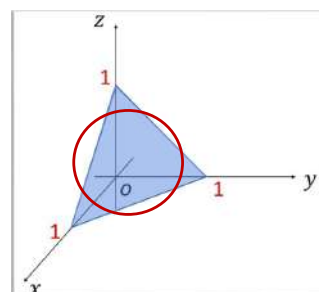
$$\begin{cases} p_1 + p_2 + p_3 = 1 & \text{平面 } L \\ p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 = P & \text{球面 } Q \\ p_1 p_2 p_3 = D & \text{曲面 } X \end{cases}$$

解と係数の関係を使って、

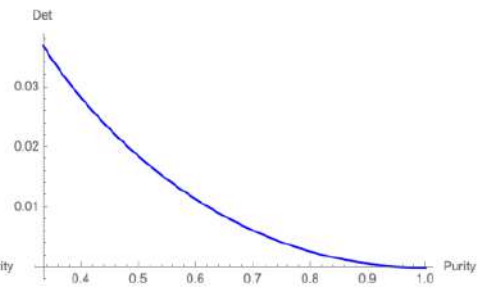
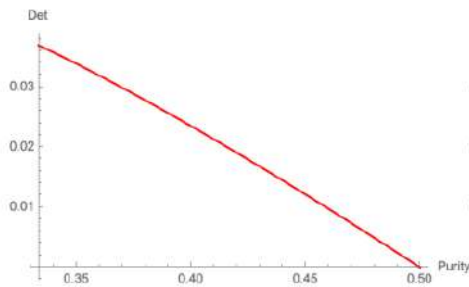
$p_1, p_2, p_3$  は以下の3次方程式の解

$$f(x) = x^3 - x^2 + \frac{1}{2}(1 - P)x - D = 0$$

3つの条件は、 $p_1, p_2, p_3$  の任意の2つの入れ替え（6通り）について対称であるから、上記3つの面の交点は一般に6つある。交点が3つになったときが曲面Xが共有点を失う“臨界条件”で、それは  $f(x)$  が重根をもつとき！？



## 矢吹氏の式と数値計算の比較 2 (11/3/2021 by 前田)



$$D = -\frac{1}{27} \left( 1 + \sqrt{\frac{1}{2}(3P-1)} \right) (3P-1) + \frac{1}{18} (1-P)$$

上に凸 (1階微分で)

$$\left( \frac{1}{3} \leq P \leq \frac{1}{2} \right)$$

$$D = -\frac{1}{27} \left( 1 - \sqrt{\frac{1}{2}(3P-1)} \right) (3P-1) + \frac{1}{18} (1-P)$$

下に凸 (1階微分で)

$$\left( \frac{1}{3} \leq P \leq 1 \right)$$

九大IMI共同利用研究集会 (オンライン)

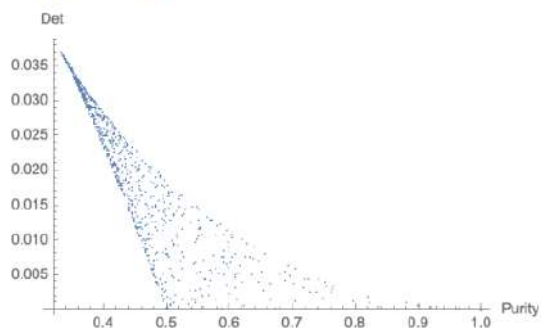
29

$$\text{Det}(\hat{\rho}) = p_1 p_2 p_3 \text{ と } P(\hat{\rho}) = p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 = P$$

の数値解析検証

「マセマティカ」を使って、d次元のベクトルをランダムに1万個生成し、ベクトルの成分和が1となるように規格化してグラフ表示して検証した。

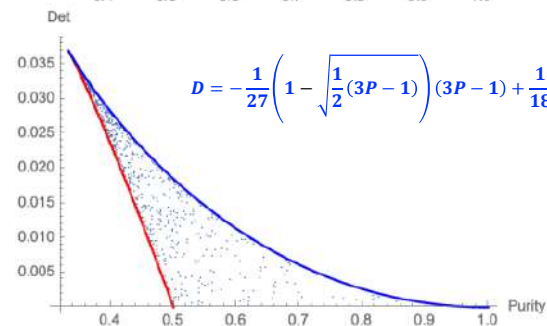
d=3、n=1000



★矢吹の解析的導出結果と合致

$$D = -\frac{1}{27} \left( 1 + \sqrt{\frac{1}{2}(3P-1)} \right) (3P-1) + \frac{1}{18} (1-P)$$

$$D = -\frac{1}{27} \left( 1 - \sqrt{\frac{1}{2}(3P-1)} \right) (3P-1) + \frac{1}{18} (1-P)$$



九大IMI共同利用研究集会 (オンライン)

## (2) 時間発展について

### (密度行列に対するマスター方程式)

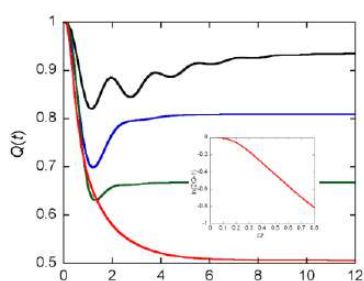
熱浴による部分トレースにより得られた縮約密度行列 (Reduced Density Matrix)

1) Lindblad 方程式によるアプローチ

2) スピン・ボゾンモデルによるアプローチ

### ○最近の研究 スピン・ボゾンモデルによるアプローチ

密度行列の時間発展方程式による **Purity**  $P(\hat{\rho}(t)) \equiv \text{tr} \hat{\rho}(t)^2$  の回復の発見! ?



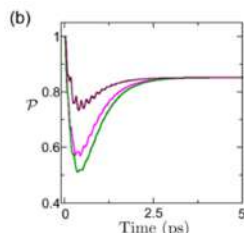
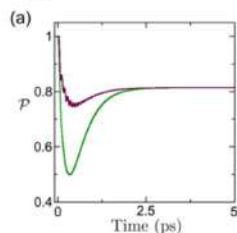
↑ より低温

= 引用 =

**Recovery of Purity in Dissipative Tunneling**

**Dynamics** Sambarta Chatterjee and Nancy Makri\*

[The Journal of Physical Chemistry Letters, 2020](#)



**Survival of quantum features** in the dynamics of a dissipative quantum system and their effect on the state purity Davinder Singh  
[Phys. Rev. E 103, 052124 2021](#)

## 試論的（私論的）解析

### Lindblad方程式

$$\hat{H} = -\hbar\Omega(|R\rangle\langle L| + |L\rangle\langle R|) = -\hbar\Omega\hat{\sigma}_x$$

$\hat{H}$ の固有状態（この基底で密度演算子 $\hat{\rho}$ の時間発展を追う）

$$\hbar = 1 \text{ として } \begin{cases} |\Phi_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|R\rangle + |L\rangle) & \text{固有値 } E_0 = -\hbar\Omega \\ |\Phi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|R\rangle - |L\rangle) & \text{固有値 } E_1 = \hbar\Omega \end{cases}$$

$$\hat{H} = \Omega(|\Phi_0\rangle\langle\Phi_0| - |\Phi_1\rangle\langle\Phi_1|) = \Omega\hat{\sigma}_z$$

$$\frac{d\hat{\rho}}{dt} = -i[\hat{H}, \hat{\rho}] + \mathcal{L}_{diss}(\hat{\rho})$$

*Super Operator*

$$\mathcal{L}_{diss}(\hat{\rho}) \equiv \Gamma[-\{\sigma^+\sigma^-, \hat{\rho}\} + 2\sigma^-\hat{\rho}\sigma^+] \quad \mathcal{L}_{deph}(\hat{\rho}) \equiv \gamma[-\{\sigma^+\sigma^-, \hat{\rho}\} + 2\sigma^+\sigma^-\hat{\rho}\sigma^+\sigma^-]$$

第1項の量子リュービル方程式  $\Rightarrow$  ユニタリー変換  $\Rightarrow$  Purity of state  $P(\hat{\rho})$  不変

第2項のSuper演算子  $\Rightarrow$  非ユニタリー変換  $\Rightarrow$  Purity of state  $P(\hat{\rho})$  変化

Lindblad方程式を解く：

$$\langle \Phi_i | -i[\hat{H}, \hat{\rho}] | \Phi_j \rangle = \begin{pmatrix} 0 & -i2\Omega \\ i2\Omega & 0 \end{pmatrix}$$

$$\langle \Phi_i | \mathcal{L}_{diss}(\hat{\rho}) | \Phi_j \rangle = \langle \Phi_i | \Gamma[-\{\sigma^+ \sigma^-, \hat{\rho}\} + 2\sigma^- \hat{\rho} \sigma^+] | \Phi_j \rangle$$

$$= \Gamma \begin{pmatrix} -2\rho_{++} & -\rho_{+0} \\ -\rho_{+0}^* & 2\rho_{++} \end{pmatrix} \quad \text{若干の計算の後}$$

↓  $|\Phi_0\rangle, |\Phi_1\rangle$ の基底で

$$\left( \frac{d\rho}{dt} \right)_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & -i2\Omega \\ i2\Omega & 0 \end{pmatrix} + \Gamma \begin{pmatrix} -2\rho_{++} & -\rho_{+0} \\ -\rho_{+0}^* & 2\rho_{++} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -2\Gamma\rho_{++} & -\Gamma\rho_{+0} - i2\Omega \\ -\Gamma\rho_{+0}^* + i2\Omega & 2\Gamma\rho_{++} \end{pmatrix}$$

成分ごとに部分方程式を解く。

同様に若干の計算の後

$$\langle \Phi_i | \mathcal{L}_{deph}(\hat{\rho}) | \Phi_j \rangle = \Gamma \begin{pmatrix} 0 & -\rho_{+0} \\ -\rho_{+0}^* & 0 \end{pmatrix}$$

九大IMI共同利用研究集会（オンライン）

35

Lindblad方程式を解いて

$$\left( \frac{d\rho}{dt} \right)_{ij} = \begin{pmatrix} -2\Gamma\rho_{++} & -\Gamma\rho_{+0} - i2\Omega \\ -\Gamma\rho_{+0}^* + i2\Omega & 2\Gamma\rho_{++} \end{pmatrix}$$

$$\rho(t)_{ij} = \begin{pmatrix} \rho_{++}(0)e^{-2\Gamma t} & \left( \rho_{+-}(0) + i\frac{2\Omega}{\Gamma} \right) e^{-\Gamma t} - i\frac{2\Omega}{\Gamma} \\ \left( \rho_{+-}(0) - i\frac{2\Omega}{\Gamma} \right) e^{-\Gamma t} + i\frac{2\Omega}{\Gamma} & 1 - \rho_{++}(0)e^{-2\Gamma t} \end{pmatrix}$$

↓ 初期条件  $\rho_{++}(0) = 1/2, \rho_{+-}(0) = 1/2, \hat{\rho}(0) = |R\rangle\langle R|$

$$\text{Purity } P(\hat{\rho}(t)) \equiv \text{tr} \hat{\rho}(t)^2$$

$$= \frac{1}{2} \left\{ e^{-4\Gamma t} - e^{-2\Gamma t} + 2 + 4 \left( \frac{2\Omega}{\Gamma} \right)^2 (1 - e^{-\Gamma t})^2 \right\}$$

$e^{-\Gamma t} = x$ と置いて、 $x$ の4次関数としての解析から概ねの振舞いは分かったが、マセマティカで解析を行なった。

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P(\hat{\rho}(t)) = 1 + 2 \left( \frac{2\Omega}{\Gamma} \right)^2 > 1 \quad ?$$

九大IMI共同利用研究集会（オンライン）

36

## ★考察

(1) 時刻  $t$  の大きいところで  $\text{purity } P \geq 1$  について

$$P(t \rightarrow \infty) = 1 - 2 \left( - \left( \frac{2\Omega}{\Gamma} \right)^2 \right) = 1 + 2 \left( \frac{2\Omega}{\Gamma} \right)^2$$

*Lindblad* 方程式 (マスター方程式) の導出の際の近似条件が、 $t$  が大きいところで破れている! ?

(2) 光合成の集光システムの時定数のタイムスケールは、

① 励起状態寿命  $1/\Omega \sim 10^{-9} \text{ s}$

② hopping時間 (コヒーレント時間)  $1/\Gamma \sim 10^{-12} \text{ s}$

$$\frac{\Omega}{\Gamma} \sim \frac{10^9 \text{ s}^{-1}}{10^{12} \text{ s}^{-1}} = 10^{-3}$$

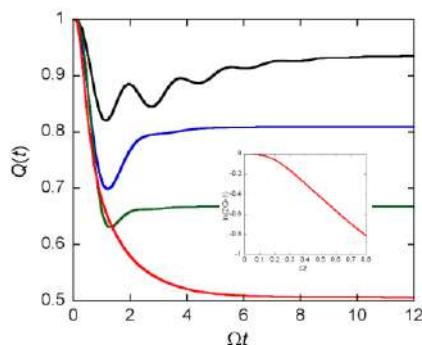
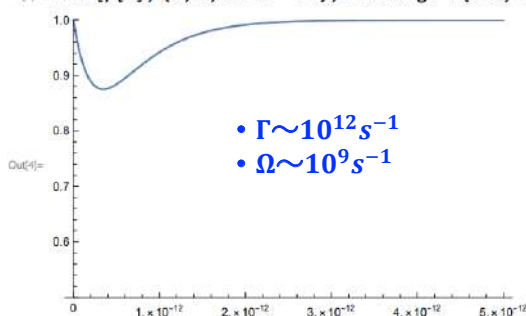
九大IMI共同利用研究集会 (オンライン)

37

## マセマティカ解析 (引用論文との比較)

$$P(t) = \frac{1}{2} \left\{ e^{-4\Gamma t} - e^{-2\Gamma t} + 2 + 4 \left( \frac{2\Omega}{\Gamma} \right)^2 (1 - e^{-\Gamma t})^2 \right\}$$

`In[4] = Plot[p[t], {t, 0, 5 * 10^-12}, PlotRange -> {0.5, 1}]`



<引用> **Survival of quantum features in the dynamics of a dissipative quantum system and their effect on the state purity** Davinder Singh Phys. Rev. E **103**, 052124 [2021](#)

九大IMI共同利用研究集会 (オンライン)

38

## Lindblad方程式を解いて

$$\left(\frac{d\rho}{dt}\right)_{ij} = \begin{pmatrix} -2\Gamma\rho_{++} & -\Gamma\rho_{+0} - i2\Omega \\ -\Gamma\rho_{+0}^* + i2\Omega & 2\Gamma\rho_{++} \end{pmatrix}$$

$$\rho(t)_{ij} = \begin{pmatrix} \rho_{++}(0)e^{-2\Gamma t} & \left(\rho_{+-}(0) + i\frac{2\Omega}{\Gamma}\right)e^{-\Gamma t} - i\frac{2\Omega}{\Gamma} \\ \left(\rho_{+-}(0) - i\frac{2\Omega}{\Gamma}e^{-\Gamma t}\right) + i\frac{2\Omega}{\Gamma} & 1 - \rho_{++}(0)e^{-2\Gamma t} \end{pmatrix}$$

初期条件  $\rho_{++}(0) = 1/2, \rho_{+-}(0) = 1/2$

$$\frac{2\Omega}{\Gamma} \sim 0 \quad \begin{array}{l} \bullet \Gamma \sim 10^{12} s^{-1} \\ \bullet \Omega \sim 10^9 s^{-1} \end{array}$$

$$\rho(t)_{ij} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} e^{-2\Gamma t} & e^{-\Gamma t} \\ e^{-\Gamma t} & 2 - e^{-2\Gamma t} \end{pmatrix}$$

初期状態

$$|R\rangle\langle R| = \rho(0)_{ij} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow P(0) = \text{Tr}(\rho(0)^2) = 1 \quad \text{< 純粋状態 >}$$

$$\text{終状態} \quad \rho(\infty)_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow P(\infty) = \text{Tr}(\rho(\infty)^2) = 1 \quad \text{< 純粋状態 >}$$

九大IMI共同利用研究集会（オンライン）

39

$$\rho(t)_{ij} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} e^{-2\Gamma t} & e^{-\Gamma t} \\ e^{-\Gamma t} & 2 - e^{-2\Gamma t} \end{pmatrix}$$

Purity

$e^{-2\Gamma t} = x$  とおいて

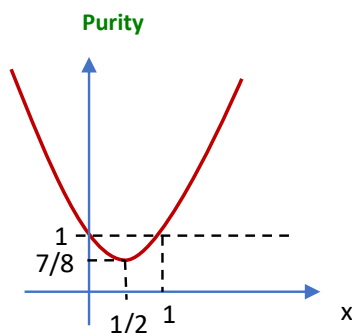
$$\begin{aligned} P(t) = \text{Tr}(\rho(t)^2) &= \frac{1}{4} \{x^2 + (2-x)^2 + 2x\} \\ &= \frac{1}{4} \{2x^2 - 2x + 4\} \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{4} \right\} \end{aligned}$$



$$\bullet x=1 \text{ で } P(0) = 1 \quad \bullet x=0 \text{ で } P(t \rightarrow \infty) = 1$$

$P(t)$ の最小値

$$x = \frac{1}{2} \left( t = \frac{\ln 2}{2\Gamma} \right) \text{ で } P\left(\frac{\ln 2}{2\Gamma}\right) = \frac{7}{8}$$



九大IMI共同利用研究集会（オンライン）

40

## 状態の遷移

●エネルギー固有状態基底  $|\phi_0\rangle, |\phi_1\rangle$  で

$$\rho_{\phi}(0)_{ij} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \rho_{\phi}(\ln 2 / 2\Gamma)_{ij} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 3 \end{pmatrix} \longrightarrow \rho_{\phi}(\infty)_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

●サイト基底  $|R\rangle, |L\rangle$  で

$$\rho_{RL}(0)_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \rho_{RL}(\ln 2 / 2\Gamma)_{ij} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2 - \sqrt{2} & -1 \\ -1 & 2 + \sqrt{2} \end{pmatrix} \longrightarrow \rho_{RL}(\infty)_{ij} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

局在状態？

非局在状態？

## Lindblad方程式を解いて 初期条件を変えて

$$\left( \frac{d\rho}{dt} \right)_{ij} = \begin{pmatrix} -2\Gamma\rho_{++} & -\Gamma\rho_{+0} - i2\Omega \\ -\Gamma\rho_{+0}^* + i2\Omega & 2\Gamma\rho_{++} \end{pmatrix}$$

$$\rho(t)_{ij} = \begin{pmatrix} \rho_{++}(0)e^{-2\Gamma t} & \left( \rho_{+-}(0) + i\frac{2\Omega}{\Gamma} \right) e^{-\Gamma t} - i\frac{2\Omega}{\Gamma} \\ \left( \rho_{+-}(0) - i\frac{2\Omega}{\Gamma} e^{-\Gamma t} \right) + i\frac{2\Omega}{\Gamma} & 1 - \rho_{++}(0)e^{-2\Gamma t} \end{pmatrix}$$

初期条件  $\underline{\rho_{++}(0) = 1, \rho_{+-}(0) = 0}$

$$\rho(t)_{ij} = \begin{pmatrix} e^{-2\Gamma t} & i\frac{2\Omega}{\Gamma}(e^{-\Gamma t} - 1) \\ -i\frac{2\Omega}{\Gamma}(e^{-\Gamma t} - 1) & 1 - e^{-2\Gamma t} \end{pmatrix}$$

$$\rho(t)_{ij} = \begin{pmatrix} e^{-2\Gamma t} & i \frac{2\Omega}{\Gamma} (e^{-\Gamma t} - 1) \\ -i \frac{2\Omega}{\Gamma} (e^{-\Gamma t} - 1) & 1 - e^{-2\Gamma t} \end{pmatrix}$$

対角化をして

$$\rho(t)_{ij}^D = \begin{pmatrix} \lambda_1(t) & 0 \\ 0 & \lambda_2(t) \end{pmatrix} \longrightarrow P(t) = \text{Tr}(\rho(t)^2) = \lambda_1(t)^2 + \lambda_2(t)^2$$

固有方程式

$$(\lambda - e^{-2\Gamma t})(\lambda - (1 - e^{-2\Gamma t})) - \left(\frac{2\Omega}{\Gamma}(e^{-\Gamma t} - 1)\right)^2 = 0$$

$$\lambda^2 - \lambda + e^{-2\Gamma t}(1 - e^{-2\Gamma t}) - \left(\frac{2\Omega}{\Gamma}(e^{-\Gamma t} - 1)\right)^2 = 0$$

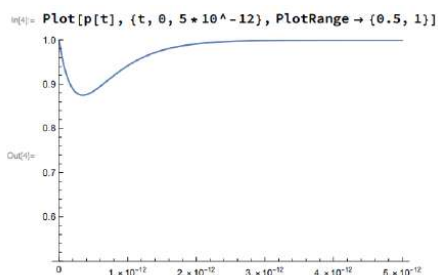
$$\begin{aligned} P(t) &= \lambda_1^2 + \lambda_2^2 = (\lambda_1 + \lambda_2)^2 - 2\lambda_1 \lambda_2 \\ &= 1 - 2 \left\{ e^{-2\Gamma t}(1 - e^{-2\Gamma t}) - \left(\frac{2\Omega}{\Gamma}(e^{-\Gamma t} - 1)\right)^2 \right\} \end{aligned}$$

九大IMI共同利用研究集会（オンライン）

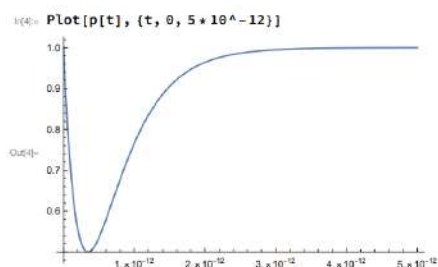
43

## マセマティカ解析（グラフ）

初期条件  $\rho_{++}(0) = 1, \rho_{+-}(0) = 1$



初期条件  $\rho_{++}(0) = 1, \rho_{+-}(0) = 0$



九大IMI共同利用研究集会（オンライン）

44

$$\frac{2\Omega}{\Gamma} \sim 0$$

- $\Gamma \sim 10^{12} s^{-1}$
- $\Omega \sim 10^9 s^{-1}$

$$\rho(t)_{ij} = \begin{pmatrix} e^{-2\Gamma t} & 0 \\ 0 & 1 - e^{-2\Gamma t} \end{pmatrix}$$

Purity

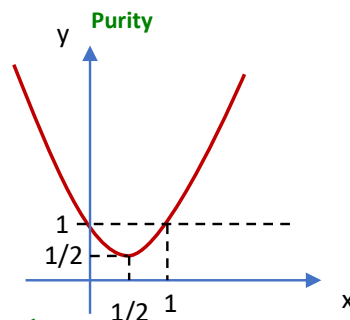
$$\begin{aligned} e^{-2\Gamma t} = x \quad \text{と} \quad \text{おいて} \\ P(t) = \text{Tr}(\rho(t)^2) &= x^2 + (1-x)^2 \\ &= 2x^2 - 2x + 1 \\ &= 2\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} \end{aligned}$$



$$\cdot x=1 \text{ で } P(0) = 1 \quad \cdot x=0 \text{ で } P(t \rightarrow \infty) = 1$$

$P(t)$  の最小値

$$x = \frac{1}{2} \left( t = \frac{\ln 2}{2\Gamma} \right) \text{ で } P\left(\frac{\ln 2}{2\Gamma}\right) = \frac{1}{2}$$



状態の遷移 初期条件  $\rho_{++}(0) = 1, \rho_{+-}(0) = 0$

●エネルギー固有状態基底  $|\phi_0\rangle, |\phi_1\rangle$  で

$$\rho_{\phi}(0)_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \rho_{\phi}\left(\frac{\ln 2}{2\Gamma}\right)_{ij} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix} \Rightarrow \rho_{\phi}(\infty)_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

●サイト基底  $|R\rangle, |L\rangle$  で

$$\rho_{RL}(0)_{ij} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \rho_{RL}\left(\frac{\ln 2}{2\Gamma}\right)_{ij} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix} \Rightarrow \rho_{RL}(\infty)_{ij} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

非局在状態？

非局在状態？

初期条件  $\rho_{++}(0) = 1, \rho_{+-}(0) = 1$

●エネルギー固有状態基底  $|\phi_0\rangle, |\phi_1\rangle$  で

$$\rho_{\phi}(0)_{ij} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \rho_{\phi}\left(\frac{\ln 2}{2\Gamma}\right)_{ij} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \rho_{\phi}(\infty)_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

●サイト基底  $|R\rangle, |L\rangle$  で

$$\rho_{RL}(0)_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \rho_{RL}\left(\frac{\ln 2}{2\Gamma}\right)_{ij} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2 - \sqrt{2} & -1 \\ -1 & 2 + \sqrt{2} \end{pmatrix} \Rightarrow \rho_{RL}(\infty)_{ij} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

局在状態？

非局在状態？

## 状態の遷移についての自己考察

○例えば2自由度で：

$$\text{対角化表現演算子 } \widehat{\rho}_D(t) = \widehat{U}^\dagger(t) \widehat{\rho}(t) \widehat{U}(t)$$

$$\widehat{\rho}_D(t) = \begin{pmatrix} p_1(t) & 0 \\ 0 & p_2(t) \end{pmatrix}$$

状態の遷移を“対角化空間”での“時間軌跡”に着目すると

( i ) Purity  $P(t)$  の中間状態の最小値 =  $1/2$  の場合

$$\widehat{\rho}_D(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

( ii ) Purity  $P(t)$  の中間状態の最小値  $> 1/2$  の場合

$$\widehat{\rho}_D(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

## 自己疑問

( I ) コヒーレンス(デコヒーレンス)とPurityとは「似て非なるもの」ではないか？

「純粋状態の度合いを測るメジャー」であるPurityはユニタリー不変量であり、基底によらない量である。それに対して、「コヒーレンス＝密度行列の非対角項」とみなすと、それはユニタリー不変量ではなく基底に依存する。(対角項が共に $1/2$ の場合だけは、基底に依らずいつでも非対角項 $=0$ である。)

今回解析したモデルでの初期条件  $\rho_{++}(0) = 1, \rho_{+-}(0) = 0$  の例のように、非対角項 $=0$ のままでも

|       |           |   |           |
|-------|-----------|---|-----------|
| ・ 対角項 | 不均一分布     | ↔ | 均一分布      |
|       | Purity 大  |   | Purity 小  |
|       | Entropy 小 |   | Entropy 大 |

Purity(  $\sim$  Entropy )は“統計量”と見なされ得るが、コヒーレンス(デコヒーレンス)は“統計量”と見なされ得ない！？

# まとめ

## (Ⅰ) コヒーレンス(デコヒーレンス)4つの指標についての考察、解析

- (1) Indistinguishability index  $P_{ID}(\hat{\rho})$  (By Mandel)
- (2) Purity of state  $P(\hat{\rho})$
- (3) Entropy index  $S(\hat{\rho})$
- (4) determinant  $Det(\hat{\rho})$

### (1) 2自由度

4つの指標で増減、最大(小)は一致

### (2) 3以上の自由度: (2)、(3)、(4)について

1対1対応は成立していない。

- ・  $S(\hat{\rho})$ ,  $P(\hat{\rho})$  の間の定量的関係について(解析的な考察を含めて)
- ・  $D(\hat{\rho})$ ,  $P(\hat{\rho})$  の間の定量的関係について(解析的な考察を含めて)

## (Ⅱ) Purity of state $P(\hat{\rho})$ の時間発展についての考察、解析

Two Level System での Lindblad 方程式を用いた単純化モデルでも、Purity of state  $P(\hat{\rho})$  の回復的振舞いが見出された！？初期条件によって、回復の“構造”が異なっている？

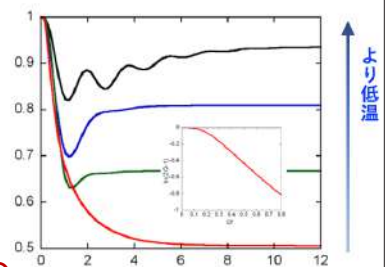
# 今後の探求課題

## (1) エントロピー指標

光合成(集光システム)における熱(量子)統計力学的なダイナミクス解析へ繋げて行きたい。特に目下進めている「エントロピー」を使った解析への応用を目指して。その為に、今回比較検討した(コヒーレンス、デコヒーレンス)4つの指標の中のエントロピー(線形エントロピーではなく)を“メジャー”としてではなく、物理量として(系の位相空間の自由度と絡めて?)定式化して、光合成(集光システム)のダイナミクスの解析に使うことを課題としている。

## (2) Purity of state $P(\hat{\rho})$ の回復

(参考文献の)温度を入れたマスター方程式の解析結果では、低温の環境ほど回復度が大きい！？PurityとEntropyが負の相関を持っているとした場合は、この事実は「熱力学第2法則」により系から環境に廃棄されなければならないエネルギー(廃熱 $\Delta Q$ )が、エントロピー廃棄 $\Delta S$ との関係式 $\Delta Q = T_{out}\Delta S$ より、低温であるほど小さくてよい、という「熱統計力学」の本質の反映ではないか？ただ、今回の顕わに環境温度 $T_{out}$ を入れないモデルの場合でも、対角項(エネルギー項)の基底状態への遷移がある場合で、 $P(\hat{\rho})$ の回復が生じている！？



## 今後の探求課題

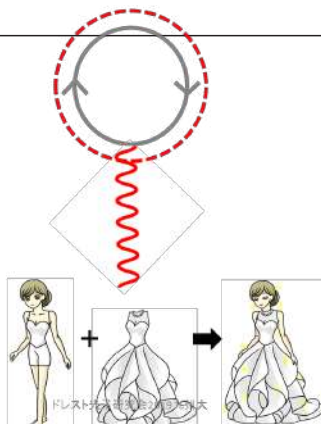
### (3) 時間発展方程式導出のトレース

課題(2)を検証するためにも「環境温度」を入れた密度演算子 $\hat{\rho}$ の時間発展方程式であるマスター方程式(Lindblad方程式、スピン・ボゾン模型)の導出過程(熱浴による部分トレースにより得られた縮約密度演算子の時間発展方程式の導出過程)を検証したい。

## ご清聴ありがとうございました

光子が電子のドレスをまとった状態？

Dressed photon ?



37

矢吹ゼミOG松村祐美氏 作成

# A New Approach to Quantum Fields

Hayato Saigo<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Faculty of Bioscience  
Nagahama Institute of Bio-Science and Technology

2022.2.24.

◀ ◻ ▶ ◀ ◻ ▶ ◀ ≡ ▶ ◀ ≡ ▶ ≡ ≡ ≡ ≡ ≡ ≡ ≡ ≡ ≡

Hayato, Saigo (Nagahama)

A New Approach to Quantum Fields

2022.2.24.

1 / 60

## Table of Contents

- ① Structure of Dynamics as Category
- ② Quantum Fields as Category Algebras
- ③ States of Quantum Fields as States on Categories
- ④ Prospects

◀ ◻ ▶ ◀ ◻ ▶ ◀ ≡ ▶ ◀ ≡ ▶ ≡ ≡ ≡ ≡ ≡ ≡ ≡ ≡ ≡

Hayato, Saigo (Nagahama)

A New Approach to Quantum Fields

2022.2.24.

2 / 60

# Table of Contents

- 1 Structure of Dynamics as Category
- 2 Quantum Fields as Category Algebras
- 3 States of Quantum Fields as States on Categories
- 4 Prospects

◀ ◻ ▶ ◀ ◻ ▶ ◀ ≡ ▶ ◀ ≡ ▶ ≡ ◀ ↺ 🔍 ↻

Hayato, Saigo (Nagahama)

## A New Approach to Quantum Fields

2022.2.24.

3 / 60

## Category

## Definition: Category

A category is a system composed of two kinds of entities called objects and arrows, equipped with domain/codomain, composition and identity, satisfying associative law and identity law.

### Definition: Invetible Arrow (Isomorphism)

Let  $\mathcal{C}$  be a category. An arrow  $f : X \longrightarrow Y$  in  $\mathcal{C}$  is said to be invertible in  $\mathcal{C}$  if there exists some arrow  $g : Y \longrightarrow X$  such that

$$g \circ f = 1_X, \quad f \circ g = 1_Y.$$

An invertible arrow in  $\mathcal{C}$  is also called an isomorphism in  $\mathcal{C}$ .

◀ ◻ ▶ ◀ ◻ ▶ ◀ ≡ ▶ ◀ ≡ ▶ ≡ ↺ 🔍 ↻

Hayato, Saigo (Nagahama)

## A New Approach to Quantum Fields

2022.2.24.

4 / 60

# Category

## Small Category

A category  $C$  is called small if the collection of arrows is a set. The set of arrows is also denoted as  $\mathcal{C}$  and the set of objects identified with identity arrows is denoted as  $|C|$ .

## Example (Preorder)

A pair  $(P, \rightsquigarrow)$  of a set  $P$  and a relation  $\rightsquigarrow$  on  $P$  satisfying  $p \rightsquigarrow p$  for any  $p \in P$  and

$$p \rightsquigarrow q \text{ and } q \rightsquigarrow r \implies p \rightsquigarrow r$$

for any  $p, q, r \in P$  called a preordered set. The relation  $\rightsquigarrow$  on  $P$  is called a preorder on  $P$ . The preordered set  $(P, \rightsquigarrow)$  can be viewed as a category whose objects are elements of  $P$ , when we define the relation  $p \rightsquigarrow q$  between  $p, q$  as the unique arrow from  $p$  to  $q$ . Conversely, we can define a preordered set as a small category such that for any pair of objects  $p, q$  there exists at most one arrow from  $p$  to  $q$ .

# Category

## Example (Indiscrete Category and Discrete Category)

An indiscrete category is a small category such that for any pair of objects  $C, C'$  there exists exactly one morphism from  $C$  to  $C'$ . A discrete category is a small category such that all arrows are identity arrows.

- Note that an indiscrete category corresponds to a complete graph and that any set can be considered as a discrete category.

## Example (Monoid and Group)

A small category with only one object is called a monoid. A monoid is called a group if all arrows are invertible.

- To see the equivalence between the definition of the group as a category, just define the arrows in a group as a category as the elements in the group as a set, and the unique identity arrow (which can be identified with the unique object) as the identity element of the group.

## Category

## Example (Groupoid)

A small category is said to be a groupoid if all arrows are invertible.

- From the mathematical point of view, the present work is based on an extension of the previous work [CIM19] on groupoid algebras over  $\mathbb{C}$  into category algebras of an arbitrary (small) category over a (in general, noncommutative) rig  $R$ , i.e., "ring without negatives."
- Even in the case of  $R = \mathbb{C}$  this extension physically means allowing irreversible processes, since a category can be seen as a generalized groupoid allowing invertible arrows in general. Involution structure of the category algebra is provided by partial involution structure of the category, as we will see later ( $\dagger$ -category introduced there can be seen as a generalization of a groupoid).

# Functor

## Functor (Covariant Functor)

Let  $\mathcal{C}$  and  $\mathcal{C}'$  be categories. A correspondence  $F$  from  $\mathcal{C}$  to  $\mathcal{C}'$  which maps object and arrows in  $\mathcal{C}$  to objects and arrows in  $\mathcal{C}'$  is said to be a covariant functor, or simply a functor, from  $\mathcal{C}$  to  $\mathcal{C}'$  if it satisfies the following conditions:

- ① It maps  $f : X \longrightarrow Y$  in  $\mathcal{C}$  to  $F(f) : F(X) \longrightarrow F(Y)$  in  $\mathcal{C}'$ .
- ②  $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$  for any (composable) pair of  $f, g$  in  $\mathcal{C}$ .
- ③ For each  $X$  in  $\mathcal{C}$ ,  $F(1_X) = 1_{F(X)}$ .

# Functor

## Contravariant Functor

Let  $\mathcal{C}$  and  $\mathcal{C}'$  be categories. A correspondence  $F$  from  $\mathcal{C}$  to  $\mathcal{C}'$  which maps object and arrows in  $\mathcal{C}$  to objects and arrows in  $\mathcal{C}'$  is said to be a contravariant functor from  $\mathcal{C}$  to  $\mathcal{C}'$  if it satisfies the following conditions:

- ① It maps  $f : X \longrightarrow Y$  in  $\mathcal{C}$  to  $F(f) : F(X) \longleftarrow F(Y)$  in  $\mathcal{C}'$ .
- ②  $F(g \circ f) = F(f) \circ F(g)$  for any (composable) pair of  $f, g$  in  $\mathcal{C}$ .
- ③ For each  $X$  in  $\mathcal{C}$ ,  $F(1_X) = 1_{F(X)}$ .

Navigation icons: back, forward, search, etc.

Hayato, Saigo (Nagahama)

A New Approach to Quantum Fields

2022.2.24.

9 / 60

# Functor

## Composition of Functor

Let  $F$  be a functor from  $\mathcal{C}$  to  $\mathcal{C}'$  and  $G$  be a functor from  $\mathcal{C}'$  to  $\mathcal{C}''$ . The composition functor  $G \circ F$  is a functor from  $\mathcal{C}$  to  $\mathcal{C}''$  defined as  $(G \circ F)(c) = G(F(c))$  for any arrow  $c$  in  $\mathcal{C}$ .

## Identity of Functor

Let  $\mathcal{C}$  be a category. A functor from  $\mathcal{C}$  to  $\mathcal{C}$  which maps any arrow to itself is called the identity functor.

- We can consider categories consisting of (certain kind of) categories as objects and (certain kind of) functors as arrows.

Navigation icons: back, forward, search, etc.

Hayato, Saigo (Nagahama)

A New Approach to Quantum Fields

2022.2.24.

10 / 60



# Natural Transformation

## Functor category

Let  $\mathcal{C}$  and  $\mathcal{C}'$  be categories. The functor category  $\mathcal{C}'^{\mathcal{C}}$  is a category consisting of functors from  $\mathcal{C}$  to  $\mathcal{C}'$  as objects and natural transformations as arrows (domain, codomain, composition, and identity are defined in a natural way).

## Natural Equivalence

An isomorphism in a functor category, i.e., an invertible natural transformation, is said to be a natural equivalence.

◀ ◻ ▶    ◀ ◻ ◻ ▶    ◀ ≡ ≡ ≡ ▶    ◀ ≡ ≡ ≡ ▶    ≡ ≡ ≡    ↺ 🔍 ↻

Havato, Saigo (Nagahama)

## A New Approach to Quantum Fields

2022.2.24.

13 / 60

## Causal Category

## Causal Category

A category  $\mathcal{C}$  equipped with a subcategory  $\mathcal{C}^{cau}$  satisfying  $|\mathcal{C}| = |\mathcal{C}^{cau}|$  is called a causal category. Arrows in  $\mathcal{C}^{cau}$  are said to be causal.

- Any category can be considered as a causal category by taking  $\mathcal{C} = \mathcal{C}^{cau}$ . Note that  $|\mathcal{C}|$  is equipped with preorder  $\rightsquigarrow$  defined as the existence of causal arrow between objects.
- A typical example of causal categories is constructed as follows. For a spacetime (with inner degrees of freedom)  $E$ , usually modelled by a manifold and sometimes by a symmetric directed graph (as in lattice gauge theory [Wil74]), we can construct a category  $\mathcal{C} = \mathcal{M}[E]$  whose objects and arrows are points and path between them.

A set of small navigation icons typically found in Beamer presentations, including symbols for back, forward, search, and other slide controls.

Hayato, Saigo (Nagahama)

## A New Approach to Quantum Fields

2022.2.24.

14 / 60

## Causal Category

- More precisely, we consider  $\mathcal{M}(E)$  as a subcategory of the "Moore path category" [B09] of  $E$  consisting of smooth paths in the manifold case and as the free category of  $E$  in the discrete case. Then we can define  $\mathcal{C}^{cau}$  as the subcategory consisting of "causal paths".
- For manifold case, the notion of causal paths can be defined as the paths whose tangent vectors are all in the future light cone.
- For the graph case, a path (i.e., an arrow in the free category)  $c$  is said to be causal if  $c = c' \circ c''$  implies  $\text{dom}(c') \rightsquigarrow \text{cod}(c')$  and  $\text{dom}(c'') \rightsquigarrow \text{cod}(c'')$ , where  $\rightsquigarrow$  denotes a preorder previously defined on the set of vertices.

## Relevant Category

## Relevant Category

Let  $\mathcal{C}$  be a causal category and  $\mathcal{O}$  be a subset of  $|\mathcal{C}|$ . The subcategory of  $\mathcal{C}$  generated by

- arrows whose domain and codomain are in  $\mathcal{O}$ ,*
- causal arrows whose domain is in  $\mathcal{O}$  and whose codomain is in  $|\mathcal{C}| \setminus \mathcal{O}$ ,*
- causal arrows whose codomain is in  $\mathcal{O}$  and whose domain is in  $|\mathcal{C}| \setminus \mathcal{O}$ , and*
- identity arrows (identified with objects) in  $|\mathcal{C}| \setminus \mathcal{O}$ ,*

is called the relevant category for  $\mathcal{O}$  and denoted as  $\mathcal{O}^{rel}$ .







## Category Algebra

### Module over Rig

A commutative monoid  $M$  under addition with unit 0 together with a left action of  $R$  on  $M$   $(r, m) \mapsto rm$  is called a left module over  $R$  if the action satisfies the following conditions:

- ①  $r(m' + m) = rm' + rm$ ,  $(r' + r)m = r'm + rm$  for any  $m, m' \in M$  and  $r, r' \in R$ .
- ②  $0m = 0$ ,  $r0 = 0$  for any  $m \in M$  and  $r \in R$ .

Dually we can define the notion of right module over  $R$ .

Let  $M$  is left and right module over  $R$ .  $M$  is called an  $R$ -bimodule if

$$r'(mr) = (r'm)r$$

holds for any  $r, r' \in R$  and  $m \in M$ . The left/right action above is called the scalar multiplication.

Navigation icons: back, forward, search, etc.

Hayato, Saigo (Nagahama)

A New Approach to Quantum Fields

2022.2.24.

23 / 60

## Category Algebra

### Algebra over Rig

A bimodule  $A$  over  $R$  is called an algebra over  $R$  if it is also a rig with respect to its own multiplication which is compatible with scalar multiplication, i.e.,

$$(r'a')(ar) = r'(a'a)r, (a'r)a = a'(ra)$$

for any  $a, a' \in A$  and  $r, r' \in R$ .

Navigation icons: back, forward, search, etc.

Hayato, Saigo (Nagahama)

A New Approach to Quantum Fields

2022.2.24.

24 / 60

# Category Algebra

## Category Algebra

Let  $\mathcal{C}$  be a category and  $R$  be a rig. An  $R$ -valued function  $\alpha$  defined on  $\mathcal{C}$  is said to be of finite propagation if for any object  $C$  there are at most finite number of arrows whose codomain or domain is  $C$  in its support. The module over  $R$  consisting of all  $R$ -valued functions of finite propagation together with the multiplication defined by

$$(\alpha' \alpha)(c'') = \sum_{\{(c', c) \mid c'' = c' \circ c\}} \alpha'(c') \alpha(c), \quad c, c', c'' \in \mathcal{C}$$

becomes an algebra over  $R$  with unit  $\epsilon$  defined by

$$\epsilon(c) = \begin{cases} 1 & (c \in |\mathcal{C}|) \\ 0 & (\text{otherwise}), \end{cases}$$

and is called the category algebra (of finite propagation), denoted as  $R[\mathcal{C}]$ .

# Category Algebra

- The multiplication defined above is nothing but "convolution" operation on the category  $\mathcal{C}$ .
- $R[\mathcal{C}]$  coincides with the algebra studied in [Mit72] if  $R$  is a ring. In [Sa21] it is denoted as  ${}^0R_0[\mathcal{C}]$  to distinguish them from other kinds of category algebras.
- A functor from one category to another induces a homomorphism between the corresponding category algebras if the functor is bijective on objects. If the bijective-on-objects functor is also injective on arrows, the induced morphism becomes injective.
- Hence, the category algebra  $R[\mathcal{C}^\circ]$  of a subcategory  $\mathcal{C}^\circ$  of a category  $\mathcal{C}$  becomes a subalgebra of  $R[\mathcal{C}]$ .

# Category Algebra

## Indeterminate

Let  $R[\mathcal{C}]$  be a category algebra and  $c \in \mathcal{C}$ . The function  $\iota^c \in R[\mathcal{C}]$  defined as

$$\iota^c(c') = \begin{cases} 1 & (c' = c) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases}$$

is called the indeterminate corresponding to  $c$ .

## Theorem (Calculus of Indeterminates)

Let  $c, c' \in \mathcal{C}$ ,  $\iota^c, \iota^{c'}$  be the corresponding indeterminates and  $r \in R$ . Then

$$\iota^{c'} \iota^c = \begin{cases} \iota^{c' \circ c} & (\text{dom}(c') = \text{cod}(c)) \\ 0 & (\text{otherwise}), \end{cases}$$

$$r \iota^c = \iota^c r.$$

Navigation icons: back, forward, search, etc.

# Category Algebra

- In short, a category algebra  $R[\mathcal{C}]$  is an algebra of functions on  $\mathcal{C}$  equipped with the multiplication which reflects the compositionality structure of  $\mathcal{C}$ .
- By the identification of  $c \in \mathcal{C} \mapsto \iota^c \in R[\mathcal{C}]$ , categories are included in category algebras.
- A category algebra can be considered as a generalized matrix algebra. In fact, matrix algebras are isomorphic to category algebras of indiscrete categories. For the basic notions and rules for matrix-like calculation in category algebras, see [Sa21].

Navigation icons: back, forward, search, etc.

## Category Algebra

### Involution on Rig

Let  $R$  be a rig. An operation  $(\cdot)^*$  on  $R$  preserving addition and covariant (resp. contravariant) with respect to multiplication is said to be a covariant (resp. contravariant) involution on  $R$  when  $(\cdot)^* \circ (\cdot)^*$  is equal to the identity on  $R$ . A rig with contravariant involution is called a  $^*$ -rig.

### Involution on Algebra

Let  $A$  be an algebra over a rig  $R$  with a covariant (resp. contravariant) involution  $\overline{(\cdot)}$ . A covariant (resp. contravariant) involution  $(\cdot)^*$  on  $A$  as a rig is said to be a covariant (resp. contravariant) involution on  $A$  as an algebra over  $R$  if it is compatible with scalar multiplication, i.e.,

$$(r'ar)^* = \overline{r'}a^*\overline{r} \text{ (covariant case), } (r'ar)^* = \overline{r}a^*\overline{r'} \text{ (contravariant case).}$$

An algebra  $A$  over a  $^*$ -rig  $R$  with contravariant involution is called a  $^*$ -algebra over  $R$ .

## Category Algebra

### Theorem (Category Algebra as Algebra with Involution)

Let  $\mathcal{C}$  be a category with a covariant (resp. contravariant) involution  $(\cdot)^\dagger$  and  $R$  be a rig with a covariant (resp. contravariant) involution  $\overline{(\cdot)}$ . Then the category algebra  $R[\mathcal{C}]$  becomes an algebra with covariant involution (resp.  $^*$ -algebra) over  $R$ .



# Quantum Field

- In general, given a natural equivalence  $u$  from the identity functor  $\mathcal{C}$  to an invertible functor  $\hat{u}$  from  $\mathcal{C}$  to  $\mathcal{C}$ , we can define an invertible element  $\iota^u \in R[\mathcal{C}]$  as

$$\iota^u(c) = \begin{cases} 1 & (c \text{ is a component of } u) \\ 0 & (\text{otherwise}), \end{cases}$$

and isomorphism  $\tilde{\iota}^u$  on  $R[\mathcal{C}]$  as

$$\tilde{\iota}^u(\alpha) = \iota^u \alpha (\iota^u)^{-1}.$$

- This kind of transformation will be useful to study flows, generators, and symmetries such as local gauge invariance from the viewpoint of category algebras.
- To sum up, the category algebra intrinsically incorporates covariance structure coherent with the structure of "spacetime" category  $\mathcal{C}$ .

# Quantum Field

## Relevant Algebra and Local Algebra

Let  $R$  be a rig and  $\mathcal{C}$  be a causal category. The category algebra  $R[\mathcal{O}^{rel}]$  is called the relevant algebra on  $\mathcal{O}$ , a subset of  $|\mathcal{C}|$ , over  $R$ . A subset  $\mathcal{O}$  of  $|\mathcal{C}|$  is called a region if for any  $C \in |\mathcal{C}| \setminus \mathcal{O}$  there is no nontrivial factorization in  $\mathcal{O}^{rel}$ . For a region  $\mathcal{O}$ , the subrig  $R^{loc}[\mathcal{O}]$  of  $R[\mathcal{O}^{rel}]$  whose elements are in the form of  $\alpha + \delta$ , where  $\alpha$  denotes an element in  $R[\mathcal{O}^{rel}]$  satisfying  $\alpha(C) = 0$  for any  $C \in |\mathcal{C}| \setminus \mathcal{O}$  and  $\delta$  denotes an element in  $R[\mathcal{O}^{rel}] \cap Z(R[\mathcal{C}])$ , becomes an algebra over  $Z(R)$  and called the local algebra on  $\mathcal{O}$ .

## Relevant Algebra with Involution and Local Algebra with Involution

Let  $R$  be a rig with involution and  $\mathcal{C}$  be a causal category with partial involution structure. The category algebra  $R[\mathcal{O}^{rel\sim}]$  is called the relevant algebra with involution on  $\mathcal{O}$ , a subset of  $|\mathcal{C}|$ , over  $R$ . For a region  $\mathcal{O}$ , the subrig  $R^{loc\sim}[\mathcal{O}]$  of  $R[\mathcal{O}^{rel\sim}]$  whose elements are in the form of  $\alpha + \delta$ , where  $\alpha$  denotes an element in  $R[\mathcal{O}^{rel\sim}]$  satisfying  $\alpha(C) = 0$  for any  $C \in |\mathcal{C}| \setminus \mathcal{O}$  and  $\delta$  denotes an element in  $R[\mathcal{O}^{rel\sim}] \cap Z(R[\mathcal{C}])$ , becomes an algebra with involution over  $Z(R)$  and called the local algebra with involution on  $\mathcal{O}$ .

## Quantum Field: Relation to AQFT

- The family of local algebras with involution  $\{R^{loc}[\mathcal{O}]\}$ , especially when  $R$  is a  $*$ -algebra over  $\mathcal{C}$ , is the counterpart of  $\{\mathcal{A}(\mathcal{O})\}$  in AQFT [H96], where  $\mathcal{A}(\mathcal{O})$  denotes the observable algebra defined on bounded region  $\mathcal{O}$  in the spacetime. Our framework so far does not focus on the topological aspect of algebras, but the conceptual correspondence between our framework and AQFT is remarkable as we will see below.
- Note that our "local" algebras in general contain certain kind of information of "outside" of the regions. Nevertheless, they contain no information of the local algebras corresponding to spacelike separated regions. From the structure theorem of relevant category and the definition of local algebras, we have the following:

## Quantum Field: Relation to AQFT

### Theorem: Commutativity of Spacelike Separated Local Algebras

Local algebras  $R^{loc}[\mathcal{O}]$  and  $R^{loc}[\mathcal{O}']$  are commutative with each other if the regions  $\mathcal{O}$  and  $\mathcal{O}'$  are spacelike separated each other.

### Theorem: "Einstein Causality"

Local algebras  $R^{loc\sim}[\mathcal{O}]$  and  $R^{loc\sim}[\mathcal{O}']$  with involution are commutative with each other if the regions  $\mathcal{O}$  and  $\mathcal{O}'$  are spacelike separated from each other.

Navigation icons: back, forward, search, etc.

Hayato, Saigo (Nagahama)

A New Approach to Quantum Fields

2022.2.24.

37 / 60

## Quantum Field: Relation to TQFT

- Our category algebraic framework of quantum field theory can also be compared to the conceptual ideas in other axiomatic approaches to quantum fields such as Topological Quantum Field Theory (TQFT) [At88, Wit88]. In the axiomatization of TQFT, a quantum field theory is considered as a certain functor from the category of  $n$ -cobordism  $nCob$  into the category  $Mod(R)$  of modules over some unital commutative ring  $R$  (the typical case is  $R = \mathbb{C}$  and  $Mod(R) = Vect$ , where  $Vect$  denotes the category of vector spaces over  $\mathbb{C}$ ).

Navigation icons: back, forward, search, etc.

Hayato, Saigo (Nagahama)

A New Approach to Quantum Fields

2022.2.24.

38 / 60

## Quantum Field: Relation to TQFT

- We can construct such a functor in a generalized setting based on our framework: Let  $C$  be an object in a  $\dagger$ -category  $\mathcal{C}$  and  $R$  be a rig. We define the submodule  ${}^C R[\mathcal{C}]$  of  $R[\mathcal{C}]$  consisting of elements whose support is included in the set of arrows whose codomain is  $C$ . Then we can define a functor  $(\cdot)^C R : \mathcal{C} \longrightarrow \text{Mod}(R)$  by  ${}^C R = \iota^C(\cdot)$ , the multiplication of  $\iota^C$ , i.e. a module homomorphism sending each  $\alpha \in {}^{\text{dom}(C)} R[\mathcal{C}]$  to  $\iota^C \alpha \in {}^{\text{cod}(C)} R[\mathcal{C}]$ , for any  $C \in \mathcal{C}$ .
- Since  $n\text{Cob}$  is a  $\dagger$ -category, the above construction works and we obtain a canonical functor from  $n\text{Cob}$  to  $\text{Mod}(R)$ . Although this functor does not satisfy all the technical parts of axioms proposed in TQFT, it is coherent with the physical ideas of relativistic covariance and quantum properties behind the axioms. This coherence will become more clear after introducing the notion of states on categories in the next section.

# Table of Contents

- 1 Structure of Dynamics as Category
- 2 Quantum Fields as Category Algebras
- 3 States of Quantum Fields as States on Categories
- 4 Prospects



## State on Category

## State on Category

Let  $R$  be a rig with involution,  $(R, R_+)$  be a positivity structure on  $R$ , and  $\mathcal{C}$  be a category with involution. A state on the category algebra  $R[\mathcal{C}]$  over  $R$  with respect to  $(R, R_+)$  is said to be a state on a category  $\mathcal{C}$  with respect to  $(R, R_+)$ .

- Given a state  $\varphi$  on a category  $\mathcal{C}$  with involution, we have an function  $\hat{\varphi} : \mathcal{C} \longrightarrow R$  defined as  $\hat{\varphi}(c) = \varphi(\iota^c)$ . For the category with finite number of objects, we can obtain the following theorem [Sa21], which is a generalization of the result in [CIM19] for groupoids:

## State on Category

## State on Category as Normalized Positive Semidefinite Function

Let  $\mathcal{C}$  be a category with involution such that  $|\mathcal{C}|$  is finite. Then there is a one-to-one correspondence between states  $\varphi$  with respect to  $(R, R_+)$  and normalized positive semidefinite  $Z(R)$ -valued functions  $\phi$  with respect to  $(R, R_+)$ , i.e., normalized functions such that

$$\sum_{\{(c, c') \mid \text{dom}((c')^\dagger) = \text{cod}(c)\}} \overline{\xi(c')} \phi((c')^\dagger \circ c) \xi(c)$$

is in  $R_+$  for any  $R$ -valued function  $\xi$  on  $\mathcal{C}$  with finite support and that  $\phi(c^\dagger) = \overline{\phi(c)}$ , where  $(\cdot)^*$  and  $\overline{(\cdot)}$  denotes the involution on  $\mathcal{C}$  and  $R$ , respectively.

## State on Category

- Conceptually, the theorem above means that states on a category with involution (with finite objects) are nothing but the weights on arrows, which are generalization of probability distribution on a (finite) set as the discrete category (with finite objects). More generally, we can say that to define a state on a category whose support is contained in a subcategory with finite numbers of objects is equivalent to define the corresponding function which assign the weight to each arrow.
- For a state on a category whose support is not contained in a subcategory with finite number of objects, we will need some topological structures (or coarse geometric structures [R03]). Nonstandard-analytical methods (see [SN], for example) will provide useful tools.

## State of Quantum Field

## State of Quantum Field

Let  $\mathcal{C}$  be a causal category with partial involution structure  $\mathcal{C}^\sim$  and  $(R, R_+)$  be a positivity structure on a rig  $R$  with involution. A unital linear functional on  $\mathcal{C}$  which is also a state on  $\mathcal{C}^\sim$  with respect to  $(R, R_+)$  whose image is contained in a subrig  $R'$  with involution of  $R$  is said to be an  $R'$ -valued state on the quantum field on  $\mathcal{C}$  over  $R$  with respect to  $(R, R_+)$ .

- In conventional cases  $R$  is supposed to be a  $*$ -algebra over  $\mathbb{C}$  and  $R' = \mathbb{C}$ .
- The phrase "with respect to  $(R, R_+)$ " will be omitted if it is clear in the context.
- In general, given a state  $\varphi$  on  $*$ -algebra  $A$  over a  $*$ -rig  $R$  with involution, we can construct the representation of the algebra into the algebra consisting of endomorphism on certain module (generalized GNS representation [Sa21]).

## State of Quantum Field

- Our category algebraic approach is a new unification of the noncommutative probabilistic approach and the category theoretic viewpoint. As we see in the previous section, for  $\dagger$ -category (or in general, category with involution), its category algebra is a  $*$ -algebra (or in general, an algebra with involution). Note that our algebra is unital, even if  $\mathcal{C}$  has infinitely many objects. Then the construction above holds and we can see the unit  $\epsilon$  as "vacuum" in our theory.
- The concept of states on categories also shed light on the foundation of quantum mechanics as a part of quantum field theory. From our viewpoint, a quantum mechanical system of finite degrees of freedom can be defined as a noncommutative probability space whose algebra is a subalgebra of a category algebra on a causal category with partial involution and whose state satisfies the condition that the support is contained in a subcategory with finite numbers of objects.

## State of Quantum Field

- Note that quantum mechanical systems in the above meaning are not necessarily contained in a single point but can have spatial degrees of freedom, e.g., a system in double slit experiment, where the support of the state can be considered to be contained in a subcategory with finite objects.
- Understanding the situation where multiple observers are involved in a single quantum field—such as the EPR (Einstein-Podolsky-Rosen) situation [EPR35]—through the concepts of local algebra and local states seem also to be important research topic.
- The idea at the heart of the above discussions is that we are free to think of "localized states" (not just "global" states like vacuum states). The concept corresponding to these kinds of states is particularly important in the context of AQFT and is called "local states" [We87, OOS16]. We can define the local states in our framework, which is a conceptual counterpart of local states in AQFT, as follows:

## State of Quantum Field: Relation to AQFT

## Local State

Let  $\mathcal{C}$  be a causal category equipped with partial involution structure  $\mathcal{C}^\sim$  and  $R$  be a rig with involution. A state on  $R^{loc\sim}[\mathcal{O}]$  for a region  $\mathcal{O}$  is called a local state of the quantum field  $R[\mathcal{C}]$  on  $\mathcal{O}$ .

- From a physical point of view, the notion of local state is quite natural. A macroscopic setting of the environment for the quantum field basically concerns only the bounded spacetime domain, and the global state should be seen as an idealization of it. Considering a family of local states instead of a single state can be seen as a sheaf theoretic extension of conventional quantum field theory [OOS16]. The extension will lead to the notion of consistent families of Hilbert spaces and operators on them, which will be mathematically interesting, through the GNS construction.

## State of Quantum Field: Relation to TQFT

- In the previous section, we have constructed for any  ${}^{\dagger}$ -category  $\mathcal{C}$  a functor  $(\cdot)^c : \mathcal{C} \rightarrow \text{Mod}(R)$  by  ${}^c R = \iota^c(\cdot)$  for  $c \in \mathcal{C}$ . For quantum physical studies, we need to induce a functor into *Hilb*, a category of Hilbert spaces over  $\mathbb{C}$ . Let us explain the role of states in this induction.
- Given any state  $\varphi$  on the  ${}^{\dagger}$ -category  $\mathcal{C}$ ,  ${}^c R := {}^c R[\mathcal{C}]$  for each object  $C \in \mathcal{C}$  can be equipped with "almost inner product" (semi-Hilbert space structure) by defining sesquilinear form  $\langle \cdot | \cdot \rangle^{\varphi}$  by  $\langle \alpha' | \alpha \rangle^{\varphi} := \varphi((\alpha')^* \alpha)$  (generalized GNS construction, see [Sa21] and references therein). When  $R$  is a  $*$ -algebra over  $\mathbb{C}$  and  $\varphi$  is a  $\mathbb{C}$ -valued "good" state  $\varphi$  on the category given, this functor induces a functor into *Hilb*.

## State of Quantum Field: Relation to TQFT

- More precisely, suppose that  $R$  is a  $*$ -algebra over  $\mathbb{C}$  and the  $\mathbb{C}$ -valued state  $\varphi$  satisfies the condition

$$\varphi(\alpha^* \alpha) \geq \varphi((\iota^c \alpha)^* (\iota^c \alpha))$$

for any  $\alpha \in R[\mathcal{C}]$  and  $c \in \mathcal{C}$ . Then the functor  $(\cdot)^{\circ}R : \mathcal{C} \longrightarrow \text{Mod}(R)$  induces the functor  $(\cdot)^{\circ}R^{\varphi} : \mathcal{C} \longrightarrow \text{preHilb}$ , where *preHilb* denotes the category of pre-Hilbert spaces, taking the quotient of  ${}^{\mathcal{C}}R$  equipped with  $\langle \cdot | \cdot \rangle^{\varphi}$  by  $N^{\varphi} = \{\alpha \in {}^{\mathcal{C}}R | \varphi(\alpha^* \alpha) = 0\}$ , which can be shown as submodule of  ${}^{\mathcal{C}}R$ . (Note that by the assumption  $\varphi(\alpha^* \alpha) = 0 \implies \varphi((\iota^{\mathcal{C}} \alpha)^* (\iota^{\mathcal{C}} \alpha)) = 0$  holds.

## Quantum Field: Relation to TQFT

- This kind of construction itself has certain generalization to a more general  $R$  by using this condition directly). Then by the assumption of  $\varphi$ ,  ${}^{(c)}R^\varphi$  extends uniquely to the morphism in  $Hilb$  by completion and we have the corresponding functor from  $\mathcal{C}$  to  $Hilb$  which sends  $c$  to the unique bounded extension of  ${}^{(c)}R^\varphi$  (Note that a bounded operator between pre-Hilbert spaces extends to the unique bounded operator between Hilbert spaces).
- By applying this construction for  $\mathcal{C} = nCob$ , we have a version of TQFT. Note that our framework is naturally incorporated with causal structure and it is quite interesting to the counterpart of the structure in TQFT.



## Prospects

- Needless to say, the relationship with categorical approaches to quantum theory such as "categorical quantum mechanics" [AC04, AC08] based on the  $\dagger$ -category should also be explored. The categorical structure of the submodules of the category algebra as a generalized matrix algebra and the computations based on it will play an important role.
- It is also interesting to clarify the relationship between our framework and the approach in a recently published article [GSC21] which also deals with AQFT and Quantum Cellular Automata (QCA) approach [DP16, Ar19] from a general categorical viewpoint.

## Prospects

- The notion of quantum walk (see [Am04, K08] and references therein, for example), which is closely related to the QCA approach, can also be formulated from our standpoint. Based on our framework, we can model a concrete dynamics of quantum fields as a sequence or flow of the states on a category. In general, the dynamics can be irreversible. The typical examples of reversible dynamics are called quantum walks. The notion of quantum walks on general  $*$ -algebras and quantum walks on  $^\dagger$ -categories can be defined as follows:

## Quantum Walk

Let  $A$  be a  $*$ -algebra. A sequence of states given by

$$\varphi^t(\alpha) = \varphi((\omega^*)^t \alpha \omega^t) \quad t = 0, 1, 2, 3, \dots$$

generated by a unitary element  $\omega \in R[C]$ , i.e. an element satisfying  $\omega^* \omega = \omega \omega^* = \epsilon$  is called a quantum walk on  $A$ .

### Quantum Walk on $\dagger$ -Category

Let  $\mathcal{C}$  be a  $\dagger$ -category and  $R$  be a  $*$ -rig. A quantum walk on  $R[\mathcal{C}]$  is said to be a quantum walk on a  $\dagger$ -category  $\mathcal{C}$ .

- A quantum walk can be considered as a sequence of "state vector" through GNS construction.
- The notion of quantum walk defined on  $\dagger$ -category includes the various concrete dynamical models under the name of quantum walks.
- For example, quantum walks on simple undirected graphs as a certain sequence of state on an indiscrete category.
- The category algebraic approach will play a fundamental role for the quantum walks on graphs with multiple edges and loops.

- Quantum walks on graphs have been used in the modeling of "dressed photon" [Oh14] which cannot be understood without focusing on off-shell nature of quantum fields [HS20], i.e., the aspects of quantum fields cannot be described as the collection of the modes which satisfies the on-shell condition, and quantum walks on categories may become important in quantum field theory in general. They will also connects the QCA approach to quantum fields and other approaches to quantum fields.

## Prospects

- One of the most exciting problems is, of course, to construct a model of a non-trivial quantum field with interactions. We believe we can approach such problems. In particular, it seems that the fact that relevant categories have arrows that go through objects in very distant regions, while the local algebras defined on them satisfy commutativity, may be the key to avoiding various no-go theorems. Note also that our approach extends the coefficients to a general (commutative or noncommutative) rigs, which greatly expands the possibilities of dealing with interactions.
- Finally, it should be pointed out that our approach is not limited to quantum fields, but can be extended to give a very general noncommutative statistical model with a causal structure. We hope that the present work will be a small new step towards these big problems.

◀ ◻ ▶ ◀ ◻ ▶ ◀ ≡ ▶ ◀ ≡ ▶ ≡ ≡ ≡ ≡ ≡ ≡

Hayato, Saigo (Nagahama)

A New Approach to Quantum Fields

2022.2.24.

59 / 60

## References

- Saigo, H. Quantum Fields as Category Algebras. *Symmetry* **2021**, *13* 9, 1727. <https://doi.org/10.3390/sym13091727>
- Saigo, H. Category Algebras and States on Categories. *Symmetry* **2021**, *13* 7, 1172. <https://doi.org/10.3390/sym13071172>

Thank you for your patience!

◀ ◻ ▶ ◀ ◻ ▶ ◀ ≡ ▶ ◀ ≡ ▶ ≡ ≡ ≡ ≡ ≡ ≡

Hayato, Saigo (Nagahama)

A New Approach to Quantum Fields

2022.2.24.

60 / 60

-  Abramsky, S. and Coecke, B. A categorical semantics of quantum protocols, Proceedings of the 19th Annual IEEE Symposium on Logic in Computer Science, 2004, pp. 415–425
-  Abramsky, S. and Coecke, B. Categorical quantum mechanics. In: Handbook of Quantum Logic and Quantum Structures, K. Engesser, D. M. Gabbay and D. Lehmann (eds), 261–323. Elsevier (2008).
-  Ambainis, A. Quantum walk algorithm for element distinctness. In: Proc. of the 45th IEEE Symposium on Foundations of Computer Science (FOCS), 22-31. (2004)
-  Atiyah, M. Topological Quantum Field Theories. *Publications Mathématiques de l'Institut des Hautes Scientifiques* **1988**, 68 175–86.
-  Arrighi, P. An Overview of Quantum Cellular Automata. *Nat. Comput.* **2019**, 18 885–99. doi:10.1007/s11047-019-09762-6
-  Bombelli, L., Lee, J., Meyer, D. and Sorkin, R. D. Space-time as a causal set. *Physical review letters* **1987**, 59(5):521.

-  Brown, R. Moore hyperrectangles on a space form a strict cubical omega-category (2009), arXiv 0909.2212v2.
-  Ciaglia, F. M., Ibort, A. and Marmo, G. Schwinger's Picture of Quantum Mechanics III: The statistical Interpretation. *Int. J. Geom. Meth. Modern Phys.* **2019**, 16(11): 1950165.
-  Doplicher S., Haag R. and Roberts J.E. Fields, observables and gauge transformations I. *Commun. Math. Phys.* /bf 1969,13, 1–23.
-  Doplicher S., Haag R. and Roberts J.E. Fields, observables and gauge transformations II. /em Commun. Math. Phys. **1969**, 15, 173–200.
-  Doplicher S., Haag R. and Roberts J.E. Local observables and particle statistics, I. *Commun. Math. Phys.* **1971**,23, 199–230.
-  Doplicher S., Haag R. and Roberts J.E. Local observables and particle statistics, II. *Commun. Math. Phys.* **1974**, 35, 49–85.
-  D'Ariano G. M and Perinotti P. Quantum Cellular Automata and Free Quantum Field Theory. *Front. Phys.* **2016**, 12 120301.

-  Doplicher S. and Roberts J.E. Endomorphism of  $C^*$ -algebras, cross products and duality for compact groups. *Ann. Math.*, **1989** 130, 75–119.
-  Doplicher S. and Roberts J.E. A new duality theory for compact groups. *Invent. Math.* **1989**, 98, 157–218.
-  Doplicher S., Roberts J.E. Why there is a field algebra with a compact gauge group describing the superselection structure in particle physics. *Commun. Math. Phys.* **1990**, 131, 51–107.
-  Einstein, A., Podolsky, B. and Rosen, N. Can Quantum-Mechanical Description of Physical Reality Be Considered Complete?. *Phys. Rev.* **1935**, 47(10), 777–780.
-  Gelfand, I. and Neumark, M. On the imbedding of normed rings into the ring of operators in Hilbert space. *Matematicheskii Sbornik* **1943**, 12, 187–217.
-  Gogioso, S., Stasinou, E. and Coecke, B. Functorial Evolution of Quantum Fields. *Front. Phys.* **2021**, 9:534265.

-  Haag, R. On Quantum Field Theory. *Dan. Mat. Fys. Medd.***1955**,29,12.
-  Haag, R. *Local Quantum Physics, second edition*, Springer Verlag, 1996.
-  Haag R. and Kastler D. An algebraic approach to quantum field theory. *J. Math. Phys.* **1964**, 5 848–861.
-  Hawking, S.W., King, A.R. and McCarthy, P.J. A New Topology for Curved Space-Time Which Incorporates the Causal, Differential, and Conformal Structures. *J. Math. Phys.* **1976**, 17 174–81.
-  Hamano, M. and Saigo, H, Quantum Walk and Dressed Photon. *Electronic Proceedings in Theoretical Computer Science* **2020**, 315 93-99.
-  Hora, A.; Obata, N. *Quantum Probability and Spectral Analysis of Graphs*; Springer: Berlin Heidelberg, 2007.

-  Hall, D. and Wightman, A. S. A Theorem on Invariant Analytic Functions with Applications to Relativistic Quantum Field Theory. *Mat. Fys. Medd. Dan. Vid. Selsk.***1957**, 31,5.
-  Konno, N. Quantum Walks. In: Quantum Potential Theory, Franz, U., and Schürmann, M., Eds., *Lecture Notes in Mathematics*, 1954, 309–452, Springer-Verlag, Heidelberg, 2008.
-  Malament, D. B. The class of continuous timelike curves determines the topology of spacetime. *Journal of Mathematical Physics***1977**, 18(7), 1399–1404.
-  Mitchel, B. Rings with several objects. *Adv. in. Math.* **1972**, 8, 1–161.
-  Ohtsu, M. *Dressed Photons*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2014.
-  Ojima, I. Fundamental Concepts in Quantum Physics, In: *Quantum Information and Evolution Dynamics*, Makino-Shoten Tokyo, 1996. (in Japanese)
-  Ojima, I. A unified scheme for generalized sectors based on selection criteria—order parameters of symmetries and of thermality and

physical meanings of adjunctions. *Open Syst. Inf. Dyn.* **2003**, 10, 235–279.

-  Ojima, I. Micro-Macro Duality in Quantum Physics. In: Proceedings in International Conference on Stochastic Analysis, Classical and Quantum, World Scientific, 2005, 143–161.
-  Ojima, I., Meaning of Non-Extensive Entropies in Micro-Macro Duality. *J. Phys.: Conf. Ser.* **2010**, 201, 012017.
-  Ojima, I., Okamura, K. and Saigo, H. Local State and Sector Theory in Local Quantum Physics. *Lett. Math. Phys.* **2016** 106, 741–763.
-  Roe, J. *Lectures on Coarse Geometry*. University Lecture Series **31**, American Mathematical Society, Providence, RI, 2003.
-  Saigo, H. Category Algebras and States on Categories. *Symmetry* **2021**, 13 7, 1172. <https://doi.org/10.3390/sym13071172>
-  Saigo, H. and Nohmi, J. Categorical Nonstandard Analysis. *Symmetry* **2021**, 13, 1573. <https://doi.org/10.3390/sym13091573>



導入

遷移確率

歴史的経緯と注意

測定理論

被積分

状態遷移の圏の例

000

000000

0000

0000

0000

00

0

C\*-代数的量子論におけるシュレディンガー描像

(On the Schrödinger picture in C\*-algebraic quantum theory)

岡村 和弥 (Kazuya Okamura)

ドレスト光子研究起点/名古屋大学

(Research Origin for Dressed Photon / Nagoya Univ.)

2022/02/24

導入

遷移確率

歴史的経緯と注意

測定理論

被積分

状態遷移の圏の例

000

000000

0000

0000

0000

00

0

1 導入

● 動機

● C\*-代数的量子論の公理

2 遷移確率

● 準備

● 状態遷移の圏

3 歴史的経緯と注意

● 射影仮説

● 作用素代数と量子測定

4 測定理論

● インストルメント

5 被積分

● 被積分

● 事後状態

6 状態遷移の圏の例

7

導入：動機

動機.

量子系におけるダイナミクスを柔軟に記述可能な枠組みを確立したい。  
Dirac の遷移確率概念が中心的役割を果たし、セクター理論と整合的な  
量子測定理論と結びつく。

以下で部分的に報告済み：

[KO'16] KO, *Quantum theory starting from transition probability*,  
RIMS kokyuroku **2010**, (2016) 69–77.  
<http://hdl.handle.net/2433/231579>

[KO'21] KO, *Towards a Measurement Theory for Off-Shell Quantum  
Fields*, Symmetry **13**, (2021) 1183.  
<https://doi.org/10.3390/sym13071183>

公理 1.

ある物理的状況（または実験設定）における物理系は C\*-確率空間  $(\mathcal{X}, \omega)$  – C\*-代数  $\mathcal{X}$  とその上の状態  $\omega$  の組 – で記述される。

- 集合  $\mathcal{X}$  が C\*-代数であるとは、\*-代数かつ Banach 空間であって  $\|X^*X\| = \|X\|^2$ ,  $X \in \mathcal{X}$ , を満たすときを言う。  
C\*-代数は単位的（単位元を含む）であることを仮定する。
- $\omega$  が  $\mathcal{X}$  上の状態であるとは、 $\mathcal{X}$  上の規格化された正値線型汎関数であるときをいう。
- $\mathcal{S}_{\mathcal{X}}$  :  $\mathcal{X}$  上の状態の集合

|              |                 |                  |              |             |                |   |
|--------------|-----------------|------------------|--------------|-------------|----------------|---|
| 導入<br>○○●    | 遷移確率<br>○○○○○○○ | 歴史的時間と注意<br>○○○○ | 測定理論<br>○○○○ | 極限分<br>○○○○ | 状態遷移の面の例<br>○○ | ○ |
| C*-代数的量子論の公理 |                 |                  |              |             |                |   |

$\mathcal{X}^{**} := (\mathcal{X}^*)^* : \mathcal{X}$  の第二双対  $W^*$ -代数  
 $\mathcal{X}^{**} \cong \pi_u(\mathcal{X})'' : \mathcal{X}$  の普遍表現  $(\pi_u, \mathcal{H}_u) = \oplus_{\omega \in \mathcal{S}_{\mathcal{X}}} (\pi_{\omega}, \mathcal{H}_{\omega})$  から生成される（普遍包絡）von Neumann 代数。  
 $\hat{\cdot} : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}^{**} : \langle \hat{X}, \rho \rangle = \rho(X)$ ,  $\rho \in \mathcal{X}^*$  で定まる  $\mathcal{X}$  から  $\mathcal{X}^{**}$  への等長埋め込み

公理 2 (Born 統計公式).

$\mathcal{X}$  の物理量  $A$  が状態  $\omega$  において正確に測定されるとき、 $\Delta$  に属する  $A$  のスペクトルが現れる確率  $\Pr\{A \in \Delta | \omega\}$  は次で与えられる：

$$\Pr\{A \in \Delta | \omega\} = \langle E^{\hat{A}}(\Delta), \omega \rangle. \quad (1)$$

この公理は C\*-代数的量子論の標準的公理系で通常仮定されるが、本講演では必ずしも仮定しない。仮定するときは逐一言及する。

遷移確率：状態空間の Borel 集合族

- ここでは、C\*-代数  $\mathcal{X}$  の双対空間  $\mathcal{X}^*$  に対し \* 位相を採用する。  
弱 \* 位相においては、 $\omega \in \mathcal{X}^*$  の近傍は  $\mathcal{X}$  の有限個の元  $X_1, \dots, X_n$  と  $\varepsilon > 0$  で：

$$U_{\omega}(X_1, \dots, X_n, \varepsilon) = \{\varphi \in \mathcal{X}^* \mid |\varphi(X_j) - \omega(X_j)| < \varepsilon, j = 1, \dots, n\} \quad (2)$$

$\mathcal{S}_{\mathcal{X}}$  の弱 \* 位相を  $\mathcal{X}^*$  の弱 \* 位相の  $\mathcal{S}_{\mathcal{X}}$  への制限により定義する。

- $\mathcal{S}_{\mathcal{X}}$  に対し、弱 \* 位相の開集合族から生成される Borel 集合を採用する。 $\mathcal{B}(\mathcal{S}_{\mathcal{X}})$  で  $\mathcal{S}_{\mathcal{X}}$  の Borel 集合族を表す。

## 遷移確率：中心部分空間

### 定義 1 (中心部分空間).

$\mathcal{X}^*$  の線型部分空間  $\mathcal{V}$  が中心的 (central) であるとは、 $\mathcal{X}^{**}$  の中心射影  $C$  で  $\mathcal{V} = C\mathcal{X}^* = \{C\omega \mid \omega \in \mathcal{X}^*\}$  を満たすものが存在するときをいう。

### 注意.

$\mathcal{X}^*$  の各中心部分空間  $\mathcal{V}(= C\mathcal{X}^*)$  に対し、双対空間  $\mathcal{V}^*$  は  $(C\mathcal{X}^{**})$  に同型な  $W^*$ -代数である。

### 定義 2 ( $C^*$ -確率構造).

$C^*$ -代数とその双対空間の中心部分空間の組  $a = (\mathcal{X}_a, \mathcal{V}_a)$  を

$C^*$ -確率構造 ( $C^*$ -probability structure) と呼ぶ。

$C^*$ -PS で  $C^*$ -確率構造のクラスを表す。

各  $a = (\mathcal{X}_a, \mathcal{V}_a) \in C^*$ -PS に対し、 $\mathcal{S}_a = \mathcal{S}_{\mathcal{X}_a} \cap \mathcal{V}_a$  とおく。

## 遷移確率の定義

### 定義 3 (遷移確率).

$a, b \in C^*$ -PS とする。写像  $P(\cdot \leftarrow \cdot) : B(\mathcal{S}_{\mathcal{X}_b}) \times \mathcal{S}_a \rightarrow [0, 1]$  は、以下の条件を満たすとき、 $(a, b)$  に対する遷移確率と呼ばれる：

- (1) 各  $\omega \in \mathcal{S}_a$  に対し、 $P(\cdot \leftarrow \omega)$  は  $\mathcal{S}_{\mathcal{X}_b}$  上の確率測度である。
- (2) 各  $\Delta \in B(\mathcal{S}_{\mathcal{X}_b})$  に対し、写像  $\mathcal{S}_a \ni \omega \mapsto P(\Delta \leftarrow \omega) \in [0, 1]$  は可測である。

記法. (1) 各一点集合  $\{\varphi\}$  に対し、 $P(\{\varphi\} \leftarrow \omega)$  を  $P(\varphi \leftarrow \omega)$  と表す。

$$(2) \quad \omega_{(P, \Delta)} = \frac{1}{P(\Delta \leftarrow \omega)} \int_{\Delta} \rho dP(\rho \leftarrow \omega) \quad (3)$$

- (3)  $\Delta \in B(\mathcal{S}_{\mathcal{X}_b})$  と  $\omega \in \mathcal{S}_a$  で  $P(\Delta \leftarrow \omega) \neq 0$  となるとき  $\omega_{(P, \Delta)} \in \mathcal{S}_b$

### 例 1 (決定論的遷移).

$\alpha$  を  $C^*$ -代数  $\mathcal{X}$  の  $*$ -同型とする。遷移確率  $P^{(\alpha)} : B(\mathcal{S}_{\mathcal{X}}) \times \mathcal{S}_{\mathcal{X}} \rightarrow [0, 1]$  を  $P^{(\alpha)}(\Delta \leftarrow \omega) = \delta_{\omega \circ \alpha}(\Delta)$  で定める。

## 遷移確率の強合成

2 種類の「遷移確率の合成」を定義する。 $a, b, c \in C^*$ -PS とする。

$Q, P$ ：それぞれ  $(b, c)$ ,  $(a, b)$  に対する遷移確率

### 定義 4 (強合成).

$Q$  と  $P$  が強合成可能であるとは、各  $\omega \in \mathcal{S}_a$  に対し、

$$(Q *_s P)(\Gamma \times \Delta | \omega) = \int_{\Delta \cap \text{supp } P(\cdot \leftarrow \omega)} Q(\Gamma \leftarrow \rho) dP(\rho \leftarrow \omega) \quad (4)$$

が  $\mathcal{S}_{\mathcal{X}_c} \times \mathcal{S}_{\mathcal{X}_b}$  上の確率測度を定めるときを言う。

$Q$  と  $P$  が強合成可能なとき、 $(a, c)$  に対する遷移確率  $Q \triangleleft_s P$  を次で定める：

$$(Q \triangleleft_s P)(\Gamma \leftarrow \omega) = (Q *_s P)(\Gamma \times \mathcal{S}_{\mathcal{X}_b} | \omega). \quad (5)$$

この遷移確率を  $Q$  と  $P$  の強合成と呼ぶ。

## 遷移確率の合成

$Q, P$ : それぞれ  $(b, c), (a, b)$  に対する遷移確率

定義 5 (合成).

$Q$  と  $P$  が合成可能であるとは、各  $\omega \in S_a$  に対し、

$$(Q * P)(\Gamma \times \Delta | \omega) = Q(\Gamma \leftarrow \omega_{(P, \Delta)}) P(\Delta \leftarrow \omega) \quad (6)$$

が  $S_{\mathcal{X}_c} \times S_{\mathcal{X}_b}$  上の確率測度を定めるときを言う。

$Q$  と  $P$  が合成可能なとき、 $(a, c)$  に対する遷移確率  $Q \triangleleft P$  を次で定める：

$$(Q \triangleleft P)(\Gamma \leftarrow \omega) = (Q * P)(\Gamma \times S_{\mathcal{X}_b} | \omega). \quad (7)$$

この遷移確率を  $Q$  と  $P$  の合成と呼ぶ。

これらの合成を用いて、「状態遷移の圏」を定義する。

## 状態遷移の圏

定義 6 (状態遷移の圏).

状態遷移の圏は次で与えられる：

対象  $C^*$ -確率構造  $a = (\mathcal{X}_a, \mathcal{V}_a)$

射  $b \leftarrow a : f$  は  $(a, b)$  に対する遷移確率  $P_f$  を伴う。

各対象  $a$  に対する恒等射  $a \leftarrow a : 1_a$  の遷移確率は

$$P_{1_a}(\Delta \leftarrow \omega) = \delta_\omega(\Delta), \quad \Delta \in \mathcal{B}(S_{\mathcal{X}_a}), \quad \omega \in S_a.$$

射の合成は遷移確率の合成。

定義 7 (強状態遷移の圏).

強状態遷移の圏は次で与えられる：

対象  $C^*$ -確率構造  $a = (\mathcal{X}_a, \mathcal{V}_a)$

射  $b \leftarrow a : f$  は  $(a, b)$  に対する遷移確率  $P_f$  を伴う。

$P_f$  は、各  $\omega \in S_a$  に対し、 $\text{supp } P(\cdot \leftarrow \omega) \subset S_b$ .

射の合成は遷移確率の強合成による。

## 歴史的経緯と注意：射影仮説

公理 2 を仮定し、 $\mathcal{H}$  を可分 Hilbert 空間とする。

$\mathcal{H}$  上の密度作用素  $\rho$  と  $B(\mathcal{H})$  上の正規状態  $\bar{\rho}$  を以下で定める同型写像

$\bar{\cdot} : T(\mathcal{H}) \rightarrow B(\mathcal{H})_*$  のもとと区別しない：

$$\bar{\rho}(X) = \text{Tr}[\rho X], \quad X \in B(\mathcal{H}). \quad (8)$$

このとき、 $a_{\mathcal{H}} = (B(\mathcal{H}), T(\mathcal{H})) \in C^*\text{-PS}$  である。

仮説 1.

$A = \sum_{a \in \mathbb{R}} a E^A(\{a\})$  を  $B(\mathcal{H})$  の離散物理量とする。

密度作用素  $\rho$  において  $A$  が正確に測定されるとき、

各  $a \in \text{Sp}(A; \rho) = \{a \in \mathbb{R} \mid \text{Tr}[E^A(\{a\})\rho] > 0\}$  に対し

測定後の状態  $\rho_{\{A=a\}}$  が一意に定まり、 $(a_{\mathcal{H}}, a_{\mathcal{H}})$  に対する遷移確率は

$$\text{Pr}(\Delta \leftarrow \rho) = \sum_{a \in \text{Sp}(A; \rho)} \text{Tr}[E^A(\{a\})\rho] \delta_{\rho_{\{A=a\}}}(\Delta), \quad (9)$$

$$\text{Pr}(\rho_{\{A=a\}} \leftarrow \rho) = \text{Tr}[E^A(\{a\})\rho].$$

仮説 2 (von Neumann-Lüders 射影仮説).

密度作用素  $\rho$  において  $A$  が正確に測定されるとき,  $\text{Tr}[E^A(\{a\})\rho] > 0$  ならば,

$$\rho_{\{A=a\}} = \frac{E^A(\{a\})\rho E^A(\{a\})}{\text{Tr}[\rho E^A(\{a\})]} \quad (10)$$

更には,  $\Delta \in B(\mathbb{R})$  に属さない  $A$  の値を無視する状況での, 測定後の状態  $\rho_{\{A \in \Delta\}}$  は次で与えられる:

$$\frac{\sum_{a \in \Delta} \text{Tr}[\rho E^A(\{a\})\rho_{\{A=a\}}]}{\text{Tr}[\rho E^A(\Delta)]} = \frac{(\sum_{a \in \mathbb{R}} E^A(\{a\})\rho E^A(\{a\})) \cdot E^A(\Delta)}{\text{Tr}[\rho E^A(\Delta)]}.$$

- von Neumann [vN'32] は非退化な場合に仮説 2 を考えた。
- Lüders [G. Lüders, Ann. Physik **8**, 322 (1951)] は退化した場合に一般化した。

[vN'32] J. von Neumann, *Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik*, (Springer, 1932)

作用素代数と量子測定

von Neumann [vN'32] は反復可能性仮説を次の仮説から導出した:

仮説 3 (反復可能性仮説 [Ozawa'15]).

対象系の物理量  $A$  を続けて二度測定したら, 一度に同じ値を得る。

[Ozawa'15] M. Ozawa, *Current Science* **109**, 2006–2016, (2015), arXiv:1507.02010.

- 中村と梅垣は [NU'62] において写像

$$\rho \mapsto \sum_{a \in \mathbb{R}} E^A(\{a\})\rho E^A(\{a\})$$

が  $B(\mathcal{H})$  から vN 部分代数  $\{A\}' = \{B \in B(\mathcal{H}) \mid AB = BA\}$  への条件付き期待値 (の前双対写像) に他ならないことを指摘し, 連続スペクトルをもつ物理量に対しても同様の議論が成り立つと予想した。

[NU'62] M. Nakamura and H. Umegaki, *Math. Jpn. J.* **7**, 151 (1962).

作用素代数と量子測定 2

- Arveson [W. Arveson, *Amer. J. Math.* **89**, 578 (1967)] は連続的な場合, そのような条件付き期待値は存在しないことを示した。
- これらの先行研究に続き, Davies と Lewis [DL'70] は反復可能性仮説 (仮説 3) を放棄し, 測定により生じる一般の状態変化を記述するインストルメントの概念を導入した。

[DL'70] E.B. Davies and J.T. Lewis, *Commun. Math. Phys.* **17**, 239 (1970).

- 小澤 [Oz'84] は完全正值インストルメントを導入し,  $B(\mathcal{H})$  上の完全正值インストルメントは測定過程で定義されることを示した。
- [OO'16] では一般の vN 代数上での完全正值インストルメントが測定過程で定義されるための必要十分条件を見出した。

[Oz'84] M. Ozawa, *J. Math. Phys.* **25**, 79–87 (1984).

[OO'16] KO and M. Ozawa, *J. Math. Phys.* **57**, 015209 (2016).

- [KO'21] では  $C^*$ -代数的量子論の場合にインストルメントを定義し解析した。

## 測定理論：インストルメント

$a, b \in \mathbf{C}^*$ -PS とする。

$P(\mathcal{V}_a, \mathcal{V}_b) : \mathcal{V}_a$  から  $\mathcal{V}_b$  への正値線型写像の集合

**定義 8 (インストルメント [KO'21]).**

$(S, \mathcal{F})$  を可測集合とする。 $\mathcal{I}$  が  $(a, b, S)$  に対するインストルメントであるとは、以下の 3 条件を満たすときを言う：

- (1)  $\mathcal{I}$  は  $\mathcal{F}$  から  $P(\mathcal{V}_a, \mathcal{V}_b)$  への写像である。
- (2) すべての  $\rho \in \mathcal{V}_a$  に対し、 $\langle 1, \mathcal{I}(S)\rho \rangle = \langle 1, \rho \rangle$ 。
- (3) 各  $\rho \in \mathcal{V}_a$ ,  $M \in \mathcal{V}_b^*$  および  $\mathcal{F}$  の互いに素な列  $\{\Delta_j\}_{j \in \mathbb{N}}$  に対して、

$$\langle M, \mathcal{I}(\cup_j \Delta_j)\rho \rangle = \sum_{j=1}^{\infty} \langle M, \mathcal{I}(\Delta_j)\rho \rangle. \quad (11)$$

|           |                 |                  |               |              |                 |
|-----------|-----------------|------------------|---------------|--------------|-----------------|
| 導入<br>○○○ | 遷移確率<br>○○○○○○○ | 歴史的確確と注意<br>○○○○ | 測定理論<br>●●○○○ | 極確分<br>○○○○○ | 状態遷移の面の例<br>○○○ |
| インストルメント  |                 |                  |               |              |                 |

- $a = b$  のとき,  $(a, b, S)$  に対するインストルメント  $\mathcal{I}$  を  $(a, S)$  に対するインストルメントと呼ぶ。更には,  $\mathcal{M}$  を  $W^*$ -代数とし,  $a = b = (\mathcal{M}, \mathcal{M}_*)$  のとき,  $(a, S)$  に対するインストルメント  $\mathcal{I}$  を  $(\mathcal{M}, S)$  に対するインストルメントと呼ぶ。
- $(a, b, S)$  に対するインストルメント  $\mathcal{I}$  と  $\varphi \in \mathcal{S}_a$  に対し,  $(S, \mathcal{F})$  上の確率測度  $\|\mathcal{I}\varphi\|$  を  $\|\mathcal{I}\varphi\|(\Delta) = \|\mathcal{I}(\Delta)\varphi\|$ ,  $\Delta \in \mathcal{F}$ , で定義する。
- $(a, b, S)$  に対するインストルメント  $\mathcal{I}$  と  $\varphi \in \mathcal{S}_a$  に対し,  $\mathcal{I}$  の双対写像  $\mathcal{I}^* : \mathcal{V}_b^* \times \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{V}_a^*$  を

$$\langle M, \mathcal{I}(\Delta)\rho \rangle = \langle \mathcal{I}^*(M, \Delta), \rho \rangle, \quad (12)$$

$\rho \in \mathcal{V}_a$ ,  $M \in \mathcal{V}_b^*$ ,  $\Delta \in \mathcal{F}$ , で定義する。

|           |                 |                  |               |              |                 |
|-----------|-----------------|------------------|---------------|--------------|-----------------|
| 導入<br>○○○ | 遷移確率<br>○○○○○○○ | 歴史的確確と注意<br>○○○○ | 測定理論<br>●●●●○ | 極確分<br>○○○○○ | 状態遷移の面の例<br>○○○ |
| インストルメント  |                 |                  |               |              |                 |

以下の 3 条件を満たす各写像  $\mathcal{J} : \mathcal{V}_b^* \times \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{V}_a^*$  に対し,  $(a, b, S)$  に対するインストルメント  $\mathcal{I}$  で  $\mathcal{J} = \mathcal{I}^*$  を満たすものが一意に存在する：

- (1) 各  $\Delta \in \mathcal{F}$  に対し, 写像  $\mathcal{V}_b^* \ni M \mapsto \mathcal{J}(M, \Delta) \in \mathcal{V}_a^*$  は正規, 正値かつ線型である。
- (2)  $\mathcal{J}(1, S) = 1$ 。
- (3) 各  $\rho \in \mathcal{V}_a$ ,  $M \in \mathcal{V}_b^*$  および  $\mathcal{F}$  の互いに素な列  $\{\Delta_j\}_{j \in \mathbb{N}}$  に対し,

$$\langle \mathcal{J}(M, \cup_j \Delta_j), \rho \rangle = \sum_{j=1}^{\infty} \langle \mathcal{J}(M, \Delta_j), \rho \rangle. \quad (13)$$

今後,  $\mathcal{I}$  で,  $(a, b, S)$  に対するインストルメント  $\mathcal{I}$  の双対写像  $\mathcal{I}^*$  のことも表す。双対写像のことも  $(a, b, S)$  に対するインストルメントと呼ぶ。

対象系  $S$  が  $a = (\mathcal{X}_a, \mathcal{V}_a) \in \mathbf{C}^*\text{-PS}$  で記述されるときを考える。

**Davies-Lewis の提唱.**

対象系  $S$  を測定する, 可測空間  $(S, \mathcal{F})$  に値をとる出力変数  $x$  をもつ測定装置  $A(x)$  ごとに,  $(a, S)$  に対するインストルメント  $\mathcal{I}$  が以下の意味でただ一つ存在する。  $S$  の各始状態  $\rho$  に対し,  $\rho$  における  $x$  の出力に関する確率測度  $\Pr\{x \in \Delta \parallel \rho\}$  は

$$\Pr\{x \in \Delta \parallel \rho\} = \|\mathcal{I}(\Delta)\rho\|, \quad \Delta \in \mathcal{F}, \quad (14)$$

で与えられる。そして,  $\rho$  が準備され,  $\Delta \in \mathcal{F}$  に属さない出力変数  $x$  の値は無視する状況での測定後の状態  $\rho_{\{x \in \Delta\}}$  は,  $\Pr\{x \in \Delta \parallel \rho\} > 0$  のとき,

$$\rho_{\{x \in \Delta\}} = \frac{\mathcal{I}(\Delta)\rho}{\|\mathcal{I}(\Delta)\rho\|} \quad (15)$$

である。ただし,  $\Pr\{x \in \Delta \parallel \rho\} = 0$  のときは  $\rho_{\{x \in \Delta\}}$  は不定であるとする。

## 被積分

**定義 9 (被積分).**

$a, b \in \mathbf{C}^*\text{-PS}$  とする。  $\mathcal{I}$  を  $(a, b, S)$  に対するインストルメントとし  $\rho \in \mathcal{S}_a$  とする。  $\mathcal{X}_b$  上の状態の族  $\{\rho_s\}_{s \in S}$  が  $(\mathcal{I}, \rho)$  に対する被積分であるとは, 以下の条件を満たすときを言う:

- (1) 写像  $s \mapsto \rho_s$  は弱 \*  $\|\mathcal{I}\rho\|$ -可測である。
- すなわち, すべての  $A \in \mathcal{X}$  に対し,  $s \mapsto \rho_s(A)$  は  $\|\mathcal{I}\rho\|$ -可測である。
- (2) 各  $A \in \mathcal{X}$  と  $\Delta \in \mathcal{F}$  に対し,

$$[\mathcal{I}(\Delta)\rho](A) = \int_{\Delta} \rho_s(A) d\|\mathcal{I}\rho\|(s). \quad (16)$$

**定理 1.**

$(a, b, S)$  に対するインストルメント  $\mathcal{I}$  と  $\rho \in \mathcal{V}_a$  に対し,  $(\mathcal{I}, \rho)$  に対する被積分  $\{\rho_s\}_{s \in S}$  が常に存在する。

**定義 10.**

$(a, b, S)$  に対するインストルメント  $\mathcal{I}$  が条件 (S) を満たすとは, 各  $\rho \in \mathcal{V}_a$  に対し, 写像  $s \mapsto \rho_s$  が強可測であるときをいう。

## 事後状態

**定義 11 (事後状態).**

$\mathcal{I}$  を  $(a, b, S)$  に対するインストルメント,  $\rho \in \mathcal{S}_a$  とする。  $\mathcal{X}_a$  上の状態の族  $\{\rho_s\}_{s \in S}$  が  $(\mathcal{I}, \rho)$  に対する事後状態の族であるとは, 以下の条件を満たすときを言う:

- (1) 各  $s \in S$  に対し,  $\rho_s \in \mathcal{S}_a$ 。
- (2) 写像  $s \mapsto \rho_s$  は弱 \*  $\|\mathcal{I}\rho\|$ -可測である。
- (3) 各  $M \in \mathcal{V}_b^*$  と  $\Delta \in \mathcal{F}$  に対し,

$$\langle M, \mathcal{I}(\Delta)\rho \rangle = \int_{\Delta} \langle M, \rho_s \rangle d\|\mathcal{I}\rho\|(s). \quad (17)$$

**定義 12.**

$(a, b, S)$  に対するインストルメント  $\mathcal{I}$  が条件 (C) を満たすとは, 単位的正值線型写像  $\Psi: \mathcal{V}_b^* \otimes L^\infty(S, \mathcal{I}) \rightarrow \mathcal{V}_a^*$  で  $\mathcal{I}^*(M, \Delta) = \Psi(M \otimes [\chi_\Delta])$ ,  $M \in \mathcal{V}_b^*$ ,  $\Delta \in \mathcal{F}$ , を満たすものが存在するときをいう。

|           |                |                  |              |             |                |   |
|-----------|----------------|------------------|--------------|-------------|----------------|---|
| 導入<br>○○○ | 遷移確率<br>○○○○○○ | 歴史的時間と注意<br>○○○○ | 測定理論<br>○○○○ | 補積分<br>○○●○ | 状態遷移の図の例<br>○○ | ○ |
| 事後状態      |                |                  |              |             |                |   |

**定理 2.**  
条件 (C) を満たす  $(a, b, S)$  に対するインストルメント  $\mathcal{I}$  と  $\rho \in \mathcal{V}_a$  に対し,  $(\mathcal{I}, \rho)$  に対する強可測な事後状態の族  $\{\rho_s\}_{s \in S}$  は常に存在する。

**定理 3 [Ozawa'85].**  
 $(B(\mathcal{H}), S)$  に対するインストルメント  $\mathcal{I}$  と  $\mathcal{H}$  上の密度作用素  $\rho$  に対し,  $(\mathcal{I}, \rho)$  に対する強可測な事後状態の族  $\{\rho_s\}_{s \in S}$  は常に存在する。

[Ozawa'85] M. Ozawa, Publ. RIMS 21 (1985), 279–295.

**同一視.**  
 $a, b \in \mathbf{C}^*$ -PS とし,  $T$  を  $\mathcal{V}_a$  から  $\mathcal{V}_b$  への単位的正值線型写像とする。  
 $(a, b, \{*\})$  に対するインストルメント  $\mathcal{I}_T$  を次で定める：

$$\mathcal{I}_T(\{*\}) = T \quad (18)$$

|           |                |                  |              |             |                |   |
|-----------|----------------|------------------|--------------|-------------|----------------|---|
| 導入<br>○○○ | 遷移確率<br>○○○○○○ | 歴史的時間と注意<br>○○○○ | 測定理論<br>○○○○ | 補積分<br>○○●● | 状態遷移の図の例<br>○○ | ○ |
| 事後状態      |                |                  |              |             |                |   |

**定義 13 (インストルメントの圏) .**  
インストルメントの圏とは次からなる：

**対象**  $\mathbf{C}^*$ -確率構造  $a = (\mathcal{V}_a, \mathcal{V}_a)$

**射**  $b \leftarrow a : \mathcal{I}$  は  $(a, b, S)$  に対するインストルメント  $\mathcal{I}$ 。  
各対象  $a$  に対する恒等射  $a \leftarrow a : 1_a$  とは,  $(a, \{*\})$  に対するインストルメント  $1_a(\{*\})\rho = \rho, \rho \in \mathcal{V}_a$ , のこと。  
射の合成はインストルメントの合成に基づく。

**定義 14.**  
 $\mathcal{I}', \mathcal{I}$  を  $(b, c, S'), (a, b, S)$  に対するインストルメントとする。 $\mathcal{I}'$  と  $\mathcal{I}$  が合成可能であるとは,  $(a, c, S' \times S)$  に対するインストルメント  $\mathcal{I}''$  で

$$\mathcal{I}''(\Gamma \times \Delta) = \mathcal{I}'(\Gamma)\mathcal{I}(\Delta) \quad (19)$$

を満たすものが存在するときをいう。この  $\mathcal{I}''$  を  $\mathcal{I}'$  と  $\mathcal{I}$  の合成という。

合成可能でない例も知られている [Wr73]。  
[Wr73] J.D.M. Wright, Quart. J. Math. Oxford (2), 24 (1973), 189–206.

## 具体的な圏

### 定義 15 (インストルメントに誘導される遷移確率).

$(a, b)$  に対する遷移確率  $P$  が  $(a, b, S)$  に対するインストルメント  $\mathcal{I}$  に誘導されるとは,  $\mathcal{I}$  が条件 (S) を満たし, かつ

$$P(\Delta \leftarrow \omega) = \|\mathcal{I}\omega\|(\{s \in S \mid \omega_s \in \Delta\}) \quad (20)$$

が任意の  $\omega \in \mathcal{S}_a$  および  $\Delta \in \mathcal{B}(\mathcal{S}_{\mathcal{X}_b})$  に対し成り立つときを言う。

### 例 2.

圏  $\mathbf{C}^{\mathcal{H}}$

ただ 1 つの対象  $B(\mathcal{H})_* \cong T(\mathcal{H})$

**射** インストルメントに誘導される遷移確率をもつ射 (合成でも強合成でも)

| 導入<br>○○○                                                                                                                                                                                                                                                                                 | 遷移確率<br>○○○○○○○ | 歴史的時間と注意<br>○○○○ | 測定理論<br>○○○○ | 複雑分<br>○○○○ | 状態遷移の図の例<br>○●○○○ |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------|------------------|--------------|-------------|-------------------|
| <p><b>例 3.</b></p> <p>圏 <math>\mathcal{CM}</math></p> <p>ただ 1 つの対象 <math>\mathcal{M}_*(= \mathcal{CM}^*)</math></p> <p>射 条件 (C) を満たすインストルメントに誘導される遷移確率をもつ射 (合成でも強合成でも)</p>                                                                                                                |                 |                  |              |             |                   |
| <p>この研究は次の論文に刺激を受けている：</p> <p>H. Saigo, M. Naruse, KO, H. Hori, and I. Ojima, Analysis of Soft Robotics Based on the Concept of Category of Mobility, Complexity <b>2019</b> (2019), 1490541. <a href="https://doi.org/10.1155/2019/1490541">https://doi.org/10.1155/2019/1490541</a></p> |                 |                  |              |             |                   |
| <p>将来的には，</p> <p>量子場，局所状態，圏代数，Schrödinger 描像以外の描像…とも結びつけたい。</p>                                                                                                                                                                                                                           |                 |                  |              |             |                   |
| <p>Thank you for your attention!</p>                                                                                                                                                                                                                                                      |                 |                  |              |             |                   |

# Semi-classical analysis between Newton-Maxwell equation and non-relativistic QED

廣島文生 (九大数理)

with

Zied Ammari (Rennes I) and Marco Falconi (La Sapienza)

2022 年 2 月 22 日 – 24 日 九大 IMI(オンライン)  
解析から設計に向けたオフシエル数理科学

Fumio Hiroshima

NM equation

2022

1 / 28

- 1 Introduction
- 2 Finite dimensional case=QM
- 3 Infinite dimensional case = QFT
- 4 Lamb shift and interaction models
- 5 Regularity of N-M equations
- 6 Wigner measures associated with PF model

Fumio Hiroshima

NM equation

2022

2 / 28

## Introduction

- P.L. Lions and T. Paul (1993) studied the limit of

$$W_{\hbar}(x, \xi) = (2\pi\hbar)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\xi y/\hbar} u_{\hbar}(x + \frac{y}{2}) \overline{u_{\hbar}(x - \frac{y}{2})} dy.$$

- The result is

$$W_{\hbar}(x, \xi) \rightarrow \text{measure } \mu$$

for a certain subsequence  $\hbar_n \rightarrow 0$ , and  $\mu$  satisfies the Liouville equation.

- (Finite dimension) P. L. Lions and T. Paul (1993).
- (Infinite dimension) Z. Ammari and F. Nier (2008, 2011).
- (Interaction system) Z. Ammari. M. Falconi (2014),
- **Z. Ammari. M. Falconi and FH (2022)** ←—today's talk

## Symplectic structures

- $\hbar = h/2\pi = 1.054571817... \times 10^{-34} Js$
- $\hat{P} = -i\hbar D_x$  and  $\hat{Q} = x \rightarrow \text{CCR: } [\hat{P}, \hat{Q}] = -i\hbar$
- $X = (q, p) \in T^*\mathbb{R}^d = \mathbb{R}^d \oplus \mathbb{R}^d \cong \mathbb{C}^d \quad (q, p) \cong q + ip$
- phase translation:  $X = (q, p) \in T^*\mathbb{R}^d$

$$T(X) = \exp(i(p\hat{Q} - q\hat{P}))$$

- symplectic structure:  $X = q + ip, X' = q' + ip'$

$$\sigma(X, X') = qp' - pq' = \text{Im}(X, X')_{T^*\mathbb{R}^d}$$

- Algebraic relations

$$T(X)T(X') = e^{-i\hbar\sigma(X, X')/2} T(X + X')$$

## Hamilton-Jacobi equation and time evolutions in QM

- Hamiltonian  $H = -\hbar^2 \Delta + V$  ( $V$  is smooth).
- classical Hamiltonian  $H(q, p) = p^2 + V(q)$ ,  $(q, p) \in T^*\mathbb{R}^d$ .
- Hamilton-Jacobi equation

$$\begin{cases} \dot{q}_t = \frac{\partial H}{\partial p} \\ \dot{p}_t = -\frac{\partial H}{\partial q} \end{cases}$$

Hence

$$\begin{cases} \dot{q}_t = 2p_t \\ \dot{p}_t = -\nabla V(q_t) \end{cases}$$

with the initial data

$$(q_0, p_0) = (q, p).$$

- The flow  $\Phi_t : T^*\mathbb{R}^d \rightarrow T^*\mathbb{R}^d$  is defined by

$$\Phi_t(q, p) = (q_t, p_t).$$

## Definition of Wigner measures on $T^*\mathbb{R}^d$

- A Borel probability measure  $\mu$  on  $T^*\mathbb{R}^d$  is a **Wigner measure** of a family of trace class operators  $(\rho_h)_{h \in (0,1)}$  on  $L^2(\mathbb{R}^d)$  iff  $\exists$  countable subset  $\mathcal{E} \subset (0, 1)$  with  $0 \in \overline{\mathcal{E}}$  such that for any  $X = (p, q) \in T^*\mathbb{R}^d$ :

$$\lim_{\hbar \rightarrow 0, h \in \mathcal{E}} \text{Tr}[\rho_h T(\pi q, -\pi p)] = \int_{T^*\mathbb{R}^d} e^{2\pi i \text{Re}\langle X, u \rangle} d\mu(u).$$

- Let

$$\mathcal{M} = \mathcal{M}(\rho_h, \hbar \in (0, 1))$$

be the set of Wigner measures associated with  $(\rho_h)_h$ .

- $(\rho_h)_h$  is **pure** iff  $\#\mathcal{M} = 1$ .

## Example

► Gaussian function

$$\phi_0(x) = (\pi\hbar)^{-d/4} \exp\left(-\frac{|x|^2}{2\hbar}\right)$$

► For  $Y = (q', p') \in T^*\mathbb{R}^d$  we define  $\phi_Y = T\left(\frac{\sqrt{2}}{i\hbar} Y\right)\phi_0$

► coherent state ( $\subset$  projection)

$$\rho_\hbar(Y) = |\phi_Y\rangle\langle\phi_Y| \quad Y \in T^*\mathbb{R}^d$$

► For  $X = (q, p) \in T^*\mathbb{R}^d$ , we have

$$\text{Tr}[\rho_\hbar(Y) T(\pi q, -\pi p)] = (\phi_Y, T(\pi q, -\pi p)\phi_Y) \xrightarrow{\hbar \rightarrow 0} e^{2\pi i \text{Re}(X, Y)} = F^{-1}[\delta_Y](X)$$

and  $\mathcal{M} = \{\delta_Y\}$ . I.e.,  $\#\mathcal{M} = 1$

► Semi-classical limit of coherent state  $|\phi_Y\rangle\langle\phi_Y|$  is the delta measure  $\delta_Y$  with mass at  $Y$  on  $T^*\mathbb{R}^d$ .

► We are interested in Wigner measures for the time evolution

$\rho_\hbar(t) = e^{-i\frac{t}{\hbar}H}\rho_\hbar e^{i\frac{t}{\hbar}H}$  and the relationship between  $\mu_t$  and  $\mu_0$ .

### Theorem (Lions and Paul 93)

Suppose that  $\mathcal{M} = \mathcal{M}((\rho_\hbar)_\hbar, \hbar \in (0, 1))$  is pure and  $\mathcal{M} = \{\mu_0\}$ .

(1)  $\mathcal{M}((\rho_\hbar(t))_\hbar, \hbar \in (0, 1))$  is also pure.

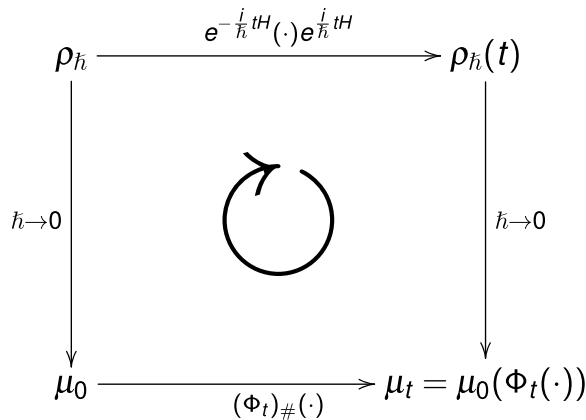
(2) By the flow  $\exists \Phi_t : T^*\mathbb{R}^d \rightarrow T^*\mathbb{R}^d$  defined by  $\Phi_t(q_0, p_0) = (q_t, p_t)$  with

$$\begin{cases} \dot{q}_t = 2p_t \\ \dot{p}_t = -\nabla V(q_t), \end{cases}$$

one obtains that

$$\mu_t(\cdot) = \mu_0(\Phi_t(\cdot)).$$

## General structure on Wigner measures and flows



►  $\Phi_t$  is the flow wrt Hamilton-Jacobi equation derived from quantum Hamiltonian  $H$ , i.e.,  $\Phi_t$  maps the initial data to the solution to HJ equation.

## Fock space

- $\mathcal{H}$ : Hilbert space e.g.  $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^d)$
- $\mathcal{F} = \bigoplus_{n=0}^{\infty} [\otimes_s^n \mathcal{H}]$
- $\Omega = 1 \oplus 0 \oplus 0 \oplus \dots \in \mathcal{F}$  Fock vacuum
- annihilation op.  $a(f)$  and creation op.  $a^\dagger(g)$ :

$$a(f) : \otimes_s^n \mathcal{H} \rightarrow \otimes_s^{n-1} \mathcal{H}$$

$$a^\dagger(f) : \otimes_s^n \mathcal{H} \rightarrow \otimes_s^{n+1} \mathcal{H}$$

- CCR:  $[a(f), a^\dagger(g)] = (\bar{f}, g)$
- $a^\sharp \sim \sqrt{\hbar}$
- $\{a^\dagger(f_1) \cdots a^\dagger(f_n) \Omega\} \subset \mathcal{F}$  dense

► The free field Hamiltonian

$$H_f = d\Gamma(|k|) = \int |k| a^\dagger(k) a(k) dk$$

► The number op.

$$N = d\Gamma(1) = \int a^\dagger(k) a(k) dk$$

►  $N, H_f \sim \hbar$

► Field operator :  $\phi(f) = \frac{1}{\sqrt{2}}(a^\dagger(f) + a(\bar{f})) \sim \sqrt{\hbar}$

►  $W(f) = \exp(i\sqrt{\hbar}\phi(f))$

► Weyl relation

$$W(f)W(g) = e^{-i\frac{\hbar}{2}\text{Im}(f,g)} W(f+g)$$

## Definition of Wigner measures on $L^2(\mathbb{R}^d)$

► A Borel probability measure  $\mu$  on  $L^2(\mathbb{R}^d)$  is a Wigner measure of a family of density matrices  $(\rho_{\hbar})_{\hbar \in (0,1)}$  on the Hilbert space  $\mathcal{H}$  iff

$\exists$  countable subset  $\mathcal{E} \subset (0,1)$  with  $0 \in \overline{\mathcal{E}}$  such that for any  $z \in L^2(\mathbb{R}^d)$ :

$$\lim_{\hbar \rightarrow 0, \hbar \in \mathcal{E}} \text{Tr}[\rho_{\hbar} W(\sqrt{2\pi}z)] = \int_{L^2(\mathbb{R}^d)} e^{2\pi i \text{Re}\langle z, u \rangle_{L^2(\mathbb{R}^d)}} d\mu(z).$$

## Model in QFT

### ► Hamiltonian

$$H = \underbrace{\hbar \int |k| a^\dagger(k) a(k) dk}_{H_f} + \sqrt{\hbar} \frac{g}{\sqrt{2}} (a^\dagger(\bar{f}) + a(f))$$

### ► Classical Hamiltonian

$$H(\bar{z}, z) = \int |k| \bar{z}(k) z(k) dk + \frac{g}{\sqrt{2}} \int (\bar{z}(k) \bar{f}(k) + z(k) f(k)) dk$$

### ► Hamilton-Jacobi equation:

$$i\dot{z}_t(k) = \frac{\partial H}{\partial \bar{z}} = |k| z_t(k) + \frac{g}{\sqrt{2}} \bar{f}(k)$$

## Hamilton-Jacobi equation and time evolutions in QFT

Let  $\rho_\hbar(t) = e^{-i\frac{t}{\hbar}H} \rho_\hbar e^{i\frac{t}{\hbar}H}$ .

### Theorem (Ammari-Nier 2011)

(1) Suppose that  $\mathcal{M} = \mathcal{M}((\rho_\hbar)_\hbar, \hbar \in (0, 1))$  is pure and  $\mathcal{M} = \{\mu_0\}$ .

Then  $\mathcal{M}((\rho_\hbar(t))_\hbar, \hbar \in (0, 1))$  is also pure.

(2) Let  $\Phi_t : L^2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^d)$  and  $\Phi_t(z_0) = z_t$  with

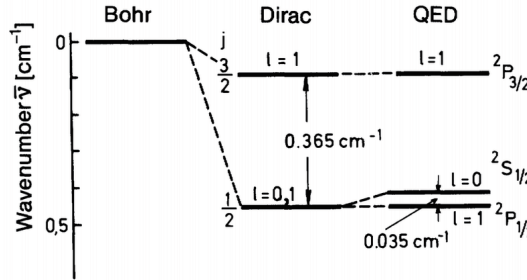
$$i\dot{z}_t(k) = \frac{\partial H}{\partial \bar{z}} = |k| z_t(k) + \frac{g}{\sqrt{2}} \bar{f}(k).$$

Then

$$\mu_t(\cdot) = \mu_0(\Phi_t(\cdot)).$$

## Lamb shift of Hydrogen atom

- We consider a system of QM coupled to QFT (QED).
- In the Dirac theory, the energy levels  $2S_{1/2}$  and  $2P_{1/2}$  of a hydrogen atom coincides:  $2S_{1/2} = 2P_{1/2}$ . It has been however observed in 1947 by Lamb and Retherford that  $2S_{1/2} < 2P_{1/2}$



**Figure:** Lamb shift

- To show the Lamb shift we have to consider an interaction between electrons and a quantized radiation field. This has been established by H. A. Bethe in 1947.

## Pauli-Fierz model

- We consider a system describing an interaction between particles and a quantum field, and derive a classical equation (e.g., Newton-Maxwell equation) due to a semi-classical limit and **Wigner measures**.
- Pauli-Fierz Hamiltonian

$$H = \frac{1}{2}(-i\hbar\nabla \otimes 1 - \sqrt{\hbar}A(x))^2 + V \otimes 1 + 1 \otimes \hbar H_f$$

is selfadjoint op. on  $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^d) \otimes \text{Fock space}$ .

- Quantized radiation field:

$$A_\mu(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{j=1}^{d-1} \left\{ a_j^\dagger \left( e_\mu(j) \frac{\hat{\phi}}{\sqrt{|k|}} e^{-ikx} \right) + a_j \left( e_\mu(j) \frac{\tilde{\phi}}{\sqrt{|k|}} e^{ikx} \right) \right\}$$

- $\{e(1), \dots, e(d-1), k/|k|\}$  is a base of  $\mathbb{R}^d$  and  $\hat{\phi}$  is a UV cutoff function.

- CCR  $[a_j(f), a_i(g)] = \delta_{ij}(\tilde{f}, g)$ .

## Classical Hamiltonian

### ► Classical Hamiltonian

$$H(z, \bar{z}, q, p) = \frac{1}{2}(p - A(q))^2 + V(q) + \sum_{j=1}^{d-1} \int |k| |z_j(k)|^2 dk,$$

where  $(q, p) \in T^*\mathbb{R}^d$  and

$$A_\mu(q) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{j=1}^{d-1} \int e_\mu(k, j) \left( \bar{z}_j(k) e^{-ikq} \frac{\hat{\phi}(k)}{\sqrt{|k|}} + z_j(k) e^{ikq} \frac{\hat{\phi}(-k)}{\sqrt{|k|}} \right) dk$$

with  $z = (z_j) \in L^2(\mathbb{R}^d, \mathbb{C}^{d-1})$

### ► Hamilton-Jacobi equation:

$$(N - M) \begin{cases} \dot{q}_t = \frac{\partial H}{\partial p} & = p_t - A(q_t) \\ \dot{p}_t = -\frac{\partial H}{\partial q} & = (p_t - A(q_t)) \cdot \nabla A(q_t) - \nabla V(q_t) \\ i\dot{z}_j = \frac{\partial H}{\partial \bar{z}_j} & = (p_t - A(q_t)) \cdot e(k, j) e^{-ikq_t} \hat{\phi}(k) + |k| z_j(t) \end{cases}$$

Assumptions:

$$(A_0) \ V \in C_b^2(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}),$$

$$(A_1) \ |\cdot|^{-1} \hat{\phi} \in L^2(\mathbb{R}^d),$$

$$(A_2^\sigma) \ |\cdot|^{-\sigma+\frac{3}{2}} \hat{\phi} \in L^2(\mathbb{R}^d), \ \sigma \in [1/2, 1]$$

Consider the following weighted  $L^2$  spaces  $\dot{H}^\sigma$  and  $H^\sigma$  with the norms

$$\|z\|_{\dot{H}^\sigma} = \left( \sum_{j=1}^{d-1} \int_{\mathbb{R}^d} |k|^{2\sigma} |z_j(k)|^2 dk \right)^{1/2},$$

$$\|z\|_{H^\sigma} = \left( \sum_{j=1}^{d-1} \int_{\mathbb{R}^d} (1 + |k|^2)^\sigma |z_j(k)|^2 dk \right)^{1/2},$$

and define the functional inner product spaces  $\dot{X}^\sigma = T^*\mathbb{R}^d \times \dot{H}^\sigma$  and  $X^\sigma = T^*\mathbb{R}^d \times H^\sigma$  endowed respectively with the norms

$$\|u\|_{\dot{X}^\sigma}^2 = |p|^2 + |q|^2 + \|z\|_{\dot{H}^\sigma}^2,$$

$$\|u\|_{X^\sigma}^2 = |p|^2 + |q|^2 + \|z\|_{H^\sigma}^2$$

with  $u = (p, q, z)$  in  $\dot{X}^\sigma$  or  $X^\sigma$ .

$X^\sigma$  are always Hilbert space, while  $\dot{X}^\sigma$  are complete only for  $\sigma < \frac{d}{2}$ .

$$\dot{X}^\sigma \equiv T^*\mathbb{R}^d \times \dot{H}^\sigma \quad \text{and} \quad X^\sigma \equiv T^*\mathbb{R}^d \times H^\sigma.$$

### Theorem (Ammari+Falconi+FH)

Let  $\sigma \in [\frac{1}{2}, 1]$ . Then for  $\forall$  initial condition  $u_0 \in X^\sigma$  there exists a unique global strong solution  $u(\cdot) \in C(\mathbb{R}, X^\sigma) \cap C^1(\mathbb{R}, X^{\sigma-1})$  of the N-M equation. Moreover, the generalized global flow

$$\begin{aligned} \Phi_t : X^\sigma &\rightarrow X^\sigma \\ u_0 &\mapsto u(t) \end{aligned}$$

is Borel measurable.

## Definition of Wigner measures on $T^*\mathbb{R}^d \oplus L^2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^{d-1})$

► Let  $\mathbb{X} = T^*\mathbb{R}^d \oplus L^2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^{d-1})$ .

► A Borel probability measure  $\mu$  on  $\mathbb{X}$  is a Wigner measure of a family of density matrices  $(\rho_{\hbar})_{\hbar \in (0,1)}$  on the Hilbert space  $\mathcal{H}$  iff  $\exists$  countable subset  $\mathcal{E} \subset (0, 1)$  with  $0 \in \overline{\mathcal{E}}$  such that for any  $\xi \in \mathbb{X}$ :

$$\lim_{\hbar \rightarrow 0, \hbar \in \mathcal{E}} \text{Tr}[\rho_{\hbar} T(\pi q, -\pi p) W(\sqrt{2}\pi z)] = \int_{\mathbb{X}} e^{2\pi i \text{Re}\langle \xi, u \rangle_{\mathbb{X}}} d\mu(\xi).$$

## Example

Consider the normalized Gaussian function  $\varphi_0(x) = (\pi\hbar)^{-\frac{d}{4}} e^{-x^2/2\hbar}$ . Then the coherent vector, centered on  $z = (q, p) \in T^*\mathbb{R}^d$ , is defined as

$$\varphi_z = T\left(\frac{\sqrt{2}}{i\hbar} z\right) \varphi_0.$$

Similarly, for any  $\alpha \in L^2(\mathbb{R}^d, \mathbb{C}^{d-1})$  one defines coherent vectors in the Fock spaces as

$$\Omega_{\alpha} = W\left(\frac{\sqrt{2}}{i\hbar} \alpha\right) \Omega.$$

Hence, for any  $\xi = (z, \alpha) \in \mathbb{X}$ , the one rank orthogonal projection

$$C_{\hbar}(\xi) = |\varphi_z \otimes \Omega_{\alpha}\rangle \langle \varphi_z \otimes \Omega_{\alpha}|$$

defines a  $\hbar$ -scaled family of density matrices over  $\mathcal{H}$  called the coherent states.

The set of Wigner measures for family of coherent states is remarkably simple and it is given below.

### Lemma

Consider for any  $\xi = (p, q, z)$  the family of coherent states  $C_{\hbar}(\xi)$ . Then

$$\mathcal{M}(C_{\hbar}(\xi), \hbar \in (0, 1)) = \{\delta_{\xi}\}$$

with  $\delta_{\xi}$  is the Dirac measure on  $T^*\mathbb{R}^d \otimes L^2(\mathbb{R}^d, \mathbb{C}^{d-1})$  centered on  $u_0$ .

## Wigner measures associated with PF model

► Let  $\rho_{\hbar}(t) = e^{-i\frac{t}{\hbar}H} \rho_{\hbar} e^{i\frac{t}{\hbar}H}$ .

► We set  $T(\pi q, -\pi p) \otimes W(\sqrt{2}\pi z) = W(\xi)$  for  $\xi = (q, p, z) \in \mathbb{X}$ .

### Theorem (Ammari+Falconi+FH)

Assume (I)  $\text{Tr}[\rho_{\hbar}(t)H_0] < C$ , (II)  $\text{Tr}[\rho_{\hbar}(t)(\hbar^2 N^2 + q^2)^{\delta}] < C$  and (III)  $\text{Tr}[\rho_{\hbar}(t)\hbar d\Gamma(|k|^{2\sigma})] < C$  uniformly for  $\hbar \in [0, 1]$ .

Moreover we assume that  $\mathcal{M}((\rho_{\hbar}(t))_{\hbar}, \hbar \in (0, 1))$  is pure for  $t = 0$ .

(1)  $\mathcal{M}(\rho_{\hbar}(t))_{\hbar}, \hbar \in (0, 1) = \{\mu_t\}$  is also pure.

(2)

$$\mu_t = \mu_0(\Phi_t(\cdot)),$$

where the flow  $\Phi_t : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{X}$  is defined by  $\Phi_t(q, p, z) = (q_t, p_t, z_t)$  which satisfies (N-M).

## Outline of the proof

The proof is very long and technical.

► We take the interaction picture.

$$\tilde{\rho}_{\hbar}(t) = e^{i\frac{t}{\hbar}H_0}\rho_{\hbar}(t)e^{-i\frac{t}{\hbar}H_0}.$$

► The free flow  $\Phi_t^0 : X^\sigma \rightarrow X^\sigma$  is given by

$$\Phi_t^0(p, q, z) = (p, q + tp, e^{-it|\cdot|}z).$$

### Theorem (Existence of Wigner measures (AFH))

Any family of density matrices  $(\alpha_{\hbar})_{\hbar \in (0,1)}$  on  $\mathcal{H}$  satisfying the condition:

$$\exists \delta > 0, \exists C_\delta > 0 : \text{ st } \forall \hbar \in (0, 1), \quad \text{Tr}[\alpha_{\hbar}(p^2 + q^2 + \hbar N)^\delta] < C_\delta,$$

has a non trivial set of Wigner measures, i.e.:  $\mathcal{M}(\alpha_{\hbar}, \hbar \in (0, 1)) \neq \emptyset$ .

Moreover, any  $\mu \in \mathcal{M}(\alpha_{\hbar}, \hbar \in (0, 1))$  satisfies

$$\int_{\mathbb{X}} \|u\|_{\mathbb{X}}^{2\delta} d\mu(u) < \infty.$$

Fumio Hiroshima

NM equation

2022

25 / 28

By the previous lemma, a diagonal argument, Prokhorov's theorem and Duhamel formula:

$$\text{Tr}[W\tilde{\rho}_{\hbar}(t)] = \text{Tr}[W\tilde{\rho}_{\hbar}(s)] - \frac{i}{\hbar} \int_s^t \text{Tr}([W, H_I(u)]\tilde{\rho}_{\hbar}(u))du,$$

where  $H_I(u) = e^{i\frac{t}{\hbar}H_0}(H - H_0)e^{-i\frac{t}{\hbar}H_0}$ , we can show the lemma below.

### Lemma

For any sequence  $(\hbar_n)_{n \in \mathbb{N}}$  in  $(0, 1)$ ,  $\hbar_n \rightarrow 0$ , there exists a subsequence  $(\hbar_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$  such that for all  $t \in \mathbb{R}$ ,

$$\mathcal{M}(\tilde{\rho}_{\hbar_{n_k}}(t), k \in \mathbb{N}) = \{\tilde{\mu}_t\}.$$

Moreover, for every compact time interval  $J$  there exists a constant  $C > 0$  such that for all times  $t \in J$ ,

$$\int_{\mathbb{X}} \left( \|\alpha\|_{H_0}^4 + \|\alpha\|_{H^\sigma}^2 + p^2 + q^2 \right) d\tilde{\mu}_t < C.$$

Fumio Hiroshima

NM equation

2022

26 / 28

- Let  $\tilde{\Phi}_t : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{X}$  be the flow associated with  $H - H_0$ .
- Finally we can see that  $\mu_t$  exists and

$$\mu_t = \tilde{\mu}_t(\Phi_t^0(\cdot)) = \tilde{\mu}_0(\Phi_t^0 \circ \tilde{\Phi}_t(\cdot)) = \mu_0(\Phi_t(\cdot)). \quad QED$$

### Technical ingredients

- (Invariance)  $e^{-itH}D(A) \subset D(A)$  for all  $t$  and  $\hbar \in [0, 1]$  for  $A = N, p^2, q^2$ . i.e., we have to show that

$$\|Ae^{-itH}\Psi\| < \infty \quad \text{for } \Psi \in D(A).$$

- (Self-adjointness) Let  $V_+ \in L_{loc}^1(\mathbb{R}^d)$  and  $V_-$  be relatively form bounded wrt  $-\Delta$  with a relative bound  $< 1$ .  $H$  is self-adjoint on  $D(-\frac{1}{2}\Delta \dot{+} V_+ \dot{+} V_-) \cap D(H_f)$  (FH00, Hasler-Herbst11, Falconi15, Matte17)

## Summary

- Hamiltonian  $H = H_\hbar$
- Classical Hamiltonian  $H = H(z, \bar{z}, q, p)$  for  $(q, p, z) \in T^*\mathbb{R}^d \oplus L^2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^{d-1})$
- Hamilton-Jacobi equation

$$(N - M) \begin{cases} \dot{q}_t = \frac{\partial H}{\partial p} \\ \dot{p}_t = -\frac{\partial H}{\partial q} \\ i\dot{z}_j = \frac{\partial H}{\partial \bar{z}_j} \end{cases}$$

- $\rho_\hbar(t) = e^{-i\frac{t}{\hbar}H} \rho_\hbar e^{i\frac{t}{\hbar}H}$
- $\lim_{\hbar \rightarrow 0} \text{Tr}[T(\pi q, -\pi p) \otimes W(\sqrt{2}\pi z) \rho_\hbar(t)] = F^{-1}[\mu_t](X, z)$
- $\Phi_t : T^*\mathbb{R}^d \oplus L^2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^{d-1}) \rightarrow T^*\mathbb{R}^d \oplus L^2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^{d-1})$  satisfies

$$\mu_t = \mu_0(\Phi_t(\cdot))$$

- $\Phi_t(q, p, z) = (q_t, p_t, z_t)$  satisfies (N-M).

# “オフシエル物理”における双対場の役割について

佐久間弘文、(一社) ドレスト光子研究起点

Hirofumi Sakuma, Research Origin for Dressed Photon

1 / 26

## table of contents

- ① 概要
- ② はじめに
- ③ 双対概念について
- ④ 保存則について
- ⑤ 一般化された Hamiltonian 構造
- ⑥ Ertel's charge の表現
- ⑦ Dirac's  $\gamma$  matrix と時空の創発
- ⑧ 最後に

2 / 26

## [1] 概要

☆近年、物理学界で注目されているテーマの一つである、時空が有すると思われる二つの異質な特性：

- 1) スピンネットワーク、
- 2) 熱力学的性質

これらの統一的理解を試みる事が、本発表のテーマである。

☆導かれた結論は、発表者が昨年 Symmetry 誌で論じた、dark energy & matter モデルと深く関連するが、時間の制約の為、今回はその部分は割愛する。

3 / 26

## [2] どんな問題を考えるのか？

### ・表現する “対象” とその “手段”

「対象」：考察対象となる物理系  
(の支配方程式)

「手段 (a)」：背景場的な空間、変化を表すためのパラメータとしての時間

「手段 (b)」：モデル化に必須な  
「質点」等の物質の特性を表す物理パラメータ。

4 / 26

## [2] 二つの異なる状況

- (1) 非相対論的状況

「対象」と「手段 (a)」(時間、空間)とは相互作用しない。演劇に例えると、演劇が「対象」で、時間、空間が舞台に対応。

- (2) 相対論的状況

「対象」と「手段 (a)」とが相互作用する。

5 / 26

## [2] 相対論的状況

- Einstein field equation:

$$R_{\mu}^{\nu} - \frac{R}{2}g_{\mu}^{\nu} + \Lambda g_{\mu}^{\nu} = -\frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu}^{\nu}. \quad (1)$$

左辺 (Ricci 曲率):  $R_{\mu\nu} = R^{\sigma}_{\mu\nu\sigma}$

宇宙項:  $\Lambda g_{\mu}^{\nu}$  (物理的意味)

右辺: エネルギー・運動量テンソル

- Weyl 曲率 ( $W^2 := W^{\alpha\beta\gamma\delta}W_{\alpha\beta\gamma\delta}$ )

$$W^{\mu\alpha\beta\gamma}W^{\nu}_{\alpha\beta\gamma} - \frac{W^2}{4}g^{\mu\nu} = 0, \quad (2)$$

6 / 26

## [2] その様な事を考えるわけ

- On-shell vs. off shell

(1) 見えるもの（観測可能） vs. 見えないもの（観測できない）

(2) 見える物体 vs. 見えない（観測の対象ではない）時空

(3) エネルギー・運動量を伴う Timelike な局所的存在 vs. Spacelike な非所的存在。

(4) 時空 ( $g^{\mu\nu}$ ) の創発は、場の特性としての on-shell 性と off-shell 性が絡む双対性の問題と深く関わっている重要な問題。

7 / 26

## [3] ミクロ・マクロ双対（私見）

- 世間にある直観的なイメージ

量子世界の神秘性  $\Rightarrow$  量子世界の研究が重要で面白いもの、古典的世界の研究は、細部を技術的に詰めるだけの様な感じ。

- MMD の真髄

世界は、ミクロとマクロの（ある意味で対等な）双対関係で成り立っている。量子的存在が、局所的な粒子と非局所的な波動の両面を有している事は、その事を示しているのではないか？

8 / 26

## [ 3 ] 古典物理の中の双対構造

- Canonical Hamiltonian ( $H$ ) 構造

$$\frac{D\lambda}{Dt} = -\frac{\partial H}{\partial \mu}, \quad \frac{D\mu}{Dt} = \frac{\partial H}{\partial \lambda}, \quad (3)$$

この構造は、barotropic 流体に対しても成立する。

- Barotropic vs. baroclinic fluids

$$D_t v_\mu := \partial_t v_\mu + v^\nu \partial_\nu v_\mu = \partial_\mu p / \rho. \quad (4)$$

$$\text{Barotropic: } \oint_\gamma (\partial_\mu p / \rho) dl = 0 \quad (5)$$

$$\text{Baroclinic: } \oint_\gamma (\partial_\mu p / \rho) dl \neq 0. \quad (6)$$

9 / 26

## [ 4 ] 保存則について (1)

- Barotropic  $\implies$  渦の不生不滅

これは、Lagrange 渦定理として知られる内容である。(一番簡単な例は、2次元非圧縮流体に関する渦度保存)

- Baroclinic では保存量があるのか？

1942 年に Ertel により発見された potential 渦度  $Q$  は、そのような保存量。3次元圧縮完全流体に対して

$$D_t Q := \partial_t Q + v^\nu \partial_\nu Q = 0. \quad (7)$$

10 / 26

## [4] 保存則について (2)

### • $Q$ の具体的な表現

$$Q := \frac{1}{\rho} \vec{\zeta} \cdot \vec{\nabla} s \quad (8)$$

ここに、 $\rho, \vec{\zeta}, s$  はそれぞれ、密度、3次元渦度ベクトル、単位質量当たりのエントロピー密度。

11 / 26

## [5] 一般化された Hamiltonian(H)

### • 一般化された $H$ の構造

$$H_G := E + C_F, \quad (9)$$

$$E := \int \langle \rho v^\nu v_\nu / 2 + \rho e(\rho, s) \rangle dV, \quad (10)$$

$$C_F := \int \langle \rho F(s, Q) \rangle dV. \quad (11)$$

$F$  は定常状態を指定する任意の変数で

$$\delta H_G = \delta E + \delta C_F = 0, \quad (12)$$

$$F - Q \frac{\partial F}{\partial Q} + B(s, Q) = 0. \quad (13)$$

12 / 26

## [5] $\delta H_G = 0$ が意味するもの

- 不安定軌道  $\delta^2 H_G = 0$  は  $C_F$  の情報なしには決められない！  $H_G$  の事を知らなかった場合は、normal mode 解析で安定、不安定を決めていた。(Normal mode) の形を取らない解は、取り扱えない！
- 流体力学系は、3成分の速度場と、(一般に) 二つ熱力学変数で記述される。この意味で、 $C_F$  は、全エネルギーと比べた場合、additional な保存量ではなく、同格な保存量である。(双対関係)

13 / 26

## [5] 前述の双対関係が意味するものは？

- 量子場理論の Haag no go theorem  
相互作用する量子場と自由場とはユニタリー変換(時間発展)で繋ぐ事ができない。
- 古典場に対しては、物質場 vs. (スピンネットワーク的) 時空

14 / 26

## [ 6 ] 相対論的 Q の表現 ( 1 )

### ■ 始めに非相対論的表現

$$D_t v_\mu := \partial_t v_\mu + v^\nu \partial_\nu v_\mu = \partial_\mu p / \rho. \quad (4)$$

$$-dp/\rho = Tds - dw, \quad D_t s = 0, \quad (14)$$

$$v^\nu \partial_\nu v_\mu = v^\nu (\partial_\nu v_\mu - \partial_\mu v_\nu) + \partial_\mu (v^\nu v_\nu / 2). \quad (15)$$

ここに、 $s$  と  $w$  は単位質量当たりの entropy と enthalpy。式 (4) は

$$\partial_t v_\mu + \partial_\mu (w + v^\nu v_\nu / 2) - \zeta_{\mu\nu} v^\nu = T \partial_\mu s. \quad (16)$$

$$\zeta_{\mu\nu} := \partial_\nu v_\mu - \partial_\mu v_\nu. \quad (17)$$

15 / 26

## [ 6 ] 相対論的 Q の表現 ( 2 )

### ■ 相対論的表現

$$-dp/n = Td(s/n) - d(w/n), \quad (18)$$

$$u^\nu \partial_\nu (s/n) = 0, \quad (19)$$

$$T^{\mu\nu} := wu^\mu u^\nu - pg^{\mu\nu}, \quad \partial_\nu T_\mu{}^\nu = 0. \quad (20)$$

式  $\partial_\nu T_\mu{}^\nu = 0$  は以下の様になる。

$$wu^\nu \partial_\nu u_\mu - \partial_\mu p + u_\mu u^\nu \partial_\nu p = 0. \quad (21)$$

16 / 26

## [ 6 ] 相対論的 Q の表現 ( 3 )

- 非相対論的表現の式 (4) を式 (16) に変換した手法を相対論的表現に当てはめる。

$$\omega_{\mu\nu} u^\nu = T \partial_\mu (s/n), \quad (22)$$

$$\omega_{\mu\nu} := \partial_\mu [(w/n) u_\nu] - \partial_\nu [(w/n) u_\mu]. \quad (23)$$

式 (22) は、entropy 保存の式 (19) を自動的に満たす。

$$0 = u^\mu \omega_{\mu\nu} u^\nu = T u^\mu \partial_\mu (s/n). \quad (24)$$

17 / 26

## [ 6 ] Ertel's charge $\Omega$ ( 1 )

- 以下の式 (26) で定義される  $\Omega$  に対して、 $Q$  の相対論的表現は、 $\Omega_T := \Omega/T$  となり、これを Ertel's charge と呼ぶことにする。

$$\omega_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & \omega_{01} & \omega_{02} & \omega_{03} \\ -\omega_{01} & 0 & \omega_{12} & -\omega_{31} \\ -\omega_{02} & -\omega_{12} & 0 & \omega_{23} \\ -\omega_{03} & \omega_{31} & -\omega_{23} & 0 \end{pmatrix} \quad (25)$$

次に、pseudo-scalar  $\Omega$  を以下で定義する。

$$\Omega := \omega_{01}\omega_{23} + \omega_{02}\omega_{31} + \omega_{03}\omega_{12}, \quad (26)$$

18 / 26

## [ 6 ] Ertel's charge $\Omega$ ( 2 )

- $\omega_{\mu\nu}$  に対する Hodge dual  $\hat{\omega}^{\mu\nu}$  を以下の様に導入する。

$$\hat{\omega}^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_{23} & -\omega_{31} & -\omega_{12} \\ \omega_{23} & 0 & -\omega_{03} & \omega_{02} \\ \omega_{31} & \omega_{03} & 0 & -\omega_{01} \\ \omega_{12} & -\omega_{02} & \omega_{01} & 0 \end{pmatrix} \quad (27)$$

19 / 26

## [ 6 ] Ertel's charge $\Omega$ ( 3 )

- 式 (25) は (26) の逆行列なので、両者を掛けると

$$\hat{\omega}^{\mu\kappa}\omega_{\kappa\nu} = \Omega g^{\mu}_{\nu}, \quad \hat{\omega}^{\mu\nu}\omega_{\nu\mu} = 4\Omega. \quad (28)$$

更に、式 (22) を使えば、

$$(\hat{\omega}^{\mu\kappa}\omega_{\kappa\nu})u^{\nu} = \Omega g^{\mu}_{\nu}u^{\nu} = T\hat{\omega}^{\mu\kappa}\partial_{\kappa}(s/n), \quad (29)$$

となり、

$$\Omega_T u^{\mu} = \hat{\omega}^{\mu\kappa}\partial_{\kappa}(s/n), \quad \text{where } \Omega_T := \Omega/T. \quad (30)$$

20 / 26

## [ 6 ] Ertel's charge $\Omega$ ( 4 )

- 式 (30) の右辺は、 $\omega_{\mu\nu}$  の交代性の為に、以下の様に書き直せる。

$$\Omega_T \begin{pmatrix} u^0 \\ u^1 \\ u^2 \\ u^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\partial_1[\omega_{23}(s/n)] - \partial_2[\omega_{31}(s/n)] - \partial_3[\omega_{12}(s/n)] \\ \partial_0[\omega_{23}(s/n)] - \partial_2[\omega_{03}(s/n)] + \partial_3[\omega_{02}(s/n)] \\ \partial_0[\omega_{31}(s/n)] + \partial_1[\omega_{03}(s/n)] - \partial_3[\omega_{01}(s/n)] \\ \partial_0[\omega_{12}(s/n)] - \partial_1[\omega_{02}(s/n)] - \partial_2[\omega_{01}(s/n)] \end{pmatrix}$$

- この式より、以下の保存式を得る。

$$\partial_\nu(\Omega_T u^\nu) = 0. \quad (31)$$

- $\Omega_T$  の物理次元は、単位体積当たりの entropy である事が示される。

21 / 26

## [ 6 ] Ertel's charge $\Omega$ ( 5 )

- スライド 17 の式 (22) から  $\Omega_T$  は、以下の様に書き直せる。

$$\Omega_T = -[\omega_{23}\partial_1(s/n) + \omega_{31}\partial_2(s/n) + \omega_{12}\partial_3(s/n)]/u^0. \quad (32)$$

これは、スライド 11 の式 (8) (以下に示す) で示した表現に対応するものである。

$$Q := \frac{1}{\rho} \vec{\zeta} \cdot \vec{\nabla} s.$$

22 / 26

## [ 7 ] Dirac's $\gamma$ matrix ( 1 )

- スライド 20 の式 (28) (式 (34) の第一式) は、以下の様に書き直せる。

$$\hat{\gamma}^{\mu}_{\nu} := \hat{\omega}^{\mu\kappa} \omega_{\kappa\nu} \quad (33)$$

$$\hat{\omega}^{\mu\kappa} \omega_{\kappa\nu} = \Omega g^{\mu}_{\nu}, \implies \hat{\gamma}^{\mu}_{\nu} = \Omega g^{\mu}_{\nu}. \quad (34)$$

これは、(以下の) Dirac's  $\gamma$  matrix と同型。

$$\frac{1}{\Omega}(\hat{\gamma}^{\mu\nu} + \hat{\gamma}^{\nu\mu}) = 2g^{\mu\nu}. \quad (35)$$

23 / 26

## [ 7 ] Dirac's $\gamma$ matrix ( 2 )

- $\omega$  field

$$g^{\mu\nu} = \frac{\hat{\omega}^{\mu\sigma} \omega_{\sigma}^{\nu}}{\Omega} = \frac{\hat{\omega}^{\mu\sigma} \omega_{\sigma}^{\nu} (\hat{\omega}^{\kappa\lambda} \omega_{\lambda\kappa})}{\Omega (\hat{\omega}^{\kappa\lambda} \omega_{\lambda\kappa})} \quad (36)$$

$$= \frac{\hat{\omega}^{\mu\sigma} \omega_{\sigma}^{\nu} (\hat{\omega}^{\kappa\lambda} \omega_{\lambda\kappa})}{(\hat{\omega}^{\kappa\lambda} \omega_{\lambda\kappa})^2 / 4}. \quad (37)$$

- Weyl tensor field

$$W^{\mu\alpha\beta\gamma} W^{\nu}_{\alpha\beta\gamma} - \frac{1}{4} W^2 g^{\mu\nu} = 0, \quad (38)$$

$$W^2 := W^{\alpha\beta\gamma\delta} W_{\alpha\beta\gamma\delta}. \quad (39)$$

24 / 26

## [ 7 ] Dirac's $\gamma$ matrix ( 4 )

### • $\omega$ and Weyl fields

$$g^{\mu\nu} = \frac{W^{\mu\alpha\beta\gamma} W^{\nu}_{\alpha\beta\gamma}}{W^2/4} = \frac{\hat{\omega}^{\mu\sigma} \hat{\omega}^{\kappa\lambda} \omega^{\nu}_{\sigma} \omega_{\kappa\lambda}}{(\hat{\omega}^{\kappa\lambda} \omega_{\lambda\kappa})^2/4} \quad (40)$$

$$= \frac{\hat{\omega}^{\mu\sigma} \hat{\omega}^{\kappa\lambda} \omega^{\nu}_{\sigma} \omega_{\kappa\lambda}}{(4\Omega)^2/4}, \quad (41)$$

これは、 $(4\Omega)^2$  と  $W^2$  の結びつきを示唆している。

25 / 26

## [ 8 ] 最後に：宇宙論における熱力学

### • Dark matter model: $[\Omega_T u^\nu, \lambda g^{\mu\nu}]$

式 (31) :  $\partial_\nu(\Omega_T) u^\nu = 0$  と  $\Omega_T$  が scalar Ricci curvature より  $W^2$  と相関が強い事から、 $\Omega_T u^\mu$  は dark matter の様に振る舞う。特に、 $\Omega_T$  は、絶対温度に反比例するので、低温域で顕著になると予想される。

### • 宇宙の構成要素

通常物質、 $(\lambda g^{\mu\nu}, \Omega_T u^\nu)$ 、dark energy

### • 熱機関としての宇宙？

通常物質の時間発展は、Dark matter、dark energy を熱浴とする熱機関では？

26 / 26

IMI一般研究\_研究集会(II)

解析から設計に向けたオフシェル数理科学

代表者 佐久間弘文 (ドレスト光子研究起点)

February 22, 24, 2022 (Feb 24)

Online

# 流体およびMHDに対するネーター の第1、第2定理と南部括弧

Noether's first and second theorems and Nambu  
bracket for fluid dynamics and MHD

**Yasuhide Fukumoto**

Institute of Mathematics for Industry,  
Kyushu University, Japan

**Rong ZOU**

University of Hawai'i at Mānoa, USA

## Nambu Mechanics



Nambu: Phys. Rev. D **7** (1973) 2405

# Euler equations for a free rigid body

## Motion of a free rigid body

Angular velocity viewed from the **body frame**  $(\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3) \in so(3)$

Angular momentum viewed from the **body frame**  $L = (I_1\Omega_1, I_2\Omega_2, I_3\Omega_3)$

Euler equations

$$\begin{aligned}\dot{L}_1 &= \frac{I_2 - I_3}{I_2 I_3} L_2 L_3, & \dot{L}_2 &= \frac{I_3 - I_1}{I_3 I_1} L_3 L_1, \\ \dot{L}_3 &= \frac{I_1 - I_2}{I_1 I_2} L_1 L_2\end{aligned}$$

Lie-Poisson bracket  $\{F, H\}(L) = -L \cdot (\nabla F \times \nabla H)$

$$\nabla F = (\partial F / \partial L_1, \partial F / \partial L_2, \partial F / \partial L_3)$$

Euler equations

$$\dot{F} = \{F, H\} \quad H = \frac{1}{2} \left( \frac{L_1^2}{I_1} + \frac{L_2^2}{I_2} + \frac{L_3^2}{I_3} \right)$$

## Nambu dynamics for a free rigid body

Casimir invariants  $C = C(L^2) \quad L^2 = L_1^2 + L_2^2 + L_3^2$

$$\dot{C} = \{C, H\} = 0 \quad \{F, H\}(L) = -L \cdot (\nabla F \times \nabla H)$$

for **any**  $H$

Casimir invariants

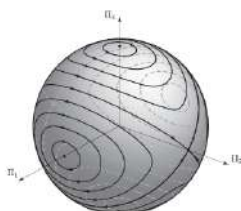


FIGURE 1.3.1. Phase portrait for the rigid body. The magnitude of the angular momentum vector determines a sphere. The intersection of the sphere with the ellipsoids of constant Hamiltonian gives the trajectories of the rigid body.

Marsden (1992)

Take  $G = L^2/2$

$$\{F, H\} = \nabla F \cdot (\nabla G \times \nabla H) = \frac{\partial(F, G, H)}{\partial(L_1, L_2, L_3)}$$

$$\dot{L}_i = \frac{\partial(L_i, G, H)}{\partial(L_1, L_2, L_3)} = (\nabla G \times \nabla H)_i$$

# Generalization of Nambu bracket

$n$ . We would introduce an  $n$ -component vector  $x_i$  and  $n-1$  Hamiltonians  $H_k$ , and postulate in lieu of Eqs. (1) and (2)

Nambu: Phys. Rev. D **7** (1973) 2405

Yoneya: Monthly J. of JPS (2017) 231

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j,k,\dots,l} \epsilon_{ijk\dots l} \frac{\partial H_1}{\partial x_j} \frac{\partial H_2}{\partial x_k} \dots \frac{\partial H_{n-1}}{\partial x_l},$$

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial(F, H_1, H_2, \dots, H_{n-1})}{\partial(x_1, x_2, \dots, x_n)},$$
(4)

where  $\epsilon_{ijk\dots l}$  is the Levi-Civita tensor.

may in general consider a number of canonical triplets  $\tilde{\mathbf{r}}_n$ ,  $n=1, \dots, N$  which form a  $3N$ -dimensional phase space, and write in place of Eq. (2)

$$\frac{dF}{dt} = \sum_n \frac{\partial(F, H_n, G)}{\partial(x_n, y_n, z_n)}.$$
(6)

For example, this will enable one to handle a model which simulates coupled spin systems.<sup>1</sup> For the

$$\frac{dF}{dt} = \sum_i \frac{\partial(F, H_i, G_i)}{\partial(x, y, z)},$$
(7)

where  $(H_i, G_i)$  are a given set of functions. Since the Liouville theorem holds with respect to each term separately, it also holds for the sum. But the individual "Hamiltonians"  $H_i, G_i$ , are no longer constants of motion in general, though there may

## Contents

### 1. Introduction to Nambu bracket

Motion of a free rigid body

Motion of an ideal barotropic fluid

### 2. Lie-Poisson bracket for MHD

*a difficulty*

### 3. Casimir=Topological invariants by Noether's 1st theorem

Particle relabeling symmetry

cross-helicity

### 4. Nambu-bracket for MHD

### 5. Remarks on Noether's 2nd theorem

Ertel invariant of non-isentropic neutral fluid

MHD

# Lie-Poisson brackets

Kuznetsov E A and Mikhailov A V 1980

$$F[\omega] = \int f(\omega) dV \quad \text{functional derivative:} \quad \frac{\delta F}{\delta \omega} = \frac{\partial f}{\partial \omega}$$

$$\frac{\delta H}{\delta \omega} = A; \quad H[\omega] = \frac{1}{2} \int A \cdot \omega dV$$

Lie-Poisson bracket

$$\{F, H\} := \int \omega \cdot \left( \text{rot} \frac{\delta F}{\delta \omega} \times \text{rot} \frac{\delta H}{\delta \omega} \right) dV$$

$$\begin{aligned} \{F, H\} &= \int \omega \cdot \left( \text{rot} \frac{\delta F}{\delta \omega} \times \text{rot} A \right) dV = \int \text{rot} \frac{\delta F}{\delta \omega} \cdot (u \times \omega) dV \\ &= \int \frac{\delta F}{\delta \omega} \cdot \text{rot} (u \times \omega) dV \end{aligned}$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = \nabla \times (u \times \omega) \quad \longleftrightarrow$$

Vorticity equation

$$\dot{F} = \{F, H\}$$

$$\dot{F} = \frac{dF}{dt} = \int \frac{\delta F}{\delta \omega} \cdot \frac{\partial \omega}{\partial t} dV$$

# Nambu bracket for vorticity equation

Fukumoto: Nagare **28** (2009) 499-500

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = \nabla \times (u \times \omega) \quad \longleftrightarrow$$

Vorticity equation

$$\dot{F} = \{F, H\}$$

$$\{F, H\} := \int \omega \cdot \left( \text{rot} \frac{\delta F}{\delta \omega} \times \text{rot} \frac{\delta H}{\delta \omega} \right) dV$$

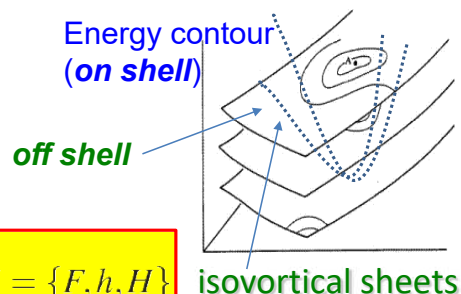
Helicity  $h[\omega] = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{D}} u \cdot \omega dV$

$$\delta h / \delta \omega = u$$

Vorticity equation

$$\dot{F} = - \int_{\mathcal{D}} \text{rot} \frac{\delta F}{\delta \omega} \cdot \left( \text{rot} \frac{\delta h}{\delta \omega} \times \text{rot} \frac{\delta H}{\delta \omega} \right) dV = \{F, h, H\}$$

G. K. Vallis, G. F. Carnevale and W. R. Young



# Magnetohydrodynamics (MHD) of a compressible adiabatic conducting fluid

*Baroclinic effect*

*Lorentz force*

## Equations of MHD

$$\begin{aligned}
 \frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{u} &= 0, \quad \left( \frac{D}{Dt} := \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \right) \\
 \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} &= -\nabla w + \boxed{T \nabla s} + \boxed{\frac{1}{\rho} \mathbf{j} \times \mathbf{B}} - \nabla \Phi, \\
 (w = e + p/\rho, \quad \mathbf{j} &= \nabla \times \mathbf{B}) \\
 \frac{Ds}{Dt} &= 0, \\
 \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} &= \nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B}), \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0.
 \end{aligned}$$

Conservation of helicity is destroyed by the baroclinic effect and the Lorentz force

$$\frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{u} \times \boldsymbol{\omega}) + \boxed{\nabla T \times \nabla s} + \boxed{\nabla \times \left( \frac{1}{\rho} \mathbf{j} \times \mathbf{B} \right)}$$

# Magnetohydrodynamics of a compressible adiabatic conducting fluid

Morrison & Greene, Phys. Rev. Lett. **45** (1980) 790, **48** (1982) 569

to the new variables  $(\rho, \sigma, \mathbf{B}, \mathbf{M})$  we obtain the Morrison and Greene (1982) non-canonical Poisson bracket:

$$\begin{aligned} \{F, G\} = - \int d^3x \left\{ \rho \left[ \frac{\delta F}{\delta \mathbf{M}} \cdot \nabla \left( \frac{\delta G}{\delta \rho} \right) - \frac{\delta G}{\delta \mathbf{M}} \cdot \nabla \left( \frac{\delta F}{\delta \rho} \right) \right] \right. \\ + \sigma \left[ \frac{\delta F}{\delta \mathbf{M}} \cdot \nabla \left( \frac{\delta G}{\delta \sigma} \right) - \frac{\delta G}{\delta \mathbf{M}} \cdot \nabla \left( \frac{\delta F}{\delta \sigma} \right) \right] \\ + \mathbf{M} \cdot \left[ \left( \frac{\delta F}{\delta \mathbf{M}} \cdot \nabla \right) \frac{\delta G}{\delta \mathbf{M}} - \left( \frac{\delta G}{\delta \mathbf{M}} \cdot \nabla \right) \frac{\delta F}{\delta \mathbf{M}} \right] \\ + \mathbf{B} \cdot \left[ \frac{\delta F}{\delta \mathbf{M}} \cdot \nabla \left( \frac{\delta G}{\delta \mathbf{B}} \right) - \frac{\delta G}{\delta \mathbf{M}} \cdot \nabla \left( \frac{\delta F}{\delta \mathbf{B}} \right) \right] \\ \left. + \mathbf{B} \cdot \left[ \left( \nabla \frac{\delta F}{\delta \mathbf{M}} \right) \cdot \frac{\delta G}{\delta \mathbf{B}} - \left( \nabla \frac{\delta G}{\delta \mathbf{M}} \right) \cdot \frac{\delta F}{\delta \mathbf{B}} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (3.10)$$

The bracket (3.10) has the Lie–Poisson form and satisfies the Jacobi identity for all functionals  $F$  and  $G$  of the physical variables, and in general applies both for  $\nabla \cdot \mathbf{B} \neq 0$  and  $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ .

Webb, Dasgupta, McKenzie, Hu & Zank: J. Math. Theor. **47** (2014) 095502

## A difficulty *The cross-helicity is not a Casimir (???)*

### The complete set of Casimir constants of the motion in magnetohydrodynamics

Eliezer Hameiri<sup>a)</sup>

E. Hameiri: Phys. Plasmas **11** (2004) 3423

$$\frac{\delta C}{\delta \mathbf{M}} \cdot \nabla s = 0$$

in the volume. P:

$$\text{div} \left( \rho \frac{\delta C}{\delta \mathbf{M}} \right) = 0,$$

$$\text{curl} \left( \frac{\delta C}{\delta \mathbf{M}} \times \mathbf{B} \right) = 0,$$

$$\begin{aligned} M_i \nabla \frac{\delta C}{\delta M_i} + \rho \frac{\delta C}{\delta \mathbf{M}} \cdot \nabla \left( \frac{1}{\rho} \mathbf{M} \right) + \mathbf{B} \times \text{curl} \left( \frac{\delta C}{\delta \mathbf{B}} \right) + \rho \nabla \frac{\delta C}{\delta \rho} \\ - \frac{\delta C}{\delta s} \nabla s = 0. \end{aligned} \quad (14)$$

advected  $\psi$  surface remains constant under any Hamiltonian  $K$  and not only under the energy Hamiltonian  $H$ .<sup>7</sup> Rather than checking that the difficult Eq. (14) is satisfied we give a direct proof. Note that for a volume advected by a flow  $\xi(\mathbf{x}, t)$ , the integral of any function  $F$  varies according to

$$\frac{d}{dt} \int_{\psi} F d^3x = \int_{\psi} [F_t + \text{div}(F\xi)] d^3x,$$

where the subscript  $\psi$  indicates the volume inside the moving  $\psi$  surface. Using Eqs. (8) and (24), we get

$$\frac{d}{dt} \int_{\psi} \mathbf{u} \cdot \mathbf{C} d^3x = \int_{\psi} \text{div}[\eta \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) / \rho - \lambda \mathbf{C}] d^3x. \quad (25)$$

## Nambu brackets in fluid mechanics and magnetohydrodynamics

J. Phys. A: Math. Theo. **43** (2010) 305501  
*incompressible*

Roberto Salazar<sup>1</sup> and Michael V Kurgansky<sup>2,3</sup>

<sup>1</sup> Center for Quantum Optics and Quantum Information, Department of Physics,  
University of Concepción, Casilla 160-C, Concepción, Chile

<sup>2</sup> Department of Geophysics, University of Concepción, Casilla 160-C, Concepción,  
Chile

<sup>3</sup> AM Obukhov Institute of Atmospheric Physics, Moscow, Russia

$$\frac{d\mathcal{F}[\mathbf{v}, \mathbf{A}]}{dt} = [\mathcal{F}, \mathcal{H}, \mathcal{G}]_{\mathbf{v}, \mathbf{v}, \mathbf{A}},$$

where  $\mathbf{A}$  is the vector potential ( $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ ),  
cross-helicity  $\mathcal{G}$  [8]:

$$\mathcal{H} = \int d^3x \left\{ \frac{\rho_0 \mathbf{v}^2}{2} + \frac{\mathbf{B}^2}{2\mu} \right\}$$

$$\mathcal{G} = \int d^3x \mathbf{v} \cdot \mathbf{B}.$$

$$[\mathcal{F}, \mathcal{H}, \mathcal{G}]_{\mathbf{v}, \mathbf{v}, \mathbf{A}} = \int d^3x \left\{ \frac{1}{\rho_0} \frac{\delta \mathcal{F}}{\delta \mathbf{v}} \cdot \left( \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \mathbf{v}} \times \frac{\delta \mathcal{G}}{\delta \mathbf{A}} \right) \right\} + \text{cyc}(\mathcal{F}, \mathcal{H}, \mathcal{G})$$

$$[\mathcal{F}, \mathcal{H}, \mathcal{K}]_{\mathbf{v}, \mathbf{v}, \mathbf{v}} = \int d^3x \left\{ \frac{1}{\rho_0} \frac{\delta \mathcal{F}}{\delta \mathbf{v}} \cdot \left( \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \mathbf{v}} \times \frac{\delta \mathcal{K}}{\delta \mathbf{v}} \right) \right\}$$

$$\frac{d\mathcal{F}[\mathbf{v}, \mathbf{A}]}{dt} = [\mathcal{F}, \mathcal{H}, \mathcal{K}]_{\mathbf{v}, \mathbf{v}, \mathbf{v}} + [\mathcal{F}, \mathcal{H}, \mathcal{L}]_{\mathbf{A}, \mathbf{v}, \mathbf{A}}.$$

We use as constitutive quantities the kinetic helicity  $\mathcal{K}$  and tl

$$\mathcal{K} = \frac{1}{2} \int d^3x \mathbf{v} \cdot \mathbf{w}$$

$$\mathcal{L} = \int d^3x \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}.$$

*cf.* Never & Sommner: Am. Met. Soc. **66** (2009) 2073-2084

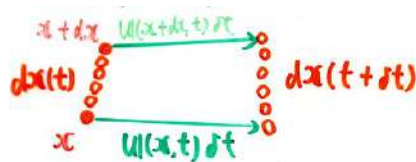
# Casimir = Topological invariant

# Helmholtz's law (1858)

## Vorticity equations

$$\frac{D}{Dt} \left( \frac{\omega}{\rho} \right) = \left( \frac{\omega}{\rho} \cdot \nabla \right) u$$

an infinitesimal material line element:  $d\mathbf{x}$



$$d\mathbf{x} = \frac{\partial \varphi}{\partial X_A} dX_A = \left( d\mathbf{X} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{X}} \right) \varphi(\mathbf{X}, t) \Rightarrow \frac{D}{Dt} d\mathbf{x}(t) = (d\mathbf{x}(t) \cdot \nabla) \mathbf{u}$$

$$\left( \partial / \partial |_{\mathbf{X}} = D / Dt \right)$$

## Topological invariants of an ideal barotropic fluid

3D *Helicity (=Hopf invariant, Casimir invariant)*

$$\mathcal{H}[\omega] = \int_{\mathcal{D}} \mathbf{v} \cdot \omega dV; \quad \omega := \nabla \times \mathbf{v} \quad \text{vorticity}$$

2D *Generalized enstrophy (=Casimir invariant)*

$$Q[\omega, \rho] = \int_{\mathcal{A}} f \left( \frac{\omega}{\rho} \right) \omega dA \quad \frac{D}{Dt} \left( \frac{\omega}{\rho} \right) = 0$$

where  $f$  is an arbitrary function, because

### Question:

Why the **helicity** of 3D looks different from 2D Casimirs?

How far is the 2D Casimir invariant from the **helicity**?

# Emmy Amalie Noether 1882-1935

## Oberwolfach Photo Collection

Total number of photos: 15118



### On the Photo:

[Noether, Emmy](#)

Location: Göttingen

Source: archives of P.  
Roquette, Heidelberg and  
Clark Kimberling, Evansville

Copyright: Universitäts-Archiv  
Göttingen

Photo ID: 9267

[Find related pictures](#)

[Correct Errors: If you  
have corrections or  
additional information on  
this photo, please send  
us a message using the  
following form](#)

## A unified View of Topological Invariants from **Noether's Theorem**

*cf.* Barotropic case: Y. Fukumoto: *Topologica* **1** (2008) 003

*How far is the Casimir invariant from the helicity?*

Particle relabeling symmetry

A. Yahalom: *J. Math. Phys.* **36** (1995) 1324

## 2D Casimir invariant is a cross helicity

$$\frac{D}{Dt} f \left( \frac{\omega}{\rho} \right) = 0$$

Defining  $\mathbf{F} = \nabla \times f \mathbf{e}_z$ , the vorticity equation reads

$$\frac{\partial}{\partial t} (f \mathbf{e}_z) - \mathbf{u} \times \mathbf{F} = 0,$$

$$\Rightarrow \frac{D}{Dt} \left( \frac{\mathbf{F}}{\rho} \right) = \left( \frac{\mathbf{F}}{\rho} \cdot \nabla \right) \mathbf{u}, \quad [\text{or } \omega_{\mathbf{F}}^2 = df \wedge dz]$$

$\mathbf{F}$  is a frozen-in field:  $\varphi_t^*(\omega_{\mathbf{F}}^2) = \omega_{\mathbf{F}}^2$ ,

cross helicity

$$\mathcal{H}_C[\omega, \mathbf{F}] = \int_{\mathcal{A}} \mathbf{v} \cdot \mathbf{F} \, dA \quad \omega = \nabla \times \mathbf{v}$$

$$\mathcal{H}_C = - \oint_{\partial \mathcal{A}} f \mathbf{v} \cdot d\mathbf{x} + \int_{\mathcal{A}} \omega f \left( \frac{\omega}{\rho} \right) dA \quad \underline{\mathcal{A} = R^2}$$

**Topological Invariants  
of magnetohydrodynamics  
from Noether's Theorem**

# A unified View of Topological Invariants of **magnetohydrodynamics** from **Noether's Theorem**

cf. Barotropic fluids: Y. Fukumoto: Topologica **1** (2008) 003

cf. Baroclinic fluids:

N. Padhye & P. J. Morrison: Phys. Lett. A **219** (1996) 287

N. Padhye & P. J. Morrison: Plasma Phys. Rep. **22** (1996) 960

Y. Fukumoto & H. Sakuma: Procedia IUTAM **7** (2013) 213

C. J. Cotter & D. D. Holm: Found Comput Math. **13** (2013) 457

**MHD:**

Webb, Dasgupta, McKenzie, Hu & Zank: J. Math. Theor. **47** (2014) 095501

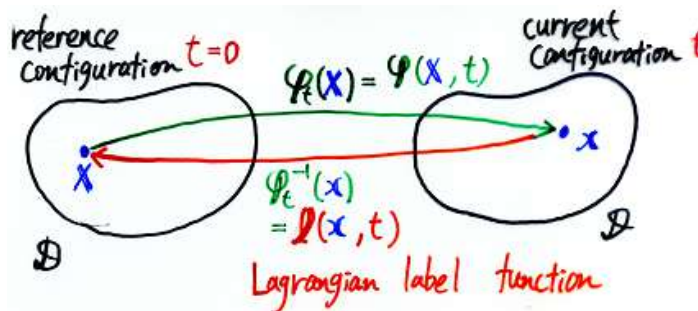
Webb, Dasgupta, McKenzie, Hu & Zank: J. Math. Theor. **47** (2014) 095502

**Relativistic fluids:**

Z. Yoshida, Y. Kawazura and T. Yokoyama: J. Math. Phys. **55** (2014) 043101

Y. Kawazura, Z. Yoshida & Y. Fukumoto: J. Phys. A: Math. Theor. **47** (2014) 465501

## Hamilton's principle for Euler-Poincaré equation for a non-homentropic flow



**Lagrangian label function**  $l(\varphi(X, t), t) = X; \quad 0 = \frac{\partial l_A}{\partial t} \Big|_X + \frac{\partial l_A}{\partial x_j} \frac{\partial \varphi_j}{\partial t},$

D. D. Holm

$$u_i = -(\hat{D}^{-1})_{iA} \frac{\partial l_A}{\partial t}; \quad (\hat{D})_{Ai} = \frac{\partial l_A(x, t)}{\partial x_i}$$

Define  $D := \det \hat{D}$ , then

$$\rho(x, t) = \rho(X, 0) D$$

## Variation of action: Baroclinic case

$$l_A \rightarrow l_A + \delta l_A \Longrightarrow \begin{cases} \delta u_i = -(\hat{D}^{-1})_{iA} \left( \frac{\partial}{\partial t} + u_j \frac{\partial}{\partial x_j} \right) \delta l_A, \\ \delta \rho = \frac{\partial}{\partial x_i} \left[ \rho (\hat{D}^{-1})_{iA} \delta l_A \right], \quad \delta s = (\hat{D}^{-1})_{jA} \frac{\partial s}{\partial x_j} \delta l_A \\ \delta \mathbf{B} = \nabla \times (\mathbf{B} \times \hat{D}^{-1} \delta \mathbf{l}). \end{cases}$$

$$\delta S = \int_{t_0}^{t_1} dt \int_{\mathcal{D}} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_i} \delta u_i + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \rho} \delta \rho + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial s} \delta s + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial B_i} \delta B_i \right), \quad \mathcal{L}[u, \rho, s, \mathbf{B}; \mathbf{x}] = \rho \left( \frac{u^2}{2} - e(\rho, s) - \frac{B^2}{2} - \Phi(\mathbf{x}) \right)$$

$$\begin{aligned} \delta S = & - \int_{t_0}^{t_1} dt \int_{\mathcal{D}} dV \left\{ \frac{\partial}{\partial t} \left[ \rho (\hat{D}^{-1})_{iA} \delta l_A \frac{1}{\rho} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_i} \right] + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \rho (\hat{D}^{-1})_{iA} \delta l_A \left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_i} u_j - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \rho} \delta_{ij} \right) \right] \right. \\ & \left. + \nabla \cdot \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{B}} \times (\mathbf{B} \times \hat{D}^{-1} \delta \mathbf{l}) \right) \right\} \\ & + \int_{t_0}^{t_1} dt \int_{\mathcal{D}} dV \left\{ \rho (\hat{D}^{-1})_{iA} \delta l_A \left[ \frac{D}{Dt} \left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_i} \right) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_k} \frac{\partial u_k}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial x_i} \right] \right. \\ & \left. + \frac{1}{\rho} \cdot \left( \left( \nabla \times \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{B}} \right) \times \mathbf{B} \right)_i \right\}. \end{aligned}$$

$$v_i := \frac{1}{\rho} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_i}, \quad \pi := \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \rho}, \quad T := -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial s}, \quad \mathbf{h} := -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{B}}, \quad \mathbf{j} = \nabla \times \mathbf{h}.$$

$$\frac{Dv_i}{Dt} + v_k \frac{\partial v_k}{\partial x_i} = \frac{\partial \pi}{\partial x_i} + T \frac{\partial s}{\partial x_i} + \frac{1}{\rho} (\mathbf{j} \times \mathbf{B})_i$$

Euler-Poincaré equations

## Hamilton's principle in material coordinates

Define  $V_A = \frac{\partial x_i}{\partial X_A} v_i$

$H_A = \frac{\partial x_i}{\partial X_A} h_i$

Rewrite the variation in terms of the Lagrangian variables  $\mathbf{X}$

$$\delta l = \delta l(\mathbf{X}, t)$$

$$\begin{aligned} \delta S = & \int_{t_0}^{t_1} dt \int_{\mathcal{D}} dV_X \left\{ -\frac{\partial}{\partial t} (V_A \rho_0 \delta l_A) + \frac{\partial}{\partial X_A} (\pi \rho_0 \delta l_A) + \nabla_X \cdot [(\mathbf{B}_0 \times \delta \mathbf{l}) \times \mathbf{H}] \right. \\ & \left. + \rho_0 \delta l_A \left( \frac{\partial V_A}{\partial t} - \frac{\partial \pi}{\partial X_A} - T \frac{\partial s}{\partial X_A} - \frac{1}{\rho_0} (\mathbf{J} \times \mathbf{B}_0)_A \right) \right\}. \end{aligned}$$

$$\mathbf{J} := \nabla_X \times \mathbf{H}, \quad \rho_0 := \rho(\mathbf{X}, 0), \quad \mathbf{B}_0 := \mathbf{B}(\mathbf{X}, 0)$$

for arbitrary variation  $\delta \mathbf{l}$  subject to B.C. and I.C.



**Euler-Poincaré equations** in terms of the material coordinates

$$\frac{\partial V_A}{\partial t} - \frac{\partial \pi}{\partial X_A} - T \frac{\partial s}{\partial X_A} - \frac{1}{\rho_0} (\mathbf{J} \times \mathbf{B}_0)_A = 0$$

# Particle relabeling symmetry

*Time-independent change of particle labels*  $X \rightarrow X' = \eta(X)$ ;

$$\rho(X, 0) dX \wedge dY \wedge dZ = \rho(X', 0) dX' \wedge dY' \wedge dZ' = \rho(x, t) dx \wedge dy \wedge dz$$

$$s(X, 0) = s(X', 0) = s(x, t).$$

$$\frac{1}{2} \epsilon_{ABC} B_C(X, 0) dX_A \wedge dX_B = \frac{1}{2} \epsilon_{ABC} B_C(X', 0) dX'_A \wedge dX'_B = \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} B_k dx_i \wedge dx_j$$

*Infinitesimal particle relabeling*

$$X \rightarrow X' = X + \delta l;$$

$$\frac{\partial}{\partial X} \cdot (\rho_0 \delta l) = 0, \quad (\delta l \cdot \nabla) s_0 = 0, \quad \frac{\partial}{\partial X} \times (B_0 \times \delta l) = 0$$

Under *particle relabeling*, the action is unchanged  $\delta S = 0$  :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (V_A \rho_0 \delta l_A) - \frac{\partial}{\partial X_A} (\pi \rho_0 \delta l_A) - \nabla_X \cdot [(B_0 \times \delta l) \times H] \\ - \rho_0 \delta l_A \left( \frac{\partial V_A}{\partial t} - \frac{\partial \pi}{\partial X_A} - T \frac{\partial s}{\partial X_A} - \frac{1}{\rho_0} (J \times B_0)_A \right) = 0 \end{aligned}$$

$$V_A = \frac{\partial x_i}{\partial X_A} v_i$$

Assume *Euler-Poincaré equations*, then

$$H_A = \frac{\partial x_i}{\partial X_A} h_i$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (V_A \rho_0 \delta l_A) - \frac{\partial}{\partial X_A} (\pi \rho_0 \delta l_A) - \nabla_X \cdot [(B_0 \times \delta l) \times H] = 0$$

Noether's charge

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{D}} V_A \rho_0 \delta l_A dV_X = 0$$

## Noether's theorem for particle relabeling symmetry

$$D_0 = \rho_0 \delta l; \quad \frac{\partial}{\partial X} \cdot D_0 = 0, \quad \left( D_0 \cdot \frac{\partial}{\partial X} \right) s_0 = 0, \quad \frac{\partial}{\partial X} \times (B_0 \times \frac{D_0}{\rho_0}) = 0$$

Noether's charge

$$\int_{\mathcal{D}} V_A D_{0A} d^3V = \int_{\mathcal{D}} v_i \frac{\partial x_i}{\partial X_A} D_{0A} \rho_0 dV = - \int_{\mathcal{D}} v \cdot D dV.$$

$$V_A = \frac{\partial x_i}{\partial X_A} v_i$$

$$D_i := - \frac{\partial x_i}{\partial X_A} D_{0A}$$

*Baroclinic case*

Utiyama  
(1959)

$$\varphi'_A(x') := \varphi(x) + \delta \varphi_A(x)$$

$$0 = \delta \varphi_A(x) := \bar{\delta} \varphi_A(x) + \varphi_{A,\mu} \delta x^\mu$$

$$h_c[v, C] = \int_{\mathcal{D}} v \cdot D dV; \quad (D = \nabla \times C)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} &= u \times \omega + \nabla(\pi - \Phi) + T \nabla s + \frac{1}{\rho} j \times B, \\ \frac{\partial D}{\partial t} &= \nabla \times (u \times D), \\ \nabla \cdot D &= 0, \quad (D \cdot \nabla) s = 0, \quad \nabla \times \left( \frac{B}{\rho} \times D \right) = 0 \end{aligned}$$

$$v = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u}, \quad \pi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \rho}, \quad T = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial s}, \quad h = - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial B}, \quad j = \nabla \times h$$

## Vector field (material line element) $D$ ?

$$\frac{\partial D}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{u} \times D),$$

$$\nabla \cdot D = 0, \quad (D \cdot \nabla)s = 0, \quad \nabla \times \left( \frac{B}{\rho} \times D \right) = 0.$$

C. J. Cotter & D. D. Holm: Found Comput Math. **13** (2013) 457

**Proposition 18** For the case that  $a_1 = \rho \, dV \in \Lambda^3$  and  $a_2 = B \cdot dS = d(A \cdot dx) \in \Lambda^2$ , the only simultaneous solution of  $\mathcal{L}_\eta \rho \, dV = 0$  and  $\mathcal{L}_\eta B \cdot dS = 0$  is

$$\eta \lrcorner \rho \, dV = B \cdot dS. \quad (29)$$

$D=B$  only?

$$Q := \frac{B \cdot \nabla s}{\rho}; \quad \frac{DQ}{Dt} = 0.$$

$$D = \nabla \times (f(Q, s) \nabla s) = \frac{\partial f}{\partial Q} \nabla Q \times \nabla s$$

$$\frac{\partial D}{\partial t} = \nabla \times \left[ \left( \frac{\partial f}{\partial Q} \frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial t} \right) \nabla s + f \nabla \frac{\partial s}{\partial t} \right] = \nabla \times (\mathbf{u} \times D)$$

## Nambu bracket for non-isentropic adiabatic MHD

# Nambu bracket for non-isentropic adiabatic MHD

Casimirs

$$\begin{aligned}\mathcal{M}[\rho] &= \int_{\mathcal{D}} \rho dV, \quad \mathcal{S}[\sigma] = \int_{\mathcal{D}} \rho s dV = \int_{\mathcal{D}} \sigma dV, \quad \sigma = \rho s \\ h_c[\mathbf{v}, \mathbf{C}] &= \int_{\mathcal{D}} \mathbf{v} \cdot \mathbf{D} dV, \quad h_m[\mathbf{A}] = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{D}} \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} dV \\ (\mathbf{D} &= \nabla \times \mathbf{C}), \quad (\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A})\end{aligned}$$

Nambu-bracket representation for Lie-Poisson equation

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} F[\mathbf{v}, \mathbf{A}, \mathbf{C}, \rho, \sigma] &= \{F, h_c, H\}_{vvC} + \{F, \mathcal{M}, H\}_{\rho} + \{F, \mathcal{S}, H\}_s + \{F, h_m, H\}_{vAA} \\ \{F, h_c, H\}_{vvC} &:= - \int_{\mathcal{D}} \frac{1}{\rho} \left\{ \frac{\delta F}{\delta \mathbf{v}} \cdot \left( \frac{\delta h_c}{\delta \mathbf{v}} \times \frac{\delta H}{\delta \mathbf{C}} \right) + \text{cyc}(F, h_c, H) \right\} dV \\ \{F, h_m, H\}_{vAA} &:= - \int_{\mathcal{D}} \frac{1}{\rho} \left\{ \frac{\delta F}{\delta \mathbf{v}} \cdot \left( \frac{\delta h_m}{\delta \mathbf{A}} \times \frac{\delta H}{\delta \mathbf{A}} \right) + \text{cyc}(F, h_m, H) \right\} dV \\ \{F, \mathcal{M}, H\}_{\rho} &:= - \int_{\mathcal{D}} \left\{ \frac{\delta \mathcal{M}}{\delta \rho} \frac{\delta F}{\delta \mathbf{v}} \cdot \nabla \frac{\delta H}{\delta \rho} + \frac{\delta F}{\delta \rho} \nabla \cdot \left( \frac{\delta \mathcal{M}}{\delta \rho} \frac{\delta H}{\delta \mathbf{v}} \right) + \text{cyc}(F, \mathcal{M}, H) \right\} dV \\ \{F, \mathcal{S}, H\}_s &:= - \int_{\mathcal{D}} \left\{ \frac{\delta F}{\delta \sigma} \nabla \cdot \left( \frac{\sigma}{\rho} \frac{\delta H}{\delta \mathbf{v}} \frac{\delta \mathcal{S}}{\delta \sigma} \right) - \frac{\delta H}{\delta \sigma} \nabla \cdot \left( \frac{\sigma}{\rho} \frac{\delta F}{\delta \mathbf{v}} \frac{\delta \mathcal{S}}{\delta \sigma} \right) + \text{cyc}(F, \mathcal{S}, H) \right\} dV\end{aligned}$$

## A difficulty associated with Lie-Poisson bracket

The complete set of Casimir constants of the motion in magnetohydrodynamics

Eliezer Hameiri<sup>a)</sup>

E. Hameiri: Phys. Plasmas **11** (2004) 3423

$$\frac{\delta C}{\delta \mathbf{M}} \cdot \nabla s = 0$$

in the volume. P:

$$\text{div} \left( \rho \frac{\delta C}{\delta \mathbf{M}} \right) = 0,$$

$$\text{curl} \left( \frac{\delta C}{\delta \mathbf{M}} \times \mathbf{B} \right) = 0,$$

$$\begin{aligned}M_i \nabla \frac{\delta C}{\delta M_i} + \rho \frac{\delta C}{\delta \mathbf{M}} \cdot \nabla \left( \frac{1}{\rho} \mathbf{M} \right) + \mathbf{B} \times \text{curl} \left( \frac{\delta C}{\delta \mathbf{B}} \right) + \rho \nabla \frac{\delta C}{\delta \rho} \\ - \frac{\delta C}{\delta s} \nabla s = 0.\end{aligned} \quad (14)$$

advected  $\psi$  surface remains constant under any Hamiltonian  $K$  and not only under the energy Hamiltonian  $H$ .<sup>7</sup> Rather than checking that the difficult Eq. (14) is satisfied we give a direct proof. Note that for a volume advected by a flow  $\xi(\mathbf{x}, t)$ , the integral of any function  $F$  varies according to

$$\frac{d}{dt} \int_{\psi} F d^3x = \int_{\psi} [F_t + \text{div}(F \xi)] d^3x,$$

where the subscript  $\psi$  indicates the volume inside the moving  $\psi$  surface. Using Eqs. (8) and (24), we get

$$\frac{d}{dt} \int_{\psi} \mathbf{u} \cdot \mathbf{C} d^3x = \int_{\psi} \text{div}[\boldsymbol{\eta} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) / \rho - \lambda \mathbf{C}] d^3x. \quad (25)$$

## Is the cross-helicity a Casimir invariant?

Yes!

### Proof that $h_c$ is a Casimir invariant

$$\{h_c, h_c, H\}_{vC} = - \int_{\mathcal{D}} \frac{1}{\rho} \frac{\delta H}{\delta \mathbf{v}} \cdot \left\{ \frac{\delta h_c}{\delta \mathbf{C}} \times \frac{\delta h_c}{\delta \mathbf{v}} + \frac{\delta h_c}{\delta \mathbf{v}} \times \frac{\delta h_c}{\delta \mathbf{C}} \right\} dV = 0 \quad \text{for any } H$$

$$\{h_c, \mathcal{M}, H\}_{\rho} = - \int_{\mathcal{D}} \left\{ \mathbf{D} \cdot \nabla \frac{\delta H}{\delta \rho} \right\} dV = 0 \quad \text{for any } H \quad \Longleftrightarrow \quad \nabla \cdot \mathbf{D} = 0$$

$$\{h_c, \mathcal{S}, H\}_s = - \int_{\mathcal{D}} \frac{\delta H}{\delta \sigma} \nabla \cdot \left( \frac{\sigma}{\rho} \mathbf{D} \right) dV = 0 \quad \text{for any } H \quad \Leftrightarrow \quad \nabla \cdot (s\mathbf{D}) = (\mathbf{D} \cdot \nabla)s = 0$$

$$\begin{aligned} \{h_c, h_m, H\}_{vAA} &= - \int_{\mathcal{D}} \frac{\delta H}{\delta \mathbf{B}} \cdot \left[ \nabla \times \left( \mathbf{D} \times \frac{\mathbf{B}}{\rho} \right) \right] dV = 0 \quad \text{for any } H \\ &\Longleftrightarrow \quad \nabla \times \left( \mathbf{D} \times \frac{\mathbf{B}}{\rho} \right) = 0 \end{aligned}$$

## Poisson bracket *induced from Nambu bracket*

$$\begin{aligned}
 \{F, H\} &= \{F, h_c, H\}_{vvC} + \{F, \mathcal{M}, H\}_\rho + \{F, \mathcal{S}, H\}_s + \{F, h_m, H\}_{vAA} \\
 &= - \int_{\mathcal{D}} \left\{ \left[ \frac{\delta F}{\delta \mathbf{C}} \cdot \left( \frac{\mathbf{D}}{\rho} \times \frac{\delta H}{\delta \mathbf{v}} \right) + \frac{\delta F}{\delta \mathbf{v}} \cdot \left( \frac{\boldsymbol{\omega}}{\rho} \times \frac{\delta H}{\delta \mathbf{v}} \right) \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \frac{\delta F}{\delta \rho} \nabla \cdot \left( \frac{\delta H}{\delta \mathbf{v}} \right) + \frac{\delta F}{\delta \mathbf{v}} \cdot \nabla \frac{\delta H}{\delta \rho} + \frac{\delta F}{\delta \sigma} \nabla \cdot \left( \frac{\sigma}{\rho} \frac{\delta H}{\delta \mathbf{v}} \right) - \frac{\delta H}{\delta \sigma} \nabla \cdot \left( \frac{\sigma}{\rho} \frac{\delta F}{\delta \mathbf{v}} \right) \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \frac{\delta F}{\delta \mathbf{v}} \cdot \left( \frac{\mathbf{B}}{\rho} \times \frac{\delta H}{\delta \mathbf{A}} \right) + \frac{\delta F}{\delta \mathbf{A}} \cdot \left( \frac{\mathbf{B}}{\rho} \times \frac{\delta H}{\delta \mathbf{v}} \right) \right\} dV.
 \end{aligned}$$

$$\mathbf{M} = \rho \mathbf{v}, \quad \boldsymbol{\sigma} = \rho \mathbf{s}, \quad \mathbf{D} = \nabla \times \mathbf{C}$$

$$\begin{aligned}
 \{F, H\} &= - \int_{\mathcal{D}} \left\{ \frac{\delta H}{\delta \mathbf{M}} \cdot (\mathbf{D} \cdot \nabla) \frac{\delta F}{\delta \mathbf{D}} - \mathbf{D} \cdot \left( \frac{\delta H}{\delta \mathbf{M}} \cdot \nabla \right) \frac{\delta F}{\delta \mathbf{D}} \right. \\
 &\quad \left. + \mathbf{M} \cdot \left[ \left( \frac{\delta F}{\delta \mathbf{M}} \cdot \nabla \right) \frac{\delta H}{\delta \mathbf{M}} - \left( \frac{\delta H}{\delta \mathbf{M}} \cdot \nabla \right) \frac{\delta F}{\delta \mathbf{M}} \right] \right. \\
 &\quad \left. + \rho \left[ \left( \frac{\delta F}{\delta \mathbf{M}} \cdot \nabla \right) \frac{\delta H}{\delta \rho} - \left( \frac{\delta H}{\delta \mathbf{M}} \cdot \nabla \right) \frac{\delta F}{\delta \rho} \right] \right. \\
 &\quad \left. + \sigma \left[ \left( \frac{\delta F}{\delta \mathbf{M}} \cdot \nabla \right) \frac{\delta H}{\delta \sigma} - \left( \frac{\delta H}{\delta \mathbf{M}} \cdot \nabla \right) \frac{\delta F}{\delta \sigma} \right] \right. \\
 &\quad \left. + \mathbf{B} \cdot \left[ \left( \frac{\delta F}{\delta \mathbf{M}} \cdot \nabla \right) \frac{\delta H}{\delta \mathbf{B}} - \left( \frac{\delta H}{\delta \mathbf{M}} \cdot \nabla \right) \frac{\delta F}{\delta \mathbf{B}} \right] \right. \\
 &\quad \left. + \frac{\delta H}{\delta \mathbf{M}} \cdot (\mathbf{B} \cdot \nabla) \frac{\delta F}{\delta \mathbf{B}} - \frac{\delta F}{\delta \mathbf{M}} \cdot (\mathbf{B} \cdot \nabla) \frac{\delta H}{\delta \mathbf{B}} \right\} dV.
 \end{aligned}$$

## Iso-magnetovortical perturbations

$$\frac{d}{d\tau} F[\mathbf{v}, \mathbf{A}, \mathbf{C}, \rho, \sigma] = \{F, h_c, G\}_{vvC} + \{F, \mathcal{M}, G\}_\rho + \{F, \mathcal{S}, G\}_s + \{F, h_m, G\}_{vAA}$$

where

$$\begin{aligned}
 \{F, h_c, G\}_{vvC} &:= - \int_{\mathcal{D}} \frac{1}{\rho} \left\{ \frac{\delta F}{\delta \mathbf{v}} \cdot \left( \frac{\delta h_c}{\delta \mathbf{v}} \times \frac{\delta G}{\delta \mathbf{C}} \right) + \text{cyc}(F, h_c, G) \right\} dV \\
 \{F, h_m, G\}_{vAA} &:= - \int_{\mathcal{D}} \frac{1}{\rho} \left\{ \frac{\delta F}{\delta \mathbf{v}} \cdot \left( \frac{\delta h_m}{\delta \mathbf{A}} \times \frac{\delta G}{\delta \mathbf{A}} \right) + \text{cyc}(F, h_m, G) \right\} dV \\
 \{F, \mathcal{M}, G\}_\rho &:= - \int_{\mathcal{D}} \left\{ \frac{\delta \mathcal{M}}{\delta \rho} \frac{\delta F}{\delta \mathbf{v}} \cdot \nabla \frac{\delta G}{\delta \rho} + \frac{\delta F}{\delta \rho} \nabla \cdot \left( \frac{\delta \mathcal{M}}{\delta \rho} \frac{\delta G}{\delta \mathbf{v}} \right) + \text{cyc}(F, \mathcal{M}, G) \right\} dV \\
 \{F, \mathcal{S}, G\}_s &:= - \int_{\mathcal{D}} \left\{ \frac{\delta F}{\delta \sigma} \nabla \cdot \left( \frac{\sigma}{\rho} \frac{\delta G}{\delta \mathbf{v}} \frac{\delta \mathcal{S}}{\delta \sigma} \right) - \frac{\delta G}{\delta \sigma} \nabla \cdot \left( \frac{\sigma}{\rho} \frac{\delta G}{\delta \mathbf{v}} \frac{\delta \mathcal{S}}{\delta \sigma} \right) + \text{cyc}(F, \mathcal{S}, G) \right\} dV
 \end{aligned}$$

Suppose that  $G$  is an arbitrary functional of  $\mathbf{v}, \mathbf{A}, \mathbf{C}, \rho$  and  $\sigma$ .

$$\mathbf{u} := \frac{1}{\rho} \frac{\delta G}{\delta \mathbf{v}}, \quad \boldsymbol{\eta} := \frac{\delta G}{\delta \mathbf{A}}, \quad \lambda := \frac{\delta G}{\delta \rho}, \quad T := \frac{\delta G}{\delta \sigma}, \quad \text{arbitrary vector fields and functions}$$

Euler-Poincaré equations for MHD = iso-magnetovortical perturbations

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \tau} &= \mathbf{u} \times \boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\eta} \times \frac{\mathbf{B}}{\rho} - \nabla(\lambda - Ts) + T \nabla s; \quad \boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{v}, \\
 \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \tau} &= \mathbf{u} \times \mathbf{B}, \quad \frac{\partial \rho}{\partial \tau} = -\nabla \cdot (\rho \mathbf{u}), \quad \frac{\partial(\rho s)}{\partial \tau} = -\nabla \cdot (\rho s \mathbf{u}).
 \end{aligned}$$

## Arnold's theorem for MHD

Total energy

$$E = \int_{\mathcal{D}} \left\{ \frac{1}{2} \rho \mathbf{v}^2 + \rho e(\rho, s) + \frac{1}{2} \mathbf{B}^2 \right\} dV$$

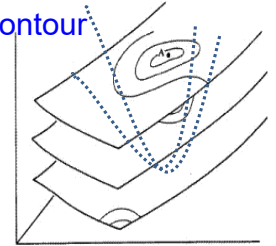
$$\begin{aligned} \frac{dE}{d\tau} &= \int_{\mathcal{D}} \left\{ \rho \mathbf{v} \cdot \frac{d\mathbf{v}}{d\tau} + \frac{1}{2} \frac{d\rho}{d\tau} \mathbf{v}^2 + \frac{d\rho}{d\tau} e + \rho \left( \frac{\partial e}{\partial \rho} \frac{d\rho}{d\tau} + \frac{\partial e}{\partial s} \frac{ds}{d\tau} \right) + \mathbf{B} \cdot \frac{d\mathbf{B}}{d\tau} \right\} dV \\ &= 0 \quad \text{for a steady flow} \end{aligned}$$

G. K. Vallis, G. F. Carnevale and W. R. Young

Steady flow

Energy contour

$$\begin{aligned} \rho(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} &= -\rho(\nabla h - T \nabla s) + \mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{B}) \\ \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) &= \mathbf{0}, \quad \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0, \quad \mathbf{v} \cdot \nabla s = 0. \end{aligned}$$



isovortical sheets

## Remark on Noether's 2nd Theorem

# Variational symmetry

$$S[l] = \int dt \int_{\mathcal{D}} d^3x \mathcal{L}(\mathbf{u}, \rho, s, \mathbf{B}, \mathbf{x}) = \int dt \int_{\mathcal{D}} d^3x \mathcal{L}(l^\alpha, \partial_l l^\alpha, \mathbf{x}).$$

$$\mathcal{L} = \rho \left[ \frac{1}{2} \mathbf{u}^2 - e(\rho, s) - \Phi(\mathbf{x}) \right] - \frac{B^2}{2\mu}.$$

variation of the Eulerian coordinates and the label function  $\hat{\mathbf{x}} := \mathbf{x} + \delta \mathbf{x}$  and  $\hat{l}^\alpha := l^\alpha + \delta l^\alpha$ .  
the particle relabeling symmetry requires simply that

$$\delta \mathbf{x} \equiv \mathbf{0},$$

Variational  
symmetry

$$\begin{aligned} S[\hat{l}] &= \hat{S}[\hat{l}] = S[l]; \quad S[l] := \int dt \int_{\mathcal{D}} d^3x \mathcal{L}(l^\alpha, \partial_l l^\alpha, \mathbf{x}), \\ S[\hat{l}] &:= \int dt \int_{\mathcal{D}} d^3\hat{x} \mathcal{L}(\hat{l}^\alpha, \partial_{\hat{l}} \hat{l}^\alpha, \hat{\mathbf{x}}), \quad \hat{S}[\hat{l}] := \int dt \int_{\mathcal{D}} d^3\hat{x} \hat{\mathcal{L}}(\hat{l}^\alpha, \partial_{\hat{l}} \hat{l}^\alpha, \hat{\mathbf{x}}) \end{aligned}$$

Identity!

$$\mathcal{L}(\hat{l}^\alpha, \partial_{\hat{l}} \hat{l}^\alpha, \hat{\mathbf{x}}) - \mathcal{L}(l^\alpha, \partial_l l^\alpha, \mathbf{x}) + (\nabla \cdot \delta \mathbf{x}) \mathcal{L} + \nabla \cdot \delta \mathbf{\Lambda} = 0.$$



Noether's 2nd  
theorem



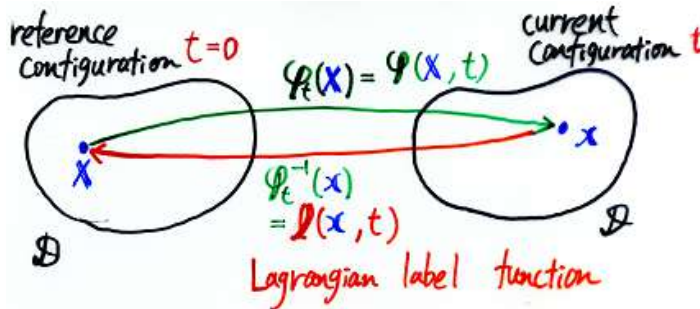
$$\partial_k \delta J^k + S_\alpha \delta q^\alpha = 0 \quad (k = 0, 1, 2, 3; \alpha = 1, 2, 3; x_0 = t)$$

$$\delta J^k = \mathcal{L} \delta x^k + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_k l^\alpha)} \delta l^\alpha + \delta \Lambda^k S_\alpha := \frac{\delta S}{\delta l^\alpha} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial l^\alpha} - \partial_j \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_j q^\alpha)}$$

$$S_\alpha = 0 : \text{ Euler equation}$$

$$\partial_k \delta J^k = 0 \implies \text{Noether's 1st theorem}$$

## Hamilton's principle for Euler-Poincaré equation for a non-homentropic flow



Lagrangian label function  $\mathbf{l}(\varphi(\mathbf{X}, t), t) = \mathbf{X}; \quad 0 = \frac{\partial l_A}{\partial t} \Big|_{\mathbf{X}} + \frac{\partial l_A}{\partial x_j} \frac{\partial \varphi_j}{\partial t},$

D. D. Holm

$$u_i = -(\hat{D}^{-1})_{iA} \frac{\partial l_A}{\partial t}; \quad (\hat{D})_{Ai} = \frac{\partial l_A(\mathbf{x}, t)}{\partial x_i}$$

Define  $D := \det \hat{D}$ , then

$$\rho(\mathbf{x}, t) = \rho(\mathbf{X}, 0) D$$

# Particle relabeling symmetry

$$S[l] = \int dt \int_{\mathcal{D}} d^3x \mathcal{L}(\mathbf{u}, \rho, s, \mathbf{B}, \mathbf{x}) = \int dt \int_{\mathcal{D}} d^3x \mathcal{L}(l^\alpha, \partial_i l^\alpha, \mathbf{x}).$$

$$\mathcal{L} = \rho \left[ \frac{1}{2} \mathbf{u}^2 - e(\rho, s) - \Phi(\mathbf{x}) \right] - \frac{\mathbf{B}^2}{2\mu}.$$

variation of the Eulerian coordinates and the label function  $\hat{\mathbf{x}} := \mathbf{x} + \delta \mathbf{x}$  and  $\tilde{l}^\alpha := l^\alpha + \delta l^\alpha$ .  
the particle relabeling symmetry requires simply that

$$\delta \mathbf{x} \equiv \mathbf{0},$$

Particle  
relabeling  
symmetry

$$\delta S = \int_R d^3x \int dt \delta \mathcal{L},$$

$$\delta \mathcal{L} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \rho} \delta \rho + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{u}} \cdot \delta \mathbf{u} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{B}} \cdot \delta \mathbf{B} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial S} \delta S$$

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{B} = 0 \quad \delta u_i = 0 &\implies \delta S = 0 \\ \delta \rho = 0, \quad \delta s = 0 &\implies \end{aligned}$$

Noether's **1st** and **2nd** theorems  
for nonisentropic adiabatic  
motion of a **neutral** fluid

# Generalized Bianchi identity for a nonisentropic neutral fluid

$$\rho(\mathbf{X}', 0) dX' \wedge dY' \wedge dZ' = \rho(\mathbf{X}, 0) dX \wedge dY \wedge dZ = \rho(\mathbf{x}, t) dx \wedge dy \wedge dz$$

$$s(\mathbf{X}', 0) = s(\mathbf{X}, 0) = s(\mathbf{x}, t)$$

Generator for particle relabeling

$$\delta\rho = 0, \quad \delta s = 0 \implies \frac{\partial}{\partial \mathbf{X}} \cdot (\rho_0 \delta \mathbf{l}) = 0, \quad (\delta \mathbf{l} \cdot \nabla) s_0 = 0$$

$$\delta u_i = 0 \implies \frac{\partial}{\partial \tau} \delta \mathbf{l} = \mathbf{0} \quad \left( \frac{\partial}{\partial \tau} = \frac{D}{Dt} \right)$$

$$\delta \mathbf{l} = \frac{\nabla s_0 \times \nabla \epsilon_0}{\rho_0}; \quad \nabla := \frac{\partial}{\partial \mathbf{X}}$$

$$\epsilon_0 = \epsilon_0(\mathbf{X}) : \text{arbitrary function of } \mathbf{X}; \quad \frac{\partial \epsilon_0}{\partial \tau} = 0$$

Variational symmetry

$$\varepsilon_0 \left\{ \frac{\partial}{\partial \tau} [(\nabla \times \mathbf{V}) \cdot \nabla s_0] + \nabla \left( \frac{S_i}{\rho_0} \right) \cdot (\nabla q^i \times \nabla s_0) \right\}$$

$$- \nabla \cdot \left\{ \varepsilon_0 \left( \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial \tau} \times \nabla s_0 - \nabla \pi \times \nabla s_0 + \frac{S_i}{\rho_0} \nabla q^i \times \nabla s_0 \right) \right\} = 0; \quad \pi := \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \rho}$$

$$S_i := - \left( \frac{\partial V_i}{\partial t} - \frac{\partial \pi}{\partial X_i} - T \frac{\partial s}{\partial X_i} \right)$$

# Generalized Bianchi identity for a nonisentropic neutral fluid

$$\rho(\mathbf{X}', 0) dX' \wedge dY' \wedge dZ' = \rho(\mathbf{X}, 0) dX \wedge dY \wedge dZ = \rho(\mathbf{x}, t) dx \wedge dy \wedge dz$$

$$s(\mathbf{X}', 0) = s(\mathbf{X}, 0) = s(\mathbf{x}, t)$$

Generator for particle relabeling

$$\delta\rho = 0, \quad \delta s = 0 \implies \frac{\partial}{\partial \mathbf{X}} \cdot (\rho_0 \delta \mathbf{l}) = 0, \quad (\delta \mathbf{l} \cdot \nabla) s_0 = 0$$

$$\delta u_i = 0 \implies \frac{\partial}{\partial \tau} \delta \mathbf{l} = \mathbf{0} \quad \left( \frac{\partial}{\partial \tau} = \frac{D}{Dt} \right)$$

$$\delta \mathbf{l} = \frac{\nabla s_0 \times \nabla \epsilon_0}{\rho_0}; \quad \nabla := \frac{\partial}{\partial \mathbf{X}}$$

$$\epsilon_0 = \epsilon_0(\mathbf{X}) : \text{arbitrary function of } \mathbf{X}; \quad \frac{\partial \epsilon_0}{\partial \tau} = 0$$

Variational symmetry

$$\varepsilon_0 \left\{ \frac{\partial}{\partial \tau} [(\nabla \times \mathbf{V}) \cdot \nabla s_0] + \nabla \left( \frac{S_i}{\rho_0} \right) \cdot (\nabla q^i \times \nabla s_0) \right\}$$

$$- \nabla \cdot \left\{ \varepsilon_0 \left( \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial \tau} \times \nabla s_0 - \nabla \pi \times \nabla s_0 + \frac{S_i}{\rho_0} \nabla q^i \times \nabla s_0 \right) \right\} = 0; \quad \pi := \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \rho}$$

$$S_i := - \left( \frac{\partial V_i}{\partial t} - \frac{\partial \pi}{\partial X_i} - T \frac{\partial s}{\partial X_i} \right)$$

### Variational symmetry

$$\varepsilon_0 \left\{ \frac{\partial}{\partial \tau} [(\nabla \times \mathbf{V}) \cdot \nabla s_0] + \nabla \left( \frac{S_i}{\rho_0} \right) \cdot (\nabla q^i \times \nabla s_0) \right\} \\ - \nabla \cdot \left\{ \varepsilon_0 \left( \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial \tau} \times \nabla s_0 - \nabla \pi \times \nabla s_0 + \frac{S_i}{\rho_0} \nabla q^i \times \nabla s_0 \right) \right\} = 0; \quad \pi := \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \rho} \\ \text{for arbitrary } \epsilon_0$$

### Generalized Bianchi identity

$$\frac{\partial}{\partial \tau} [\nabla s_0 \cdot (\nabla \times \mathbf{V})] - \nabla s_0 \cdot \left( \nabla \times \frac{\mathbf{S}}{\rho} \right) = 0; \quad V_\alpha := v_k \frac{\partial x_k}{\partial X_\alpha} \quad \mathbf{x} = \mathbf{q}(\mathbf{X}, t)$$

Padhye & Morrison (1996)

### Ertel's potential vorticity

$$\text{Euler equation} \quad \mathbf{S} = \mathbf{0} \quad \Longrightarrow \quad Q := \frac{1}{\rho} (\nabla \times \mathbf{u}) \cdot \nabla s; \quad \frac{DQ}{Dt} = 0$$

Another identity is admitted:

$$\Longrightarrow \quad \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} - \nabla \pi + \frac{S_i}{\rho_0} \nabla q^i = T \nabla s_0. \quad \text{for some function } T = T(\mathbf{X}, t)$$

Euler equation  $\mathbf{S} = \mathbf{0} \quad \Longrightarrow \quad \text{Euler-Poincaré equation}$

## Generalized Bianchi identity for MHD

*Time-independent change of particle labels*  $\mathbf{X} \rightarrow \mathbf{X}' = \boldsymbol{\eta}(\mathbf{X});$

$$\rho(\mathbf{X}, 0) d\mathbf{X} \wedge d\mathbf{Y} \wedge d\mathbf{Z} = \rho(\mathbf{X}', 0) d\mathbf{X}' \wedge d\mathbf{Y}' \wedge d\mathbf{Z}' = \rho(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} \wedge d\mathbf{y} \wedge d\mathbf{z} \\ \frac{1}{2} \epsilon_{ABC} B_C(\mathbf{X}, 0) dX_A \wedge dX_B = \frac{1}{2} \epsilon_{ABC} B_C(\mathbf{X}', 0) dX'_A \wedge dX'_B = \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} B_k d\mathbf{x}_i \wedge d\mathbf{x}_j$$

Generator for particle relabeling

$$\mathbf{X} \rightarrow \mathbf{X}' = \mathbf{X} + \delta \mathbf{l};$$

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{X}} \cdot (\rho_0 \delta \mathbf{l}) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial \mathbf{X}} \times (\mathbf{B}_0 \times \delta \mathbf{l}) = \mathbf{0}$$

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \delta \mathbf{l} = \mathbf{0} \quad \left( \frac{\partial}{\partial \tau} = \frac{D}{Dt} \right), \quad (\delta \mathbf{l} \cdot \nabla) s_0 = 0$$

$$\delta \mathbf{l} = \frac{\psi(\mathbf{X}) \mathbf{B}_0}{\rho_0}; \quad (\mathbf{B}_0 \cdot \nabla) \psi = 0, \quad (\mathbf{B}_0 \cdot \nabla) s_0 = 0$$

$\psi$  : arbitrary function

### Generalized Bianchi identity

$$\frac{\partial}{\partial \tau} (\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{V}) - \mathbf{B}_0 \cdot \nabla \pi - \frac{1}{\rho_0} \mathbf{S} \cdot \mathbf{B}_0 = 0$$

# Noether's second theorem for MHD

$$\rho_0 \delta \mathbf{l} = \mathbf{D}_0, \quad \frac{\mathbf{D}}{\rho} = - \left( \frac{\mathbf{D}_0}{\rho_0} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{X}} \right) \varphi(\mathbf{X}, t)$$

Particle-relabelling symmetry in Eulerian representation

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{u} = \mathbf{0} &\iff \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{D}), \\ \delta \rho = -\nabla \cdot \mathbf{D} = 0, \quad \delta s = -(\mathbf{D} \cdot \nabla) s = 0, \quad \delta \mathbf{B} = \nabla \times \left( \mathbf{D} \times \frac{\mathbf{B}}{\rho} \right) = 0 \end{aligned}$$

$$\mathbf{D} = \nabla \times \mathbf{C}; \quad \text{at least } \mathbf{C} = f(Q) \nabla s$$

Variational symmetry

$$\delta S = \int dt \int_{\mathcal{D}} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_i} \delta u_i + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \rho} \delta \rho + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial S} \delta S + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial B_i} \delta B_i \right) dV = 0$$

$$\begin{aligned} \delta S = \int dt \int_{\mathcal{D}} dV \left\{ \mathbf{C} \cdot \left[ \frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} - \nabla \times (\mathbf{u} \times \boldsymbol{\omega}) - \nabla T \times \nabla s - \nabla \times \left( \frac{\mathbf{j}}{\rho} \times \mathbf{B} \right) + \nabla \times \left( \frac{\mathbf{E}(\mathcal{L})}{\rho} \right) \right] \right. \\ \left. + \nabla \cdot \mathbf{W} \right\} = 0 \\ \frac{\mathbf{E}(\mathcal{L})}{\rho} := \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} - \mathbf{u} \times \boldsymbol{\omega} - \nabla \left( \frac{\mathbf{u}^2}{2} + w + \phi \right) - T \nabla s - \frac{1}{\rho} \mathbf{j} \times \mathbf{B} \end{aligned}$$

# Generalized Bianchi identity for MHD

*Time-independent change of particle labels*  $\mathbf{X} \rightarrow \mathbf{X}' = \boldsymbol{\eta}(\mathbf{X});$

$$\begin{aligned} \rho(\mathbf{X}, 0) d\mathbf{X} \wedge d\mathbf{Y} \wedge d\mathbf{Z} &= \rho(\mathbf{X}', 0) d\mathbf{X}' \wedge d\mathbf{Y}' \wedge d\mathbf{Z}' = \rho(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} \wedge d\mathbf{y} \wedge d\mathbf{z} \\ \frac{1}{2} \epsilon_{ABC} B_C(\mathbf{X}, 0) dX_A \wedge dX_B &= \frac{1}{2} \epsilon_{ABC} B_C(\mathbf{X}', 0) dX'_A \wedge dX'_B = \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} B_k d\mathbf{x}_i \wedge d\mathbf{x}_j \end{aligned}$$

Generator for particle relabeling

$$\mathbf{X} \rightarrow \mathbf{X}' = \mathbf{X} + \delta \mathbf{l};$$

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{X}} \cdot (\rho_0 \delta \mathbf{l}) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial \mathbf{X}} \times (\mathbf{B}_0 \times \delta \mathbf{l}) = \mathbf{0}$$

$$\delta u_i = 0 \implies \frac{\partial}{\partial \tau} \delta \mathbf{l} = \mathbf{0} \quad \left( \frac{\partial}{\partial \tau} = \frac{D}{Dt} \right) \quad (\delta \mathbf{l} \cdot \nabla) s_0 = 0$$

$$\delta \mathbf{l} = \frac{\psi(\mathbf{X}) \mathbf{B}_0}{\rho_0}; \quad (\mathbf{B}_0 \cdot \nabla) \psi = 0, \quad (\mathbf{B}_0 \cdot \nabla) s_0 = 0$$

$\psi$  : arbitraly function

Generalized Bianchi identity

$$\frac{\partial}{\partial \tau} (\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{V}) - \mathbf{B}_0 \cdot \nabla \pi - \frac{1}{\rho_0} \mathbf{S} \cdot \mathbf{B}_0 = 0$$

# Summary

A unified view of topological invariants for a non-isentropic MHD from Noether's theorem

## Casimirs

$$\begin{aligned}\mathcal{M}[\rho] &= \int_{\mathcal{D}} \rho dV, & S[\sigma] &= \int_{\mathcal{D}} \rho s dV = \int_{\mathcal{D}} \sigma dV, \\ h_c[\mathbf{v}, \mathbf{C}] &= \int_{\mathcal{D}} \mathbf{v} \cdot \mathbf{D} dV, & h_m[\mathbf{A}] &= \frac{1}{2} \int_{\mathcal{D}} \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} dV \\ &(\mathbf{D} = \nabla \times \mathbf{C}), & (\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} &= \mathbf{u} \times \boldsymbol{\omega} + \nabla(\pi - \Phi) + T \nabla s + \frac{1}{\rho} \mathbf{j} \times \mathbf{B}, \\ \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} &= \nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{D}), \\ \nabla \cdot \mathbf{D} &= 0, \quad (\mathbf{D} \cdot \nabla) s = 0, \quad \nabla \times \left( \frac{\mathbf{B}}{\rho} \times \mathbf{D} \right) = 0\end{aligned}$$

## Nambu-bracket representation for Lie-Poisson equation

$$\frac{d}{dt} F[\mathbf{v}, \mathbf{A}, \mathbf{C}, \rho, \sigma] = \{F, h_c, H\}_{vvC} + \{F, \mathcal{M}, H\}_{\rho} + \{F, \mathcal{S}, H\}_s + \{F, h_m, H\}_{vAA}$$

➡ Extension of Lie-Poisson bracket that makes all the 4 integrals *Casimirs*

Nambu-bracket representations of *isovortical perturbations*  
*wave energy, mean flow*

*Structure-preserving numerical method*     *Y. Suzuki*  
*Noether's second theorem*

ドレスト・フォトン の 対称性  $\hookrightarrow$

グラスマン多様体

落合 啓之 (九大, IMI)

OCHIAI HIROYUKI

2022, Feb. 24

### 自己紹介

専門: 代数解析

表現論

特殊関数

ゼータ関数

$\vdots$

(数字の列を調べるために  
母関数を用いる。)

$\downarrow$

規則性 の 発見・記述

## なれどめ

2017夏：福本先生から小嶋先生を紹介される。

2017.8.31：京大数理研で小嶋先生から話を聞く。

- 。セロから、いろいろ説明していただいた。

- 。未解明・将来的課題として熱心に説明されたことについて  
対称性

- 。登場したもの

{ 対称空間, 対称領域, 例外型を含む Jordan 代数  
 グラスマン多様体 (佐藤 GM を念頭に),  
 作用環, 双対性

⋮

## 京大IMIの共同利用研究集会

2018.3.7-8

2019.2.18-19

2020.2.13-14

2022.2.22, 24

[5000, 2020] Off-shell Quantum Fields to Connect Pressed Photons with Cosmology

テンソル計算から対称性まで。

このあたりの記事などに慣れた。

**設定** (佐久間・小島・大津)

$U^\mu$ : 電磁場

流体力学的対応物

速度

$$S_{\mu\nu} = \nabla_\nu U_\mu - \nabla_\mu U_\nu$$

渦度

仮定:  $U^\nu \nabla_\nu U_\mu = 0$  (零測地条件)

**Clebsch 1ポット- $\varphi$**  ( $\lambda, \varphi$ )

$$U_\mu = \lambda \nabla_\mu \varphi$$

s.t.

$$\nabla^\nu \nabla_\nu \varphi = 0$$

$$\nabla^\nu \nabla_\nu \lambda = (K_0)^2 \lambda$$

**記号**

$$C_\mu = \nabla_\mu \varphi$$

$$L_\mu = \nabla_\mu \lambda$$

$$S_{\mu\nu} = C_\mu L_\nu - L_\mu C_\nu$$

**束縛条件**

$$C^\nu L_\nu = 0$$

$$\hat{T}_\mu^\nu = -S_{\mu\sigma} S^{\nu\sigma} \quad ; \quad \text{エネルギー・モーメントテンソル}$$

**主張**

**定理**

(SOO)

$$\nabla_\nu \hat{T}_\mu^\nu = 0$$

$$\hat{T}_\mu^\nu = \rho C_\mu C^\nu$$

$$\text{ここで } \rho = -L^\nu L_\nu$$

証明は既に SOO で行われている。

この主張を裏付けるためにはなぜ存在しているのか？

→ 答      グラスマン多様体

## 自己紹介 フラグ

- ・ 0 をかけたら 0 になるのはあたり前。
- ・ いくつかの数を足して 0 になる  
⇒ 何か理由があるはず。

- ・ 数字 (整数でも, 小数でも, 関数でもよい) の集まりや列  
⇒ そこに規則性が隠れているかな?

☆ 現象 から 何かを探る手段の一つ ← 代数解析

vs  $\left( \begin{array}{l} \text{式} \\ \text{イメージ} \end{array} \right.$

## 対応性 の役割

保存量 (不変量) の発見・証明

求解 [変数分離]

解の表示, 評価, 漸近挙動 ... (特殊関数)

他システムとの対応

⋮

対称性  $\rightarrow$  不変量

⑪  $\mathbb{R}^3$  のベクトル  $\mathbf{x}_i$   $r$  本与えられている。

$\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_r$

3次元回転で不変な量:

ベクトルの長さや内積:  $\langle \mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j \rangle$

これらを並べて作った行列: Gram 行列

$$\begin{pmatrix} \langle \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_1 \rangle & \dots & \langle \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_r \rangle \\ \vdots & & \vdots \\ \langle \mathbf{x}_r, \mathbf{x}_1 \rangle & \dots & \langle \mathbf{x}_r, \mathbf{x}_r \rangle \end{pmatrix} : r \times r \text{ 対称行列}$$

古典的不変式論の第一基本定理。  
 回転不変式は長さや内積で書ける。  
 古典的不変式論の第二基本定理。  
 内積を3つの関数の関数式は、Gram 行列の4次1行1列式  $= 0$  で与えられる。

式の土台となる空間の間の写像での記述

空間

$$X: 3 \text{ 行 } r \text{ 列行列} \mapsto X^T X: r \times r \text{ 対称行列}$$

$$\begin{cases} GL(r) \text{ 共変} \\ O(3) \text{ 不変} \end{cases}$$

関数

$$\left( \begin{array}{c} 3 \text{ 行 } r \text{ 列行列上の} \\ 3 \text{ 次元回転不変な関数} \end{array} \right) \xleftarrow{\text{代数同型}} \left( \begin{array}{c} r \times r \text{ 対称行列上の} \\ \text{関数} \end{array} \right) \quad \left( \begin{array}{c} \text{11 行 1 列式} \\ \text{行列} \end{array} \right)$$

## 表現論

表現論 I : 対称性 (群, 環) を与えて, その表現を調べよ。

① { 既約表現のリスト作り  
表現の分解  
:  
}

表現論 II : 何らかの object を与える。  
(隠れた) 対称性を見つける。

ここでは: 関数・ベクトル場や, その微分たち。  
多変数の微分種命  $\rightarrow$  微分幾何  
(一般には難しい 対称性)

モデルを用いる: グラスマン多様体, 旗多様体。

## グラスマン多様体

$\text{Grass}(n, r)$

$n > r > 0$

$n$ -次元線型空間を固定する。

その中の  $r$ -次元部分空間の全体を, グラスマン多様体 といい。

## モジュライ空間

ぽつぽつと見ると同じようなものを

くわしく見て分類したもの

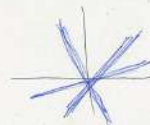
2通りの同値関係

coarse vs fine

。ねこの分類: ミモ, パルシヤ, シヤム, ... (犬は しゃんすい)

。  $r=1$ : 直線 (原点を通る) の分類: 射影空間

$r=1, n=2$  平面内の原点を通る直線全体



群

離散

(例) 時間反転  
空間反転

連続

(例) 回転

↓

無限小

: リー環, ベクトル場

表紙

exact な対称性と扱うので

2つ(1つ)合致しても誤差なしに対称性あり。

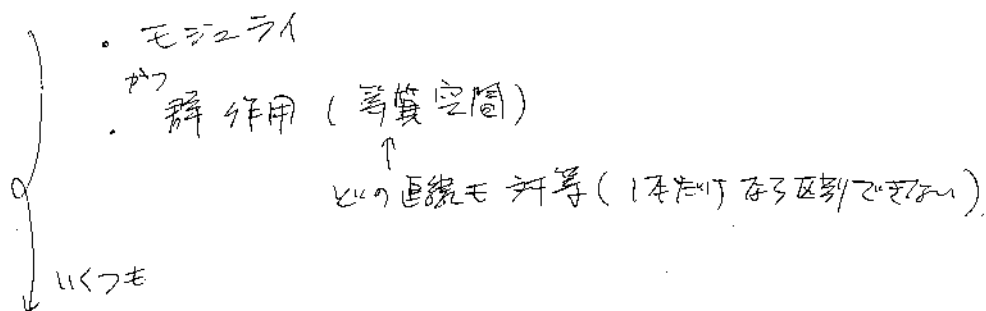
一般論もあるし、型による個別の個性もある。

短紙

誤差を以て存在理論が未整備。

(vs. カラ系)

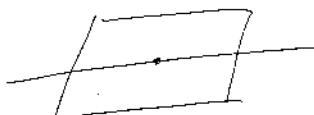
グラスマン多様体



旗多様体

$n$ 次元ベクトル空間内の、線型部分空間の列の全体

(例) 直線と平面の組。直線は平面上にある



$$M(n, r, \mathbb{C}) \leftarrow Y(\mathbb{C}) \xleftarrow{\tilde{W}'} Z(\mathbb{C})$$

$$\begin{cases} n=f. \\ r=2 \\ s=1 \end{cases}$$

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{H} \downarrow & & \mathbb{G} \downarrow & & \bar{\mathbb{G}} \downarrow \\ \text{Sym}(r, \mathbb{C}) & \leftarrow & \text{Sym}(r, \mathbb{C})_{rk \leq s} & \xleftarrow{W'} & M(r, s; \mathbb{C})_{rk=s} \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc} Z(\mathbb{C}) & \longrightarrow & M(n, r, \mathbb{C})_{rk=r} \times M(r, s, \mathbb{C})_{rk=s} & \xrightarrow{\phi} & M(n, s, \mathbb{C})_{rk=s} \\ \tilde{W}' \downarrow & & \downarrow & & \downarrow W \\ Y(\mathbb{C}) & \longrightarrow & M(n, r, \mathbb{C})_{rk=r} & \xrightarrow[\mathbb{S}]{} & \text{Alt}(n, \mathbb{C}) \xrightarrow[\text{II}]{} \text{Sym}(n, \mathbb{C}) \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc} M(n, r, \mathbb{C})_{rk=r} & \leftarrow & M(n, r, \mathbb{C})_{rk=r} \times M(r, s, \mathbb{C})_{rk=s} & \xrightarrow{\phi} & M(n, s, \mathbb{C})_{rk=s} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \text{Grass}(n, r, \mathbb{C}) & \leftarrow & \text{Flag}(n; s, r, \mathbb{C}) & \longrightarrow & \text{Grass}(n, s, \mathbb{C}) \end{array}$$

$$Z(\mathbb{R}) = \left\{ \left( \begin{pmatrix} c_0 & l_0 \\ c_1 & l_1 \\ c_2 & l_2 \\ c_3 & l_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, -p \right) \in M(4, 2, \mathbb{R})_{rk=2} \times \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}^X \mid X^T g X = -p W V^T \right\}$$

"   
 X

$$\begin{array}{ccccc} Z(\mathbb{R}) & \longrightarrow & M(4, 2, \mathbb{R})_{rk=2} \times \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}^X & \longrightarrow & M(4, 1, \mathbb{R})_{rk=1} \times \mathbb{R}^X \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow W_4 \\ Y(\mathbb{R}) & \longrightarrow & M(4, 2, \mathbb{R})_{rk=2} & \xrightarrow[\mathbb{S}]{} & \text{Alt}(4, \mathbb{R})_{rk=2} \xrightarrow[\text{II}]{} \text{Sym}(4, \mathbb{R}) \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc} Y(\mathbb{R}) & \xleftarrow{\tilde{W}_2} & Z(\mathbb{R}) & \xrightarrow{\bar{\Phi}} & M(4, 1, \mathbb{R})_{rk=1} \times \mathbb{R}^X \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ M(4, 2, \mathbb{R})_{rk=2} & \leftarrow & M(4, 2, \mathbb{R})_{rk=2} \times \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}^1 & \longrightarrow & M(4, 1, \mathbb{R})_{rk=1} \times \mathbb{R}^X \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \text{Grass}(4, 2, \mathbb{R}) & \leftarrow & \text{Flag}(4; 1, 2, \mathbb{R}) & \longrightarrow & \text{Grass}(4, 1, \mathbb{R}) \end{array}$$

$$\bar{R} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -g \end{pmatrix}$$

$$Z(R)$$

↓

fiber

$$G^1(\bar{R}) \subset Y(R)$$

↓

↓

$$\bar{R} \in \text{sym}(2, \mathbb{R})_{k=1}$$

off-shell 条件の  
fiber 解釈

「マス・フォア・インダストリ研究」シリーズ刊行にあたり

本シリーズは、平成 23 年 4 月に設立された九州大学マス・フォア・インダストリ研究所 (IMI) が、平成 25 年 4 月に共同利用・共同研究拠点「産業数学の先進的・基礎的共同研究拠点」として、文部科学大臣より認定を受けたことにともない刊行するものである。本シリーズでは、主として、マス・フォア・インダストリに関する研究集会の会議録、共同研究の成果報告等を出版する。各巻はマス・フォア・インダストリの最新の研究成果に加え、その新たな視点からのサーベイ及びレビューなども収録し、マス・フォア・インダストリの展開に資するものとする。

平成 30 年 10 月  
マス・フォア・インダストリ研究所  
所長 佐伯 修

### 解析から設計に向けたオフシエル数理科学

マス・フォア・インダストリ研究 No.25, IMI, 九州大学

ISSN 2188-286X

発行日 2022 年 3 月 28 日

編集 佐久間弘文, 大津元一, 小嶋 泉, 福本康秀

発行 九州大学マス・フォア・インダストリ研究所

〒819-0395 福岡市西区元岡 744

九州大学数理・IMI 事務室

TEL 092-802-4402 FAX 092-802-4405

URL <https://www.imi.kyushu-u.ac.jp/>

印刷 城島印刷株式会社

〒810-0012 福岡市中央区白金 2 丁目 9 番 6 号

TEL 092-531-7102 FAX 092-524-4411

## シリーズ既刊

| Issue                     | Author / Editor                           | Title                                                                                                                                        | Published        |
|---------------------------|-------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------|
| マス・フォア・インダストリ<br>研究 No.1  | 穴田 啓晃<br>安田 貴徳<br>Xavier Dahan<br>櫻井 幸一   | Functional Encryption as a Social Infrastructure and<br>Its Realization by Elliptic Curves and Lattices                                      | 26 February 2015 |
| マス・フォア・インダストリ<br>研究 No.2  | 滝口 孝志<br>藤原 宏志                            | Collaboration Between Theory and Practice in<br>Inverse Problems                                                                             | 12 March 2015    |
| マス・フォア・インダストリ<br>研究 No.3  | 笈 三郎                                      | 非線形数理モデルの諸相：連続，離散，超離散，<br>その先<br>(Various aspects of nonlinear mathematical models<br>( : continuous, discrete, ultra-discrete, and beyond ) | 24 March 2015    |
| マス・フォア・インダストリ<br>研究 No.4  | 穴田 啓晃<br>安田 貴徳<br>櫻井 幸一<br>寺西 勇           | Next-generation Cryptography for<br>Privacy Protection and Decentralized Control and<br>Mathematical Structures to Support Techniques        | 29 January 2016  |
| マス・フォア・インダストリ<br>研究 No.5  | 藤原 宏志<br>滝口 孝志                            | Mathematical Backgrounds and Future Progress of<br>Practical Inverse Problems                                                                | 1 March 2016     |
| マス・フォア・インダストリ<br>研究 No.6  | 松谷 茂樹<br>佐伯 修<br>中川 淳一<br>上坂 正晃<br>濱田 裕康  | 結晶のらせん転位の数理                                                                                                                                  | 10 January 2017  |
| マス・フォア・インダストリ<br>研究 No.7  | 滝口 孝志<br>藤原 宏志                            | Collaboration among mathematics, engineering and<br>industry on various problems in infrastructure and<br>environment                        | 1 March 2017     |
| マス・フォア・インダストリ<br>研究 No.8  | 藤原 宏志<br>滝口 孝志                            | Practical inverse problems based on interdisciplinary<br>and industry-academia collaboration                                                 | 20 February 2018 |
| マス・フォア・インダストリ<br>研究 No.9  | 阿部 拓郎<br>高島 克幸<br>縫田 光司<br>安田 雅哉          | 代数的手法による数理暗号解析<br>Workshop on analysis of mathematical cryptography<br>via algebraic methods                                                 | 1 March 2018     |
| マス・フォア・インダストリ<br>研究 No.10 | 阿部 拓郎<br>落合 啓之<br>高島 克幸<br>縫田 光司<br>安田 雅哉 | 量子情報社会に向けた数理的アプローチ<br>Mathematical approach for quantum information<br>society                                                               | 26 December 2018 |

| Issue                     | Author / Editor                                                                                         | Title                                                                                         | Published        |
|---------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------|------------------|
| マス・フォア・インダストリ<br>研究 No.11 | 松谷 茂樹<br>佐伯 修<br>中川 淳一<br>濱田 裕康<br>上坂 正晃                                                                | 結晶転位の先進数理解析<br>Advanced Mathematical Investigation for Dislocations                           | 7 January 2019   |
| マス・フォア・インダストリ<br>研究 No.12 | 滝口 孝志                                                                                                   | Non-destructive inspection for concrete structures<br>and related topics                      | 13 February 2019 |
| マス・フォア・インダストリ<br>研究 No.13 | 宇波 耕一<br>長野 智絵<br>吉岡 秀和<br>田上 大助<br>白井 朋之                                                               | 数理農学における時系列データのモデル化と解析<br>Modeling and Analysis of Time Series Data in Math-<br>Agro Sciences | 28 February 2019 |
| マス・フォア・インダストリ<br>研究 No.14 | 佐久間 弘文<br>大津 元一<br>小嶋 泉<br>福本 康秀<br>山本 昌宏<br>納谷 昌之                                                      | ドレスト光子に関する基礎的数理解析                                                                             | 18 March 2019    |
| マス・フォア・インダストリ<br>研究 No.15 | 松谷 茂樹<br>佐伯 修<br>中川 淳一<br>濱田 裕康<br>富安 亮子                                                                | 結晶の界面，転位，構造の先進数理解析                                                                            | 2 December 2019  |
| マス・フォア・インダストリ<br>研究 No.16 | Takuro Abe<br>Yasuhiko Ikematsu<br>Koji Nuida<br>Yutaka Shikano<br>Katsuyuki Takashima<br>Masaya Yasuda | Quantum computation, post-quantum cryptography<br>and quantum codes                           | 17 January 2020  |
| マス・フォア・インダストリ<br>研究 No.17 | 河村 彰星<br>津曲 紀宏<br>西澤 弘毅<br>溝口 佳寛                                                                        | 代数・論理・幾何と情報科学—理論から実世界への<br>展開                                                                 | 10 February 2020 |
| マス・フォア・インダストリ<br>研究 No.18 | Takashi Takiguchi                                                                                       | New technologies for non-destructive and non-<br>invasive inspections and their applications  | 21 February 2020 |
| マス・フォア・インダストリ<br>研究 No.19 | Hirofumi Sakuma<br>Motoichi Ohtsu<br>Masayuki Naya<br>Izumi Ojima<br>Yasuhide Fukumoto                  | Basic mathematical studies on dressed photon<br>phenomena                                     | 19 March 2020    |

|                           |                                                                                                        |                                     |                  |
|---------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------|------------------|
| マス・フォア・インダストリ<br>研究 No.20 | 松谷 茂樹<br>井上 和俊<br>加葉田雄太朗<br>佐伯 修<br>垂水 竜一<br>内藤 久資<br>中川 淳一<br>濱田 裕康                                   | 材料科学における幾何と代数 I                     | 24 November 2020 |
| マス・フォア・インダストリ<br>研究 No.21 | Daisuke Sakurai<br>Shigeo Takahashi<br>Naoki Hamada<br>Osamu Saeki<br>Hamish Carr<br>Takahiro Yamamoto | Fiber Topology Meets Applications   | 10 March 2021    |
| マス・フォア・インダストリ<br>研究 No.22 | 巴山 竜来<br>中丸 啓<br>大垣 真二                                                                                 | 数理的生成手法による CG とデジタルファブリケー<br>ション    | 15 March 2021    |
| マス・フォア・インダストリ<br>研究 No.23 | 松谷 茂樹<br>井上 和俊<br>落合 啓之<br>佐伯 修<br>垂水 竜一<br>内藤 久資<br>中川 淳一<br>濱田 裕康<br>松江 要                            | 材料科学における幾何と代数 II                    | 11 November 2021 |
| マス・フォア・インダストリ<br>研究 No.24 | 櫻井 大督<br>佐伯 修<br>高橋 成雄<br>Hamish Carr<br>山本 卓宏<br>濱田 直希                                                | Fiber Topology Meets Applications 2 | 15 March 2022    |



Institute of Mathematics for Industry  
Kyushu University

九州大学マス・フォア・インダストリ研究所

〒819-0395 福岡市西区元岡744

<https://www.imi.kyushu-u.ac.jp>