

2022年度採択分 九州大学マス・フォア・インダストリ研究所 共同利用研究集会

時間・量子測定・準古典近似の理論と実験 ～古典論と量子論の境界～

編集：丹田聡，三宮俊，廣島文生

九州大学マス・フォア・インダストリ研究所

2022年度採択分 九州大学マス・フォア・インダストリ研究所 共同利用研究集会

時間・量子測定・準古典近似の理論と実験
～古典論と量子論の境界～

編集：丹田 聡, 三宮 俊, 廣島文生

About MI Lecture Note Series

The Math-for-Industry (MI) Lecture Note Series is the successor to the COE Lecture Notes, which were published for the 21st COE Program “Development of Dynamic Mathematics with High Functionality,” sponsored by Japan’s Ministry of Education, Culture, Sports, Science and Technology (MEXT) from 2003 to 2007. The MI Lecture Note Series has published the notes of lectures organized under the following two programs: “Training Program for Ph.D. and New Master’s Degree in Mathematics as Required by Industry,” adopted as a Support Program for Improving Graduate School Education by MEXT from 2007 to 2009; and “Education-and-Research Hub for Mathematics-for-Industry,” adopted as a Global COE Program by MEXT from 2008 to 2012.

In accordance with the establishment of the Institute of Mathematics for Industry (IMI) in April 2011 and the authorization of IMI’s Joint Research Center for Advanced and Fundamental Mathematics-for-Industry as a MEXT Joint Usage / Research Center in April 2013, hereafter the MI Lecture Notes Series will publish lecture notes and proceedings by worldwide researchers of MI to contribute to the development of MI.

October 2022

Kenji Kajiwara

Director, Institute of Mathematics for Industry

IMI Workshop of the Joint Usage Research Projects

Theory and Experiment for Time, Quantum Measurement and Semiclassical Approximation -Interface between Classical and Quantum Theory-

MI Lecture Note Vol.92, Institute of Mathematics for Industry, Kyushu University

ISSN 2188-1200

Date of issue: January 6, 2023

Editors: Satoshi Tanda, Suguru Sangu, Fumio Hiroshima

Publisher:

Institute of Mathematics for Industry, Kyushu University

Graduate School of Mathematics, Kyushu University

Motooka 744, Nishi-ku, Fukuoka, 819-0395, JAPAN

Tel +81-(0)92-802-4402, Fax +81-(0)92-802-4405

URL <https://www.imi.kyushu-u.ac.jp/>

はじめに

本研究集会は「時間・量子測定・準古典近似」の理論と実験に関する情報交換・意見交換を目的として実施されました。

本研究集会は、本来 2021 年 9 月に開催予定でしたが、COVID19 により 2022 年 3 月に延期となり、さらに、コロナ禍第 6 波の影響により、2022 年 7 月に再延期となりました。2022 年 7 月時点においてもコロナ禍第 7 波が到来する直前でしたが、最終的には 2022 年 7 月 21 日-23 日の 3 日間で、完全対面で開催することができました。講演者の皆様方、IMI 共同利用の皆様方のご協力、大変ありがとうございました。

本研究集会の総参加者数は 28 名、講演者数は 14 名でした。本来は海外からの講演者も招聘する予定でしたが、生憎のコロナ禍で断念せざるを得なかったことが心残りです。

本研究集会の主題は、「量子測定」及び「時間」という、現代科学の根幹をなす概念です。ハイゼンベルクは 1927 年不確定性原理を発見しました。しかし、我国の小澤正直は「小澤の不等式」を数学的に導き、ハイゼンベルクの不確定性原理が破れ、位置・運動量の同時測定が可能であることを示しました。また、2012 年には、長谷川祐司が「小澤の不等式」を実験的に検証し世界中を驚かせました。時間に関しては、光子時計のような、スカイツリーの頂上と地面の重力差で「時間の遅れ」を検証できる超精密時計が開発されています。また、近年話題のドレスト光子は実験に理論が追いついていない概念です。時間の理論的な研究では、時間結晶や時間作用素という概念が存在します。近年、これらの存在・非存在を実験で検証しようという動きがあります。これらの状況を受けて本研究集会の企画が始まりました。

物理・数学、実験・理論の研究者が一同に介した研究集会は非常に刺激的で、有益な情報交換と意見交換ができました。これらを糧に、さらに研究が進むことを大いに期待しています。

最後になりましたが、量子測定と時間の理論及び実験の研究者が、このように一同に集まれる場は非常に貴重であり、このような機会を与えて頂いた IMI 共同利用の皆様方にはこの場を借りて心から感謝申し上げます。

研究代表者 丹田 聡
北大工学部
2022 年 11 月

2022年度
九州大学マス・フォア・インダストリ研究所
共同利用・共同研究 一般研究-研究集会(I)

2022.
7/21-23
〈THU〉 〈SAT〉

九州大学 伊都キャンパス
ウエスト1号館 D棟 4階
IMIオーディトリウム (W1-D-413)

講演者

7月21日(木) 14:00~17:50
14:00-14:50
小澤 正直 (中部大学・名古屋大学)
15:00-15:50
和田 和幸 (八戸工業高等専門学校)
16:00-16:50
三宮 俊 (株式会社リコー)
17:00-17:50
長谷川 裕司 (北海道大学・ウィーン工科大学)

研究代表者・組織委員

[研究代表者]
丹田 聡 (北海道大学)
[組織委員]
三宮 俊 (株式会社リコー)
廣島 文生 (九州大学)

7月22日(金) 10:30~17:50

10:30-11:20
廣島 文生 (九州大学)
11:30-12:20
寺西 功哲 (北海道大学)
14:00-14:50
中津川 啓治 (物質・材料研究機構)
15:00-15:50
丹田 聡 (北海道大学)
16:00-16:50
筒井 泉 (高エネルギー加速器研究機構)
17:00-17:50
高本 将男 (理化学研究所)

7月23日(土) 10:30~16:50

10:30-11:20
岡村 和弥 (名古屋大学)
11:30-12:20
守屋 創 (金沢大学)
14:00-14:50
佐々木 格 (信州大学)
15:00-15:50
廣川 真男 (九州大学)
16:00-16:50
新井 朝雄 (北海道大学)

時間・量子測定 準古典近似の理論と実験 〜古典論と量子論の境界〜

主催機関:九州大学 マス・フォア・インダストリ研究所
E-mail:imikyoten@jimu.kyushu-u.ac.jp

<https://joint.imi.kyushu-u.ac.jp/post-5246/>



Joint Research Center for Advanced and
Fundamental Mathematics-for-Industry
文部科学大臣指定「産業数学の先進的・基礎的共同研究拠点」
九州大学マス・フォア・インダストリ研究所

時間・量子測定・準古典近似の理論と実験

～古典論と量子論の境界～

研究代表者 丹田 聡 (北大大学院工学院応用物理学部門&トポロジー理工学教育研究センター・教授)

組織委員 三宮 俊 (株式会社リコー)

廣島 文生 (九大数理)

日時 2022年7月21日～7月23日

場所 九州大学伊都キャンパス W1号館D棟4階 IMI オーディトリウム(W1-D-413)

主催 九州大学マス・フォア・インダストリ研究所

研究会 HP <https://joint.imi.kyushu-u.ac.jp/post-5246/>

プログラム

7月21日(木)

14:00-14:50

小澤 正直 (中部大学・名古屋大学)

量子測定とは何を測定するのか：

測定誤差の定義と測定値の観測者独立性

15:00-15:50

和田 和幸 (八戸工業高等専門学校)

1次元スプリットステップ量子ウォークの Witten 指数

16:00-16:50

三宮 俊 (株式会社リコー)

量子密度行列を用いた数値シミュレーションによる

ドレスト光子介在物理現象の記述

17:00-17:50

長谷川 裕司 (北海道大学・ウィーン工科大学)

中性子光学実験による基礎量子物理学の探究

7月22日(金)

10:30-11:20

廣島 文生 (九州大学)

調和振動子に付随した時間作用素

11:30-12:20

寺西 功哲 (北海道大学)

$l^2(N)$ における調和振動子の時間作用素

14:00-14:50

中津川 啓治 (物質・材料研究機構)

量子結晶を用いた「新井・宮本の不等式」の実証へ向けて

15:00-15:50

丹田 聡 (北海道大学)

Quantum Topological Science and Technology:Real-space and K-space Topological Control

16:00-16:50

筒井 泉 (高エネルギー加速器研究機構)

B 中間子崩壊に見る素粒子物理と量子力学の基礎との交流

17:00-17:50

高本 将男 (理化学研究所)

光格子時計がもたらす新たな時間計測とその応用

7月23日(土)

10:30-11:20

岡村 和弥 (名古屋大学)

C^* -代数的量子論におけるシュレディンガー描像

11:30-12:20

守屋 創 (金沢大学)

量子平衡系の時間対称性の破れの非存在に関する厳密な結果の紹介

14:00-14:50

佐々木 格 (信州大学)

量子ウォークの時間作用素について

15:00-15:50

廣川 真男 (九州大学)

開発の視点から見た量子コンピューティング、センシング、シミュレーション

目次

量子測定とは何を測定するのか：測定誤差の定義と測定値の観測者独立性 小澤 正直 (中部大学/名古屋大学)	1
1次元スプリットステップ量子ウォークの Witten index 和田 和幸 (八戸工業高等専門学校)	11
量子密度行列を用いた数値シミュレーションによるドレスト光子介在物理現象の記述 三宮 俊 (株式会社リコー)	23
Uncertainty relations studied in neutron optical experiments 長谷川 裕二 (北海道大学・ウィーン工科大)	37
Time operators associated with harmonic oscillators 廣島 文生 (九州大学)	53
Time operators of the harmonic oscillator in $\ell^2(\mathbb{N})$ 寺西 功哲 (北海道大学理学部数学科)	67
時間結晶を用いた「新井・宮本の不等式」の実証へ向けて 中津川 啓治 (国立研究開発法人物質・材料研究機構)	81
Quantum Topological Science and Technology: Real-space and K-space Topological Control 丹田 聡 (北海道大学)	91
<i>B</i> 中間子崩壊に見る素粒子物理と量子力学の基礎との交流 筒井 泉 (高エネルギー研究所)	107
光格子時計がもたらす新たな時間計測とその応用 高本 将男 (理化学研究所)	119
<i>C*</i> -代数的量子論におけるシュレディンガー描像 岡村 和弥 (名古屋大学)	127
量子平衡系の時間対称性の破れの非存在に関する厳密な結果の紹介 A review on some rigorous results of nonexistence of spontaneous symmetry breakdown of time-translation symmetry 守屋 創 (金沢大学)	137
量子ウォークの時間作用素について 佐々木 格 (信州大学)	143

量子測定とは何を測定するのか： 測定誤差の定義と測定値の観測者独立性

小澤 正直

中部大学 AI 数理データサイエンスセンター／創発学術院
名古屋大学 大学院情報学研究科

1. 量子力学に対する von Neumann の公理系

本稿では、1932年に発表された von Neumann [1] による量子力学の公理系を仮定する。ただし、測定に伴う状態変化に関する公理（反復可能性仮説）は含まない。それらは、以下のように述べられる。

公理 Q1 (状態と物理量). 任意の量子系 S には、 S の状態空間と呼ばれる、ある Hilbert 空間 \mathcal{H} が対応する。 S の状態には、 \mathcal{H} 上の密度作用素が対応し、 S の物理量には、 \mathcal{H} 上の自己共役作用素が対応する。

記号. 実数直線 \mathbb{R} のボレル集合の全体を $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ 、 \mathbb{R} 上の有界ボレル関数の全体を $B(\mathbb{R})$ で表す。自己共役作用素 X のスペクトル測度を $E^X(\Delta)$ ($\Delta \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$) で表す。任意の実数 $x \in \mathbb{R}$ に対して、 $E^X(x) = E^X((-\infty, x])$ 、 $P^X(x) = E^X(\{x\})$ と書く。

公理 Q2 (Born の統計公式). 任意の物理量 A は任意の状態 ρ で測定可能で、その測定値 x の確率分布は次式で与えられる。これを物理量 A の状態 ρ における確率分布と呼ぶ。

$$\Pr\{x \in \Delta | \rho\} = \text{Tr}[E^A(\Delta)\rho] \quad (\Delta \in \mathcal{B}(\mathbb{R})).$$

公理 Q3 (時間発展). 系 S は、時刻 t から $t + \tau$ の間、(時間に依存しない) Hamiltonian H をもつ孤立系とする。もし、系 S が時刻 t で状態 $\rho(t)$ にあるならば、時刻 $t + \tau$ における系 S の状態 $\rho(t + \tau)$ は次式で与えられる。

$$\rho(t + \tau) = e^{-i\tau H/\hbar} \rho(t) e^{i\tau H/\hbar}.$$

公理 Q4 (合成系). \mathcal{H} を状態空間とする系 S_1 と \mathcal{K} を状態空間とする系 S_2 の合成系 $S = S_1 + S_2$ の状態空間はテンソル積 $\mathcal{H} \otimes \mathcal{K}$ で与えられ、 S_1 の物理量 A は S の物理量 $A \otimes I$ と同一視され、 S_2 の物理量 B は S の物理量 $I \otimes B$ と同一視される。

2. 完全正值インストルメント

記号. $\tau_c(\mathcal{H})$ で \mathcal{H} 上のトレースクラス作用素の空間を表す。 $L(\tau_c(\mathcal{H}))$ で $\tau_c(\mathcal{H})$ 上の有界線型変換の空間を表す。 M_n で n 次行列環を表す。 id_n で M_n 上の恒等写像を表す。

定義. $T \in L(\tau_c(\mathcal{H}))$ は、任意の $n = 1, 2, \dots$ について、 $T \otimes \text{id}_n$ が $\tau_c(\mathcal{H}) \otimes M_n$ 上の正值写像であるとき、完全正值写像と呼ばれる。

記号. $CP(\tau_c(\mathcal{H}))$ で $\tau_c(\mathcal{H})$ 上の完全正值写像の空間を表す.

定義 (完全正值インストルメントの定義 [2,3]). ヒルベルト空間 \mathcal{H} に対する **完全正值 (CP) インストルメント** とは, $CP(\tau_c(\mathcal{H}))$ に値を持ち, 強作用素位相で加算可能的な \mathbb{R} 上の Borel 測度で $\mathcal{I}(\mathbb{R})$ がトレースを保存するものである.

すなわち, $\mathcal{I}: \mathcal{B}(\mathbb{R}) \rightarrow L(\tau_c(\mathcal{H}))$ が CP インストルメントであるとは, 次の条件が成り立つことである.

(i) **完全正值性:** 任意の $\Delta \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ に対して, $\mathcal{I}(\Delta)$ は $\tau_c(\mathcal{H})$ 上の完全正值写像である.

(ii) **可算加法性:** 互いに交わらない列 $\Delta_1, \dots, \Delta_j, \dots \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ と任意の $\rho \in \tau_c(\mathcal{H})$ に対して次式が成り立つ.

$$\mathcal{I}\left(\bigcup_j \Delta_j\right)\rho = \sum_j \mathcal{I}(\Delta_j)\rho.$$

(iii) **単位性:** 任意の $\rho \in \tau_c(\mathcal{H})$ に対して次式が成り立つ.

$$\text{Tr}[\mathcal{I}(\mathbb{R})\rho] = \text{Tr}[\rho].$$

3. 量子測定の普遍モデル

定義 (測定過程の定義 [3]). $\mathbf{M} = (\mathcal{K}, \xi, U, M)$ が **測定過程** (または, **間接測定モデル**) であるとは, 以下の条件を満たすことを言う.

- (i) \mathcal{K} は Hilbert 空間 (プローブの状態空間を表す).
- (ii) ξ は \mathcal{K} に属する単位ベクトル (プローブの初期状態を表す).
- (iii) U は $\mathcal{H} \otimes \mathcal{K}$ 上のユニタリ作用素 (測定相互作用による時間発展を表す).
- (iv) M は \mathcal{K} 上の自己共役作用素 (メーター物理量を表す).

注意. 測定過程 $\mathbf{M} = (\mathcal{K}, \xi, U, M)$ は, 次の測定のプロトコルをモデル化したものである. 測定は, ヒルベルト空間 \mathcal{H} を持つ対象 \mathbf{S} とヒルベルト空間 \mathcal{K} を持つプローブ \mathbf{P} の時刻 0 から時刻 Δt までの相互作用で行われ, ξ は時刻 0 におけるプローブの状態, U は時刻 0 から時刻 Δt までの合成系 $\mathbf{S} + \mathbf{P}$ の時間発展を表す. 測定値は, 時刻 Δt におけるプローブに属するメーター物理量 M を測定することにより得られる.

定理 (完全正值インストルメントの表現定理 [3]). 任意の間接測定モデル $\mathbf{M} = (\mathcal{K}, \xi, U, M)$ は, 関係

$$(1) \quad \mathcal{I}(\Delta)\rho = \text{Tr}_{\mathcal{K}}[U(\rho \otimes |\xi\rangle\langle\xi|)U^\dagger(I \otimes E^M(\Delta))].$$

で CP インストルメント \mathcal{I} (\mathbf{M} のインストルメントと呼ばれる) を定め, 次の統計的性質を持つ.

(i) **出力分布:** $\Pr\{\mathbf{x} \in \Delta \mid \rho\} = \text{Tr}[\mathcal{I}(\Delta)\rho].$

(ii) **条件付き出力状態:** $\rho_{\{\mathbf{x} \in \Delta\}} = \frac{\mathcal{I}(\Delta)\rho}{\text{Tr}[\mathcal{I}(\Delta)\rho]}.$

逆に, すべての CP インストルメント \mathcal{I} は, 式(1)を満たすある間接測定モデル (\mathcal{K}, ξ, U, M) を持つ.

定義. $\mathbf{M} = (\mathcal{K}, \xi, U, M)$ を系 \mathbf{S} に対する測定過程とする. このとき, 系 \mathbf{S} の任意の物理量 X に対して, $X(0) = X \otimes I, X(\Delta t) = U^\dagger(X \otimes I)U$ と表し, 系 \mathbf{P} の任意の物理

量 Y に対して $Y(0) = I \otimes Y, Y(\Delta t) = U^\dagger(I \otimes Y)U$ と表す. \mathbf{M} の POVM Π を

$$(2) \quad \Pi(\Delta) = \text{Tr}_{\mathcal{K}}[E^{M(\Delta t)}(\Delta)(I \otimes |\xi\rangle\langle\xi|)] \quad (\Delta \in \mathcal{B}(\mathbb{R}))$$

で定義する. ここで, $\text{Tr}_{\mathcal{K}}$ は, \mathcal{K} 上の部分トレースを表す. \mathbf{M} の POVM Π によって, 測定値の確率分布 (測定の出力分布) が,

$$(3) \quad \Pr\{\mathbf{x} \in \Delta | \rho\} = \text{Tr}[\Pi(\Delta)\rho].$$

と表される. 任意の実数 $x \in \mathbb{R}$ に対して, $\Pi(x) = \Pi((-\infty, x])$ と書く.

4. 古典的測定の二乗平均平方根誤差

定義 (古典的測定誤差の定義 [4,5]) 変量 Θ の値を直接観測可能な変量 Ω によって測定 (推定) する場合,

$$(4) \quad N = \Omega - \Theta$$

を誤差と呼ぶ. 一般に, Θ と Ω は確率変数で, $\mu(d\theta, d\omega)$ を Θ, Ω の結合確率分布とする. N の平均的な値を**平均誤差**と呼ぶが, 単純な平均は正の誤差と負の誤差が相殺して具合が悪い. Laplace [4] は, N の絶対値の平均, **絶対平均誤差**

$$(5) \quad \varepsilon_L(\Omega, \Theta) = \langle |N| \rangle = \iint_{\mathbb{R}^2} |\theta - \omega| \mu(d\theta, d\omega)$$

を提案したが, その後, Gauss [5] が, **二乗平均誤差**を提案し, その平方根である**二乗平均平方根誤差**が, 今日まで平均誤差の標準的定義とされている:

$$(6) \quad \varepsilon_G(\Omega, \Theta) = \langle N^2 \rangle^{1/2} = \left(\iint_{\mathbb{R}^2} (\omega - \theta)^2 \mu(d\theta, d\omega) \right)^{1/2}$$

この値は, 結合確率分布 $\mu(d\mu, d\theta)$ だけで決まるので, 以下

$$(7) \quad \varepsilon_G(\mu) = \left(\iint_{\mathbb{R}^2} (\omega - \theta)^2 \mu(d\theta, d\omega) \right)^{1/2}$$

と定義する.

5. 正しい古典測定とは?

定義 (正確な古典測定の定義). 変量 Θ の値 (真の値) を直接観測可能な変量 Ω の値 (測定値) によって測定する場合, 次の関係が成り立つとき, **正確な測定**であると言う.

$$(8) \quad \Pr\{\Omega = \Theta\} := \mu(\{(\theta, \omega) \in \mathbb{R}^2 \mid \theta = \omega\}) = 1.$$

定理 (古典二乗平均平方根誤差の健全性・完全性). 真の値と測定値が結合確率分布 μ をもつ測定が正確であるための必要十分条件は, $\varepsilon_G(\mu) = 0$ である.

証明.

$$\varepsilon_G(\mu)^2 = \iint_{\{(\theta, \omega) \in \mathbb{R}^2 \mid \theta \neq \omega\}} (\omega - \theta)^2 \mu(d\theta, d\omega)$$

から明らか.

6. 状態 ρ における物理量 X, Y の結合確率分布とは?

定義 (量子結合確率分布の定義 [6]). 物理量 X, Y , 状態 ρ , \mathbb{R}^2 上のボレル確率測度 μ が与えられたとき, 任意の有界ボレル関数 f, g に対して, 有界作用素 $f(X), g(Y)$ の任意の多項式 $p(f(X), g(Y))$ に対して,

$$(9) \quad \text{Tr}[p(f(X), g(Y))\rho] = \iint_{\mathbb{R}^2} p(f(x), g(y)) \mu(dx, dy)$$

が成り立つならば, μ を状態 ρ における物理量 X, Y の結合確率分布と呼ぶ.

定義 (状態依存的可換性の定義). 物理量 X, Y , 状態 ρ が与えられたとき, 任意の実数 $x, y \in \mathbb{R}$ に対して, $[E^X(x), E^Y(y)] = 0$ が成り立つならば, 状態 ρ において X と Y は可換である ($X \leftrightarrow_{\rho} Y$) と言う.

定理 (結合確率分布の存在定理 [6]). 状態 ρ における物理量 X, Y の結合確率分布が存在するための必要十分条件は, X, Y が ρ で可換であることである. \mathcal{H} が有限次元のとき, これは, ρ が X, Y の同時固有状態の重ね合わせの混合であることと同値である.

7. 量子完全相関

定義 (量子完全相関の定義 [7]). 物理量 X, Y が状態 ρ において完全相関する ($X =_{\rho} Y$) とは, $\Delta \cap \Gamma = \emptyset$ ならば $\text{Tr}[E^X(\Delta), E^Y(\Gamma)\rho] = 0$ が成り立つことである.

定義. \mathcal{H} の部分集合 S の直交補空間を S^{\perp} で表す. 物理量 X と状態 ρ で張られる巡回部分空間を

$$(10) \quad \mathcal{C}(X, \rho) := \{f(X)\psi \in \mathcal{H} \mid f \in B(\mathbb{R}), \psi \in \text{ran}(\rho)\}^{\perp\perp}$$

と定義する.

定理 (量子完全相関の特徴化定理 [7]). 物理量 X, Y , 状態 ρ に対して, 次の条件は同値.

- (i) $X =_{\rho} Y$.
- (ii) X, Y が ρ で可換で, その結合確率分布 μ が $\mu(\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = y\}) = 1$ を満たす.
- (iii) X と ρ で張られる巡回部分空間 $\mathcal{C}(X, \rho)$ に属する任意の状態 ψ に対して, X と Y の確率分布が一致する, すなわち,

$$(\psi, E^X(x)\psi) = (\psi, E^Y(x)\psi) \quad (x \in \mathbb{R}).$$

物理量 X が離散的で状態 ρ がベクトル状態 $\rho = |\Psi\rangle\langle\Psi|$ の場合は, 次の条件とも同値になる.

- (iv) Ψ は X と Y の共通の固有値に対する同時固有ベクトルの重ね合わせ, すなわち, $\Psi = \sum_{x \in \mathbb{R}} c_x |X = x, Y = x\rangle$.
- (v) $\sum_{x \in \mathbb{R}} [P^X(x) \wedge P^Y(x)]\Psi = \Psi$.

定理 (量子完全相関の推移性 [7]). 関係 $=_{\rho}$ は同値関係であり, とりわけ, 推移的である, すなわち, $X =_{\rho} Y$ かつ $Y =_{\rho} Z$ ならば, $X =_{\rho} Z$.

8. 正しい量子測定とは?

定義 (正確な測定の定義 [7]). 間接測定モデル $M = (\mathcal{K}, \xi, U, M)$ を持つ測定が系 S の状態 ψ において物理量 A の**正確な (正しい) 測定**であるとは, 状態 $\psi \otimes \xi$ において $A(0) = A \otimes I$ と $M(\Delta t) = U^\dagger(I \otimes M)U$ が量子完全相関することである, すなわち,

$$(11) \quad A(0) =_{\psi \otimes \xi} M(\Delta t).$$

注意. 測定が正しいと被測定物理量の確率分布と測定値の確率分布は一致するが, このことは測定が正しいことの必要条件であって, 十分条件にはならない.

定理. (正確な測定の特徴化定理 1 [7]) 間接測定モデル $M = (\mathcal{K}, \xi, U, M)$ が系 S の状態 ρ において物理量 A の正しい測定であるための必要十分条件は, 任意の $\psi \in \mathcal{C}(A, \rho)$ において, 測定値の確率分布が被測定量の確率分布を再現することである:

$$(\psi, E^A(x)\psi) = (\psi, \Pi(x)\psi) \quad (\psi \in \mathcal{C}(A, \rho)).$$

したがって, 任意の状態 ρ において物理量 A の正しい測定であるための必要十分条件は, 測定の POVM が物理量 A のスペクトル測度に一致することである: $\Pi = E^A$.

定理. (正確な測定の特徴化定理 2 [7]) 間接測定モデル $M = (\mathcal{K}, \xi, U, M)$ が系 S の状態 ψ において離散的物理量 A の正しい測定であるための必要十分条件は, ψ と直交しない, A の任意の固有状態が U によって同一の固有値に対する $I \otimes M$ の固有状態に変換されることである. つまり,

$$(\phi, \psi) \neq 0 \text{ かつ } A\phi = a\phi \text{ ならば } (I \otimes M)U(\phi \otimes \xi) = aU(\phi \otimes \xi).$$

9. 測定値の観測者独立性

次の仮定をおく.

- **S:** 被測定系, Hilbert 空間 \mathcal{H} で表される.
- **E:** 環境系, Hilbert 空間 \mathcal{K} で表される.
- **A:** 系 S の被測定物理量.
- $M_1, M_2:$ 環境系 E に属する互いに可換なメータ物理量. 空間的に離れた二人の観測者に対応する.
- 全系の時間発展を表す $\mathcal{H} \otimes \mathcal{K}$ 上のユニタリ変換 $U(t)$ は次のハイゼンベルク作用素 $A(0), M_j(\Delta t), (j = 1, 2) (0 < \Delta t)$, を定める.

$$(12) \quad A(0) = A \otimes I,$$

$$(13) \quad M_j(\Delta t) = U(\Delta t)^\dagger(I \otimes M_j)U(\Delta t).$$

- ψ と ξ を系 S と環境系 E の初期状態とする.

このとき, それぞれの観測者の POVM は次式で定義される.

$$(14) \quad \Pi_j(x) = \langle \xi | P^{M_j(t)}(x) | \xi \rangle.$$

系の状態 ψ において観測者 j は測定値 x を次の確率で得る.

$$(15) \quad \Pr\{M_j(t) = x | \psi \otimes \xi\} = \langle \psi | \Pi_j(x) | \psi \rangle.$$

次の仮定を設ける：二人の観測者は物理量 A の確率分布を正しく再現する，すなわち，任意の状態 ψ に対して，

$$(16) \quad \Pr\{M_j(t) = x \mid \psi \otimes \xi\} = \Pr\{A(0) = x \mid \psi \otimes \xi\}.$$

よって，次式が成り立つ．

$$(17) \quad \Pi_j(x) = P^A(x).$$

$M_1(t)$ と $M_2(t)$ は可換なので，初期状態 $\psi \otimes \xi$ におけるそれらの結合確率分布が存在する．

$$(18) \quad \Pr\{M_1(t) = x, M_2(t) = y \mid \psi \otimes \xi\} = \langle \psi \otimes \xi \mid P^{M_1(t)}(x) P^{M_2(t)}(y) \mid \psi \otimes \xi \rangle.$$

したがって，量子力学は上の結合確率が完全相関を示すか，否かを定めることができる．この時，次の定理が成り立つ．

定理. (測定値の観測者独立性定理 [8]) 同一の物理量 A を二人の観測者が測定すると，それぞれの測定値は一致する： $x \neq y$ ならば

$$\Pr\{M_1(t) = x, M_2(t) = y \mid \psi \otimes \xi\} = 0.$$

証明. 式 (17) と正確な測定の特徴化定理 1 から

$$(19) \quad M_1(t) =_{\psi \otimes \xi} A(0) \quad \text{かつ} \quad A(0) =_{\psi \otimes \xi} M_2(t).$$

量子完全相関の推移性から

$$(20) \quad M_1(t) =_{\psi \otimes \xi} M_2(t).$$

したがって， $x \neq y$ ならば

$$(21) \quad \Pr\{M_1(t) = x, M_2(t) = y \mid \psi \otimes \xi\} = 0$$

が成り立つ．

10. 二乗平均平方根誤差概念の量子測定への拡張

定義. Hilbert 空間 \mathcal{H} を状態空間とする系 S の物理量 A の測定に関する間接測定モデル $\mathbf{M} = (\mathcal{K}, \xi, U, M)$ が与えられたとき，

$$(22) \quad A(0) = A \otimes I, \quad M(0) = I \otimes M, \quad M(\Delta t) = U^\dagger(I \otimes M)U$$

とする．

誤差作用素を

$$(23) \quad N(A, \mathbf{M}) = M(\tau) - A(0)$$

と定義する．

系 S の状態 ψ で測定を行なうとき，その二乗平均平方根

$$(24) \quad \varepsilon_{NO}(A, \psi) = \langle \psi \otimes \xi \mid N(A, \mathbf{M})^2 \mid \psi \otimes \xi \rangle^{1/2}$$

を系 S の状態 ψ における誤差作用素による**量子二乗平均平方根誤差**と呼ぶ．

11. 誤差作用素による量子二乗平均平方根誤差の性質

$A(0)$ と $M(\Delta t)$ が可換なときは、状態 $\psi \otimes \xi$ における $A(0)$ と $M(\Delta t)$ の結合確率分布 $\mu_{A(0),M(\Delta t)}(\theta, \omega)$ が存在する。

$$(25) \quad \mu_{A(0),M(\Delta t)}(\theta, \omega) = (\psi \otimes \xi, E^{A(0)}(\theta)E^{M(\Delta t)}(\omega)\psi \otimes \xi)$$

この場合は、状態 $\psi \otimes \xi$ における真の値 $A(0)$ と測定値 $M(\Delta t)$ の結合確率分布が存在するので、古典的な定義を適用して、

$$(26) \quad \varepsilon_G(\mu_{A(0),M(\Delta t)})$$

がこの測定の二乗平均平方根誤差と考えられる。

定理. (対応原理 [7,9]) 誤差作用素による量子二乗平均平方根誤差は、この定義と整合的で、

$$\varepsilon_{NO}(A, \psi) = \varepsilon_G(\mu_{A(0),M(\Delta t)})$$

が成り立つ。

では、何が問題か？ $A(0)$ と $M(\Delta t)$ が非可換なときは、誤差がゼロでも測定が正しくない場合がある。

12. 誤差作用素による誤差の定義が適切でない例

$$(27) \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, M = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \psi = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

として、 $A(0) = A \otimes I$ を測定する代わりに $M(\Delta t) = M \otimes I$ を射影測定するモデルを考えると、

$$(28) \quad \varepsilon_{NO}(A, \psi) = \|A\psi - M\psi\|$$

が成り立ち、

$$(29) \quad \varepsilon_{NO}(A, \psi) = 0$$

となるが、

$$(30) \quad \langle \psi | P^A(2) | \psi \rangle = 1/2, \quad \langle \psi | P^M(2) | \psi \rangle = 0.$$

より、被測定物理量の確率分布と測定値の確率分布が一致しないので、測定は正確ではない。

13. 量子2乗平均平方根誤差

状態 ψ において間接測定モデル \mathbf{M} による物理量 A の測定に関する量子2乗平均平方根誤差を一般に $\varepsilon(A, \psi, \mathbf{M})$ と表し、それが満たすべき条件を考察する。

(I) **(操作的定義可能性)** $\varepsilon(A, \psi, \mathbf{M})$ は、間接測定モデル \mathbf{M} の測定値の確率分布を定める POVM Π , 被測定量 A , 被測定状態 ψ によって定義可能である。

(II) **(対応原理)** $A(0)$ と $M(\Delta t)$ の結合確率分布 $\mu(x, y)$ が存在すれば、古典的2乗平均平方根誤差と一致する。すなわち、

$$\varepsilon(A, \psi, \mathbf{M}) = \mu_G(\mu)$$

が成り立つ。

(III) **(健全性)** 間接測定モデル \mathbf{M} による状態 ψ における物理量 A の測定が正確ならば、 $\varepsilon(A, \psi, \mathbf{M}) = 0$ が成り立つ。

(IV) **(完全性)** $\varepsilon(A, \psi, \mathbf{M}) = 0$ ならば間接測定モデル \mathbf{M} による状態 ψ における物理量 A の測定は正確である。

定理. (健全性 [9]) 誤差作用素型量子2乗平均平方根誤差 $\varepsilon_{NO}(A, \psi, \mathbf{M})$ は、(I)–(III) の条件を満たす。結合確率分布が存在すれば、(IV) も成り立つが一般には (IV) は成り立たない。

真値と測定値の結合確率分布が存在しない場合に誤差作用素による定義をどう改良すればいいか？

定義. 局所一様量子2乗平均平方根誤差を次のように定義する。

$$(31) \quad \bar{\varepsilon}(A, \psi) = \sup_{t \in \mathbb{R}} \varepsilon_{NO}(A, e^{-itA}\psi).$$

ここで、 $\varepsilon_{NO}(A, e^{-itA}\psi)$ を**誤差プロファイル**と呼ぶ。この定義から結合確率分布 μ が存在すれば

$$(32) \quad \bar{\varepsilon}(A, \psi) = \varepsilon_{NO}(A, \psi) = \varepsilon(A, \psi)$$

が成り立つ。

次の定理が成り立つ。

定理 (局所一様量子2乗平均平方根誤差の健全性・完全性 [9]). 間接測定モデル \mathbf{M} , 物理量 A , 状態 ψ に対して、次の命題が成り立つ。

- (i) 局所一様量子2乗平均平方根誤差 $\bar{\varepsilon}(A, \psi, \mathbf{M})$ は、(I)–(IV) の条件をすべて満たす。
- (ii) $A(0)$ と $M(\Delta t)$ の結合確率分布が存在すれば、

$$\bar{\varepsilon}(A, \psi, \mathbf{M}) = \varepsilon_{NO}(A, \psi, \mathbf{M})$$

が成り立つ。

- (iii) $A(0)^2 = M(\Delta t)^2 = I$ ならば

$$\bar{\varepsilon}(A, \psi, \mathbf{M}) = \varepsilon_{NO}(A, \psi, \mathbf{M})$$

が成り立つ。

14. 新しい誤差による不確定性原理

定義. 以下では、一般の間接測定モデル $\mathbf{M} = (\mathcal{K}, |\xi\rangle, U, M)$ による A, B の近似的同時測定とは、二つの関数 f, g を用いて、 $(\mathcal{K}, |\xi\rangle, U, f(M))$ によって A を測定し、同時に $(\mathcal{K}, |\xi\rangle, U, g(M))$ によって B を測定するものとする。この場合のそれぞれの測定誤差は次のように定義される。

(I) 入力状態がベクトル状態 ψ の場合.

$$(33) \quad \varepsilon_{NO}(A, \psi) = \|[f(M(\Delta t)) - A(0)](\psi \otimes \xi)\|.$$

$$(34) \quad \varepsilon_{NO}(B, \psi) = \|[g(M(\Delta t)) - B(0)](\psi \otimes \xi)\|.$$

$$(35) \quad \bar{\varepsilon}(A, \psi) = \sup_{t \in \mathbb{R}} \varepsilon_{NO}(A, e^{-itA}\psi).$$

$$(36) \quad \bar{\varepsilon}(B, \psi) = \sup_{t \in \mathbb{R}} \varepsilon_{NO}(B, e^{-itB}\psi).$$

(II) 入力状態が密度作用素 ρ で与えられる場合.

$$(37) \quad \varepsilon_{NO}(A, \rho) = \|[f(M(\Delta t)) - A(0)](\sqrt{\rho} \otimes |\xi\rangle\langle\xi)|\|_{HS}.$$

$$(38) \quad \varepsilon_{NO}(B, \rho) = \|[g(M(\Delta t)) - B(0)](\sqrt{\rho} \otimes |\xi\rangle\langle\xi)|\|_{HS}.$$

$$(39) \quad \bar{\varepsilon}(A, \rho) = \sup_{t \in \mathbb{R}} \varepsilon_{NO}(A, e^{-itA}\rho e^{itA}).$$

$$(40) \quad \bar{\varepsilon}(B, \rho) = \sup_{t \in \mathbb{R}} \varepsilon_{NO}(B, e^{-itB}\rho e^{itB}).$$

これらに対して次の形の不確定性関係が成り立つ。

定理. (同時測定誤差の不確定性関係 [9–12]). A, B を系 S の物理量とし、 $\varepsilon = \varepsilon_{NO}$ または $\varepsilon_0 = \bar{\varepsilon}$ とする。

(I) 入力状態がベクトル状態 ψ の場合.

$$C_{AB} = \frac{1}{2} |\langle \psi | [A, B] | \psi \rangle|$$

とおくと、次の関係が成り立つ。

$$(i) \quad \varepsilon(A)\varepsilon(B) + \sigma(B)\varepsilon(A) + \sigma(A)\varepsilon(B) \geq C_{AB}.$$

$$(ii) \quad \sigma(B)^2\varepsilon(A)^2 + \sigma(A)^2\varepsilon(B)^2 + 2\varepsilon(A)\varepsilon(B)\sqrt{\sigma(A)^2\sigma(B)^2 - C_{AB}^2} \geq C_{AB}^2.$$

(II) 入力状態が密度作用素 ρ で与えられる場合.

$$D_{AB} = \frac{1}{2} |\text{Tr}[\sqrt{\rho}[A, B]\sqrt{\rho}]|$$

とおくと、次の関係が成り立つ。

$$(i) \quad \varepsilon(A)\varepsilon(B) + \sigma(B)\varepsilon(A) + \sigma(A)\varepsilon(B) \geq D_{AB}.$$

$$(ii) \quad \sigma(B)^2\varepsilon(A)^2 + \sigma(A)^2\varepsilon(B)^2 + 2\varepsilon(A)\varepsilon(B)\sqrt{\sigma(A)^2\sigma(B)^2 - D_{AB}^2} \geq D_{AB}^2.$$

15. パラメータ掃引法による局所一様量子 2 乗平均平方根誤差の測定

第 12 節では、

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad M = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad \psi = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

として, $A(0) = A \otimes I$ を測定する代わりに $M(\Delta t) = M \otimes I$ を射影測定するモデルを考えた. このモデルでは, 誤差作用素型量子二乗平均平方根誤差について,

$$(41) \quad \varepsilon_{NO}(A, \psi) = 0$$

となるが, 被測定物理量の確率分布と測定値の確率分布が一致しないので, 測定は正確測定ではなかった. つまり, 存在する誤差を全てカウントしていなかったことになる. この隠れた誤差を調べるため, 誤差プロファイルを計算すると,

$$(42) \quad \varepsilon_{NO}(A, e^{-itA}\psi) = 2|\sin t|$$

が得られる. したがって,

$$(43) \quad \bar{\varepsilon}(A, \psi) = \sup_{t \in \mathbb{R}} \varepsilon_{NO}(A, e^{-itA}\psi) = 2$$

が正しい誤差評価を与える [9].

このように入力状態 $\psi(t) = e^{-itA}\psi$ を変化させることにより, 隠れた誤差が現れる様子は, ウィーン工科大学の原子炉を用いた中性子のスピン測定実験で観測された [13].

REFERENCES

- [1] von Neumann, J. *Mathematical Foundations of Quantum Mechanics* (Princeton UP, Princeton, NJ, 1955). [Originally published: *Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik* (Springer, Berlin, 1932)].
- [2] Davies, E. B. & Lewis, J. T. An operational approach to quantum probability. *Commun. Math. Phys.* **17**, 239–260 (1970).
- [3] Ozawa, M. Quantum measuring processes of continuous observables. *J. Math. Phys.* **25**, 79–87 (1984).
- [4] Laplace, P. S. m. d. *Théorie Analytique des Probabilités* (Ve. Courcier, Paris, 1812).
- [5] Gauss, C. F. *Theoria combinationis observationum erroribus minimis obnoxiae, pars prior* (societati regiae exhibita, febr. 15, 1821). *Commentationes Societatis Regiae Scientiarum Gottingensis Recentiores V* (Classis Mathematicae), 33–62 (1819–1822). [English translation: *Theory of the Combination of Observations Least Subject to Errors: Part One, Part Two, Supplement*, SIAM (Philadelphia, USA, 1995)].
- [6] Ozawa, M. Quantum set theory extending the standard probabilistic interpretation of quantum theory. *New Generat. Comput.* **34**, 125–152 (2016).
- [7] Ozawa, M. Quantum perfect correlations. *Ann. Phys. (N.Y.)* **321**, 744–769 (2006).
- [8] Ozawa, M. Intersubjectivity of outcomes of quantum measurements (2019). arXiv:1911.10893 [physics.gen-ph].
- [9] Ozawa, M. Soundness and completeness of quantum root-mean-square errors. *npj Quantum Inf.* **5**, 1 (2019).
- [10] Ozawa, M. Universally valid reformulation of the Heisenberg uncertainty principle on noise and disturbance in measurement. *Phys. Rev. A* **67**, 042105 (2003).
- [11] Ozawa, M. Uncertainty principle for quantum instruments and computing. *Int. J. Quant. Inf.* **1**, 569–588 (2003).
- [12] Branciard, C. Error-tradeoff and error-disturbance relations for incompatible quantum measurements. *Proc. Natl. Acad. Sci. USA* **110**, 6742–6747 (2013).
- [13] Sponar, S., Danner, A., Ozawa, M. & Hasegawa, Y. Neutron optical test of completeness of quantum root-mean-square errors. *npj Quantum Inf.* **7**, 106 (2021).

1次元スプリットステップ量子ウォークの Witten index

Wada Kazuyuki

National Institute of Technology, Hachinohe College, Japan

(joint work with Yasumichi Matsuzawa, Akito Suzuki

Yohei Tanaka, Noriaki Teranishi)

1. はじめに

本稿は2022年7月に開催された「時間・量子測定・準古典近似の理論と実験～古典論と量子論の境界」において、「1次元スプリットステップ量子ウォークの Witten 指数」のタイトルで発表した内容の解説です。本研究内容は既に2021年度に開催された RIMS 共同研究（公開型）「スペクトル・散乱理論とその周辺」においても発表しており、本研究内容に関する解説は数理解析研究所 (RIMS) が発行する講究録にて公表予定です。その解説では本研究の背景や、証明の流れの大まかな全体像をまとめてあります。そこで本稿では重きを変えて、特に4階の差分作用素からスペクトルシフト関数を用いて2つの指数型作用素のトレースの計算を進める所を中心に説明しております。スプリットステップ量子ウォークに関する背景の部分は講究録に譲りたいと思います。

本研究は鈴木章斗氏（信州大学）、田中洋平氏（信州大学）、寺西功哲氏（北海道大学）、松澤泰道氏（信州大学）との共同研究に基づきます。

2. 設定

ここでは、1次元スプリットステップ量子ウォークの数学的な設定について説明します。ヒルベルト空間 \mathcal{X} 上の有界作用素を $\mathcal{B}(\mathcal{X})$ 、シャッテン p クラス作用素を $S_p(\mathcal{X})$ と表記します。特に、 $S_1(\mathcal{X})$ はトレースクラス作用素の全体を表します。更に作用素 A に対して $\sigma(A)$ を A のスペクトルとします。

1次元2状態 SSQW のヒルベルト空間を以下で定めます：

$$(1) \quad \mathcal{H} := l^2(\mathbb{Z}) \oplus l^2(\mathbb{Z}), \quad l^2(\mathbb{Z}) := \left\{ \psi : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C} \mid \sum_{x \in \mathbb{Z}} |\psi(x)|^2 < \infty \right\}.$$

L を $l^2(\mathbb{Z})$ 上の左シフト作用素として定めます：

$$(2) \quad L : l^2(\mathbb{Z}) \rightarrow l^2(\mathbb{Z}), \quad (L\psi)(x) := \psi(x+1), \quad \psi \in l^2(\mathbb{Z}), \quad x \in \mathbb{Z}.$$

a, b, p, q を $l^2(\mathbb{Z})$ 上の掛け算作用素とし、以下の条件を満たすとします。

$$(3) \quad b(x), q(x) \geq 0, \quad a(x)^2 + b(x)^2 = 1, \quad p(x)^2 + q(x)^2 = 1, \quad x \in \mathbb{Z}.$$

以上の準備の下、SSQW の時間発展作用素 U を

$$(4) \quad \begin{cases} U & := \Gamma\Gamma', \\ \Gamma & := \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & L^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p & q \\ q & -p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & L \end{bmatrix}, \quad \Gamma' := \begin{bmatrix} a & b \\ b & -a \end{bmatrix}. \end{cases}$$

で定めます。 Γ と Γ' はユニタリかつ自己共役な作用素です。

Remark 2.1. 時間発展作用素 U に現れる a, b, p, q のうち、 b と q は \mathbb{C} に値を取る掛け算作用素に一般化する事が可能ですが、(3) のように取っても一般性を失わない事は [9] の *Corollary 4.4* のユニタリ同値類の結果によります。

以下に述べるユニタリ作用素のカイラル対称性が本研究における重要な概念です。

Definition 2.1 (Definition 2.1 of [11]). U をヒルベルト空間 \mathcal{X} 上のユニタリ作用素とする。 U がカイラル対称性を持つとは、あるユニタリかつ自己共役な作用素 Γ が存在して、

$$(5) \quad \Gamma U \Gamma = U^*$$

が成立するときをいう。

Remark 2.2. 上の (5) が述べている事は、「 U と U^* はユニタリ同値である」という事です。ここから、「カイラル対称なユニタリ作用素のスペクトルは実軸に関して対称である」という主張が導かれます。

Lemma 2.1 (Lemma 2.2 of [11]). U をヒルベルト空間 \mathcal{X} 上のユニタリ作用素とする。次は同値である。

- (1) U はカイラル対称性を持つ。
- (2) U は二つのユニタリかつ自己共役な作用素の積で表される。

Lemma 2.1 の 2 つ目の条件と, (4) で定義された U の形から U はカイラル対称性を持つ事が分かります.

ここからは U のスペクトルの虚部に着目して, 作用素 Q を

$$(6) \quad Q := \frac{U - U^*}{2i}.$$

と定めます.

Γ を恒等作用素ではないユニタリかつ自己共役な作用素とします. すると $\sigma(\Gamma) = \{1, -1\}$ が分かります. Γ と Q の反可換性から, 一般に Q は

$$(7) \quad Q = \begin{bmatrix} 0 & Q_0^* \\ Q_0 & 0 \end{bmatrix}_{\text{Ker}(\Gamma-1) \oplus \text{Ker}(\Gamma+1)}.$$

の表示を持ちます. しかし, この行列表示は $\text{Ker}(\Gamma - 1) \oplus \text{Ker}(\Gamma + 1)$ 上での表示になっているので, Q_0 の具体的な形は見えません. そこで次の命題を用いて Q_0 の形を明らかにさせます.

Proposition 2.1 (Lemma 3.2 of [14]). \mathcal{H} 上の作用素 ϵ を次で定める:

$$\epsilon := \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & L^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{1+p} & -\sqrt{1-p} \\ \sqrt{1-p} & \sqrt{1+p} \end{bmatrix}.$$

このとき, 次が成り立つ.

$$\epsilon \Gamma \epsilon^* = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}_{l^2(\mathbb{Z}) \oplus l^2(\mathbb{Z})}, \quad \epsilon Q_0 \epsilon^* = \begin{bmatrix} 0 & Q_{\epsilon_0}^* \\ Q_{\epsilon_0} & 0 \end{bmatrix}_{l^2(\mathbb{Z}) \oplus l^2(\mathbb{Z})},$$

ここで, $Q_{\epsilon_0} \in \mathcal{B}(l^2(\mathbb{Z}))$ であり,

$$Q_{\epsilon_0} := \frac{i}{2} \left[\sqrt{1+p} L b \sqrt{1+p} - \sqrt{1-p} b L^* \sqrt{1-p} - q \{a + a(\cdot + 1)\} \right].$$

この命題の証明のポイントは, 「 Γ の対角化を考える」という点です. 萌芽となるアイデアは [13] にて導入されました. Q_{ϵ_0} の表式は直接計算によって導かれます.

本研究の目的はこの Q_{ϵ_0} に対する Witten 指数を明らかにする事です. Q_{ϵ_0} は SSQW のトポロジカルな情報を有する重要な作用素に位置づけられます. 本研究に関する先行研究等については RIMS 講究録に譲ることとします.

3. 主結果

主題となる Witten 指数を以下の式で導入します.

$$(8) \quad w(A) := \lim_{t \rightarrow \infty} \text{ind}_t(A)$$

ただし, $w(A)$ は右辺の極限が存在するときのみ定義します. ここで,

$$(9) \quad \text{ind}_t(A) := \text{Tr}(e^{-tA^*A} - e^{-tAA^*}),$$

であり, $\text{Tr}(\cdot)$ はトレースを表します. 主結果を述べるにあたり, 以下の条件を課します.

Assumption 3.1. 8つの実数 $a_{\pm}, p_{\pm}, b_{\pm}, q_{\pm}$ が存在して,

$$\begin{aligned} a_{\pm} &:= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} a(x) \in [-1, 1], & p_{\pm} &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} p(x) \in [-1, 1], \\ b_{\pm} &:= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} b(x) \in [0, 1], & q_{\pm} &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} q(x) \in [0, 1]. \end{aligned}$$

が成り立つ. 更に, 次の条件が成り立つ.

$$\begin{aligned} \sum_{x \geq 0} [|a(x) - a_+| + |a(-x-1) - a_-|] < \infty, & \quad \sum_{x \geq 0} [|p(x) - p_+| + |p(-x-1) - p_-|] < \infty, \\ \sum_{x \geq 0} [|b(x) - b_+| + |b(-x-1) - b_-|] < \infty, & \quad \sum_{x \geq 0} [|q(x) - q_+| + |q(-x-1) - q_-|] < \infty. \end{aligned}$$

sgn を以下で定義される符号関数とします:

$$\text{sgn}(x) := \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$$

本研究の主結果は以下の通りです.

Theorem 3.1. *Assumption 3.1* の下, 次の公式が成り立つ:

$$(10) \quad w(Q_{\epsilon_0}) = W(a_+, p_+) - W(a_-, p_-),$$

ここで $W : [-1, 1] \times [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ であり,

$$W(r, s) := \begin{cases} 0 & |r| = |s| = 1 \\ [\text{sgn}(r+s) - \text{sgn}(r-s)]/2 & \text{otherwise} \end{cases}.$$

- Remark 3.1.** (1) 講演での主定理は、この *Remark* の (2), (3) で述べる公式の形で説明をしました。研究会修了後、松澤泰道氏によるアドバイスにより、上記の通りに一本化できる事が判明しました。上記公式は Q_{ϵ_0} がフレドホルムの場合・非フレドホルムの場合をいずれも含んだ公式となっております。なお、[2] で紹介されている 1次元 *Dirac* 作用素の *Witten* 指数の例においても、符号関数 sgn を用いた表記で *Witten* 指数が与えられています。*Dirac* 方程式と量子ウォークの関係性は連続極限の視点による結果 [7] があります。上記の公式も *Dirac* 作用素と量子ウォークの関係性を反映している公式と思えます。
- (2) Q_{ϵ_0} がフレドホルムの場合の *Witten* 指数をここで言及します。Assumption 3.1 の下、 Q_{ϵ_0} がフレドホルムである必要十分条件は $|p_+| \neq |a_+|$ かつ $|p_-| \neq |a_-|$ です。このとき、次の公式が成り立ちます。

$$w(Q_{\epsilon_0}) = \begin{cases} \text{sgn}(p_+) - \text{sgn}(p_-) & |p_+| > |a_+|, |p_-| > |a_-|, \\ \text{sgn}(p_+) & |p_+| > |a_+|, |p_-| < |a_-|, \\ -\text{sgn}(p_-) & |p_+| < |a_+|, |p_-| > |a_-|, \\ 0 & |p_+| < |a_+|, |p_-| < |a_-| \end{cases}$$

ここから特に、 $w(Q_{\epsilon_0})$ は $-2, -1, 0, 1, 2$ の値を取る事が分かります。

- (3) Q_{ϵ_0} が非フレドホルムの場合の *Witten* 指数をここで言及します。Assumption 3.1 の下、 Q_{ϵ_0} がフレドホルムでない必要十分条件は次の 3つのうち 1つが成り立つ事です。

- (a) $|a_+| = |p_+|$ かつ $|a_-| \neq |p_-|$,
- (b) $|a_+| \neq |p_+|$ かつ $|a_-| = |p_-|$,
- (c) $|a_+| = |p_+|$ かつ $|a_-| = |p_-|$.

χ を开区間 $(0, 1)$ の定義関数とします。それぞれの場合について、次の公式が成り立ちます。

- (a) $|a_+| = |p_+|$ かつ $|a_-| \neq |p_-|$

$$w(Q_{\epsilon_0}) = \begin{cases} \frac{\chi(p_+) - \chi(-p_+)}{2} - 1, & |a_-| < p_-, \\ \frac{\chi(p_+) - \chi(-p_+)}{2} + 0, & |p_-| < |a_-|, \\ \frac{\chi(p_+) - \chi(-p_+)}{2} + 1, & |a_-| < -p_-. \end{cases}$$

(b) $|a_+| \neq |p_+|$ かつ $|a_-| = |p_-|$

$$w(Q_{e_0}) = \begin{cases} 1 - \frac{\chi(p_-) - \chi(-p_-)}{2}, & |a_+| < p_+, \\ 0 - \frac{\chi(p_-) - \chi(-p_-)}{2}, & |p_+| < |a_+|, \\ -1 - \frac{\chi(p_-) - \chi(-p_-)}{2}, & |a_+| < -p_-. \end{cases}$$

(c) $|a_+| = |p_+|$ かつ $|a_-| = |p_-|$

$$w(Q_{e_0}) = \frac{\chi(p_+) - \chi(-p_+)}{2} - \frac{\chi(p_-) - \chi(-p_-)}{2}.$$

ここから特に、 $w(Q_{e_0})$ は $-3/2, -1, -1/2, 0, 1/2, 1, 3/2$ の値を取る事が分かります。

4. 4階の差分作用素のSSFとPD

非フレドホルムの場合のWitten指数の導出が非自明なので、以下では常に $|a_{\pm}| = |p_{\pm}|$ (非フレドホルムになる条件) を仮定します。

半直線上のヒルベルト空間 $l^2(\mathbb{Z}_{\geq 0})$ を導入し、 $\{\delta_x\}_{x \geq 0}$ を $l^2(\mathbb{Z}_{\geq 0})$ 上の完全正規直交系とします。 v を右シフト作用素とし、 $\Omega_0 := |\delta\rangle\langle\delta_0|$ と定めます。次が成り立ちます。

$$(11) \quad v\delta_x = \delta_{x+1}, \quad v^*v = 1, \quad vv^* = 1 - \Omega_0.$$

$w(Q_{e_0})$ を求める為には、以下の2つの自己共役作用素のペアを考える事に帰着されます。

$$(12) \quad T(P) := \left\{ (v + v^*) - \frac{2P^2}{1 - P^2} \right\}^2 + \frac{2}{1 - P^2} \Omega_0,$$

$$(13) \quad T_0(P) := \left\{ (v + v^*) - \frac{2P^2}{1 - P^2} \right\}^2, \quad -1 < P < 1.$$

これら二つの作用素を導入する事で、Witten指数の導出は

$$\mathrm{Tr}(e^{t\alpha_P T(P)} - e^{t\alpha_P T_0(P)}), \quad \alpha_P := \frac{(1 - P^2)^2}{4}.$$

の計算に帰着されます。

さて、指数関数型の作用素の差のトレースを計算するに「スペクトルシフト関数(SSF)」を導入します。

$$(14) \quad \xi(x) := \frac{1}{\pi} \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \mathrm{Arg} \Delta_{T(P)/T_0(P)}(x + i\epsilon), \quad x \in \mathbb{R},$$

ここで、 Arg は $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ に対して $\text{Arg}(z) \in (-\pi, \pi]$ となる偏角とします。また、 $\Delta_{T(P)/T_0(P)}(\cdot)$ は $(T(P), T_0(P))$ のペアに対する Perturbation Determinant (PD) であり、

$$(15) \quad \Delta_{T(P)/T_0(P)}(z) := \det((T(P) - z)(T_0(P) - z)^{-1})$$

$$(16) \quad = 1 + \frac{2}{1 - P} \langle \delta_0, (T_0(P) - z)^{-1} \delta_0 \rangle, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}.$$

で定義されます。SSF や PD については [12] の 9 章を参照されるとよいです。SSF を用いる事で

$$\text{Tr}(e^{t\alpha_P T(P)} - e^{t\alpha_P T_0(P)}) = \int_{\mathbb{R}} (e^{t\alpha_P x})' \xi(x) dx$$

のようにトレースを積分表示することができ、計算が可能となります。

SSF を明らかにするために、PD を明らかにする必要があります。しかし $T_0(P)$ は 4 階の差分作用素で、PD には $T_0(P)$ のレゾルベントが入っているので、PD の形は大変複雑であると推測されます。しかし、因数分解と部分分数分解を用いる事で、PD を 2 階の差分作用素の場合に帰着できます。

Lemma 4.1. 任意の $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ に対し、

$$\Delta_{T/T_0}(z) = 1 + \frac{H(\tau_+(z)) - H(\tau_-(z))}{(1 - P)\sqrt{z}}, \quad \tau_{\pm} := 2m_P \pm \sqrt{z}, \quad m_P := \frac{P^2}{1 - P^2}$$

ここで複素数の平方根は主値で定めるものとし、 $H(z)$ は以下のものである。

$$H(z) := \frac{\sqrt{\frac{z-2}{z+2}} - 1}{\sqrt{\frac{z-2}{z+2}} + 1} = \frac{1}{2\pi} \int_{-2}^2 \frac{\sqrt{4-t^2}}{t-z} dt, \quad z \in \mathbb{C} \setminus [-2, 2].$$

Remark 4.1. 上の Lemma 4.1 で登場した $H(z)$ は二次方程式 $w^2 + zw + 1 = 0$ ($z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$) の解である。 $H(z)$ の詳しい性質は [2] の Appendix C を参照されたい。

Proof. $v+v^*$ のスペクトル分解を用いる。あるユニタリ作用素 $u : \ell^2(\mathbb{Z}_{\geq 0}) \rightarrow L^2((-2, 2), dt)$ が存在して、

$$u(v + v^*)u^{-1} = M_t, \quad (u\delta_0)(t) = \frac{(4 - t^2)^{\frac{1}{4}}}{\sqrt{2\pi}}$$

が成り立つ。ここで、 M_t は t による掛け算作用素である ([10] の Appendix B を参照)。この結果を用いると、

$$\begin{aligned}
\Delta_{T/T_0}(z) &= 1 + \frac{2}{1-P} \langle \delta_0, (T_0 - z)^{-1} \delta_0 \rangle \\
&= 1 + \frac{2}{1-P} \int_{-2}^2 \frac{\sqrt{4-t^2}}{2\pi} \frac{1}{(t-2m_P)^2 - z} dt \\
&= 1 + \frac{2}{1-P} \int_{-2}^2 \frac{\sqrt{4-t^2}}{2\pi} \frac{1}{(t-2m_P - \sqrt{z})(t-2m_P + \sqrt{z})} dt \\
&= 1 + \frac{1}{(1-P)\sqrt{z}} \int_{-2}^2 \frac{\sqrt{4-t^2}}{2\pi} \left[\frac{1}{t-2m_P - \sqrt{z}} - \frac{1}{t-2m_P + \sqrt{z}} \right] dt \\
&= 1 + \frac{H(\tau_+(z)) - H(\tau_-(z))}{(1-P)\sqrt{z}}.
\end{aligned}$$

ここで、2行目から3行目に移る際に因数分解「 $A^2 - B^2 = (A+B)(A-B)$ 」を用い、3行目から4行目に移る際に部分分数分解を用いた。□

この後は $z = x + i\epsilon$ として、 $\epsilon \rightarrow +0$ の極限を取っていきます。 $H(x + i\epsilon)$ の極限は

$$(17) \quad \lim_{\epsilon \rightarrow +0} H(x \pm i\epsilon) = \begin{cases} \frac{-x - \sqrt{x^2 - 4}}{2}, & x < -2, \\ \frac{-x \pm i\sqrt{4 - x^2}}{2}, & -2 < x < 2, \\ \frac{-x + \sqrt{x^2 - 4}}{2}, & x > 2 \end{cases}$$

と ± 2 を境目に値が変わるので、 $\tau_{\pm}(x)$ がいつ $\tau_{\pm}(x) < -2$, $-2 < \tau_{\pm}(x) < 2$, $\tau_{\pm}(x) > 2$ を満たすかを調べる必要があります。このとき、 P の値によっても範囲が変わる事に注意が必要です。

結果として以下の主張が得られます。

Lemma 4.2. P は $-1 < P < 1$ を満たすとす。この時、以下が成り立つ。

(1) $0 \leq |P| < 1/\sqrt{2}$ のとき

$$\begin{cases} |\tau_+(x)| < 2, & |\tau_-(x)| < 2, & \text{if } 0 < x < 4(1 - m_P)^2, \\ \tau_+(x) > 2, & |\tau_-(x)| < 2, & \text{if } 4(1 - m_P)^2 < x < 4(1 + m_P)^2, \\ \tau_+(x) > 2, & \tau_-(x) < -2, & \text{if } 4(1 + m_P)^2 < x. \end{cases}$$

(2) $|P| = 1/\sqrt{2}$ のとき

$$\begin{cases} \tau_+(x) > 2, & |\tau_-(x)| < 2, & \text{if } 0 < x < 16, \\ \tau_+(x) > 2, & \tau_-(x) < -2, & \text{if } 16 < x. \end{cases}$$

(3) $1/\sqrt{2} < |P| < 1$ のとき

$$\begin{cases} \tau_+(x) > 2, & \tau_-(x) > 2, & \text{if } 0 < x < 4(m_P - 1)^2, \\ \tau_+(x) > 2, & |\tau_-(x)| < 2, & \text{if } 4(m_P - 1)^2 < x < 4(m_P + 1)^2, \\ \tau_+(x) > 2, & \tau_-(x) < -2, & \text{if } 4(m_P + 1)^2 < x. \end{cases}$$

Remark 4.2. Lemma 4.2において、 P の値を $1/\sqrt{2}$ で区切っている理由は m_P の取りうる値が関係しており、

$$0 \leq m_P < 1 \iff 0 \leq |P| < 1/\sqrt{2}, \quad m_P = 1 \iff |P| = 1/\sqrt{2}, \quad m_P > 1 \iff 1/\sqrt{2} < |P| < 1.$$

の事実に由来する。

Lemma 4.2 と (17) を組み合わせる事により、PD の $\epsilon \rightarrow +0$ の極限を取る事ができます。

Lemma 4.3. 次の等式が成り立つ。

$$(1) \quad 0 \leq |P| < \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

$$\begin{aligned} & \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \Delta_{T/T_0}(x + i\epsilon) \\ &= \begin{cases} \frac{1}{2(1-P)\sqrt{x}} \left[-2P\sqrt{x} + i\sqrt{4 - (2m_P + \sqrt{x})^2} + i\sqrt{4 - (2m_P - \sqrt{x})^2} \right], & 0 < x < 4(1 - m_P)^2, \\ \frac{1}{2(1-P)\sqrt{x}} \left[-2P\sqrt{x} + \sqrt{(2m_P + \sqrt{x})^2 - 4} + i\sqrt{4 - (2m_P - \sqrt{x})^2} \right], & 4(1 - m_P)^2 < x < 4(1 + m_P)^2. \end{cases} \end{aligned}$$

$$(2) \quad |P| = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

$$\lim_{\epsilon \rightarrow +0} \Delta_{T/T_0}(x + i\epsilon) = \frac{1}{2(1-P)\sqrt{x}} \left[-2P\sqrt{x} + \sqrt{4\sqrt{x} + x} + i\sqrt{4\sqrt{x} - x} \right], \quad 0 < x < 16.$$

$$(3) \frac{1}{\sqrt{2}} < |P| < 1.$$

$$\lim_{\epsilon \rightarrow +0} \Delta_{T/T_0}(x + i\epsilon) = \begin{cases} \frac{1}{2(1-P)\sqrt{x}} \left[-2P\sqrt{x} + \sqrt{(2m_P + \sqrt{x})^2 - 4} - \sqrt{(2m_P - \sqrt{x})^2 - 4} + i0 \right], & 0 < x < 4(m_P - 1)^2, \\ \frac{1}{2(1-P)\sqrt{x}} \left[-2P\sqrt{x} + \sqrt{(2m_P + \sqrt{x})^2 - 4} + i\sqrt{4 - (2m_P - \sqrt{x})^2} \right], & 4(m_P - 1)^2 < x < 4(m_P + 1)^2. \end{cases}$$

ここまで来ると、Lemma 4.3 から SSF を導出する事が可能です。SSF は複素数の Argument を用いて定義されていました。そこで次の公式を使います。

$$\text{Arg}(x + iy) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} - \text{Arctan} \frac{x}{y}, & y > 0, \\ 0, & x > 0 \wedge y = 0, \\ \pi, & x < 0 \wedge y = 0, \end{cases} \quad x + iy \in \overline{\mathbb{C}}_+ \setminus \{0\}.$$

$\Delta_{T/T_0}(x + i\epsilon)$ は一般に複素上半平面にいるため、 $\text{Arg}(x + iy) = \text{Arctan}(y/x)$ の公式を採用すると、偏角が $\pi/2$ を境目に式が若干変わってしまうので、具合がよくありません。そこで上記の公式を使っています。

SSF は以下の通りになります。 $0 < x < 4(1 - m_P)^2$ の区間では $\xi(x)$ は非自明な値を取りますが、指数定理には全く影響しないので省略します。指数定理に効いてくるのは $x = 4(1 + m_P)^2$ の境界部分だけなので、そこを含む区間の部分だけを記載します。

$$(1) P = 0.$$

$$\xi(x) = \frac{1}{2}, \quad 0 < x < 4.$$

$$(2) 0 < |P| < \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

$$\xi(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \text{Arctan} \frac{-2P\sqrt{x} + \sqrt{(2m_P + \sqrt{x})^2 - 4}}{\sqrt{4 - (2m_P - \sqrt{x})^2}}, \quad 4(1 - m_P)^2 < x < 4(1 + m_P)^2.$$

$$(3) |P| = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

$$\xi(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \text{Arctan} \frac{-2Px^{1/4} + \sqrt{4 + \sqrt{x}}}{\sqrt{4 - \sqrt{x}}}, \quad 0 < x < 16.$$

$$(4) \quad \frac{1}{\sqrt{2}} < |P| < 1.$$

$$\xi(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \text{Arctan} \frac{-2P\sqrt{x} + \sqrt{(2m_P + \sqrt{x})^2 - 4}}{\sqrt{4 - (2m_P - \sqrt{x})^2}},$$

$$4(1 - m_P)^2 < x < 4(1 + m_P)^2.$$

$x < 0$ と $x > 4(1 + m_P)^2$ では $\xi(x) = 0$ になります. $x < 0$ の場合は, T と T_0 が共に非負の自己共役作用素である事からすぐに分かります. 一方, $x > 4(1 + m_P)^2$ は詳細に Arctan の分子の正負を詳細に調べなければなりません. 次の結果が一つの到達点となります.

Theorem 4.1. 次の公式が成り立つ.

$$(18) \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-t} \text{Tr}(e^{t\alpha_P T(P)} - e^{t\alpha_P T_0(P)}) = \xi(\alpha_P^{-1} - 0) = \begin{cases} 0, & -1 < P < 0, \\ \frac{1}{2}, & 0 \leq P < 1. \end{cases}$$

この結果を用いる事で, Theorem 3.1 を証明する事ができます.

謝辞. 研究集会の講演の機会を頂いた廣島文生氏に感謝申し上げます. 丹田聡氏には, 実験の観点からの貴重なコメントを頂戴しました. 本研究は科学研究費補助金 (21K13846) の助成を受けております.

REFERENCES

- [1] A. Arai, “Analysis on Fock spaces and Mathematical Theory of Quantum Fields”, World Scientific, (2018).
- [2] D. Bollé, F. Gesztesy, H. Grosse, W. Schweiger, B. Simon, Witten index, axial anomaly and Krein’s spectral shift function in supersymmetric quantum mechanics, J. Math. Phys., 28 (1987), pp. 1512-1525.
- [3] T. Fuda, D. Funakawa and A. Suzuki, Localization for a one-dimensional split-step quantum walk with bound states robust against perturbations, J. Math.Phys. **59**, 082201, 2018
- [4] F. Gesztesy and B. Simon, Topological invariance of the Witten index, Journal of Functional Analysis Volume 79, Issue 1, July 1988, Pages 91-102.
- [5] T. Kitagawa, M. S. Rudner, E. Berg, E. Demler, Exploring topological phases with quantum walks, Phys. Rev. A. 82 , 033429, 2010.
- [6] T. Kitagawa, M.A. Broome, A. Fedrizzi, M.S. Rudner, E. Berg, I. Kassal, A. Aspuru-Guzik, E. Demler, A.G. White Observation of topologically protected bound states in photonic quantum walks Nat. Commun., 3 (1) (2012)

- [7] M. Maeda, A. Suzuki, Continuous limits of linear and nonlinear quantum walks, *Reviews in Mathematical Physics* 32No.4, 2050008, 2020.
- [8] Y. Matsuzawa, An index theorem for split-step quantum walks, *Quantum Inf. Process.*, 19(8), 2020.
- [9] Narimatsu, A., Ohno, H. and Wada, K. Unitary equivalence classes of split-step quantum walks. *Quantum Inf Process* 20, 368 (2021). <https://doi.org/10.1007/s11128-021-03323-6>.
- [10] Y. Matsuzawa, A. Suzuki, Y. Tanaka, N. Teranishi and K. Wada, The Witten index for one-dimensional split-step quantum walks under the non-Fredholm condition, arXiv:2111.04108, 2021.
- [11] A. Suzuki, Supersymmetry for chiral symmetric quantum walks, *Quantum Inf. Process.*, 18(12), 2019.
- [12] K. Schmüdgen, *Unbounded Self-adjoint Operators on Hilbert Space*, Graduate Texts in Mathematics, <https://doi.org/10.1007/978-94-007-4753-1>.
- [13] A. Suzuki and Y. Tanaka. The witten index for 1d supersymmetric quantum walks with anisotropic coins. *Quantum Inf. Process.*, 18(12), 2019.
- [14] Y. Tanaka, A Constructive Approach to Topological Invariants for One-dimensional Strictly Local Operators, *Journal of Mathematical Analysis and Applications* Volume 500, Issue 1, 1 August 2021, 125072
- [15] B. Thaller, *The Dirac Equation*, Texts and Monographs in Physics, Springer, Berlin, 1992.

量子密度行列を用いた数値シミュレーションによる ドレスト光子介在物理現象の記述

Suguru Sangu

Advanced Technology R&D Division, Ricoh Co., Ltd., Japan

1. はじめに — ドレスト光子介在物理現象と理論解析手法への期待

ドレスト光子とは、ナノメートル領域に局在する光の粒であり、物質励起やフォノンなど、ナノメートルサイズの物質に付随する環境の影響をまとうことで、あたかも質量をもった粒子のように振る舞う準粒子を意味している。このドレスト光子を介在した幾つかの実験結果は、古典光学から逸脱した／説明のし難い特性を示すことが明らかになっている。例えば、Slide 1 に示すような一般的には発光材料として機能しないとされる間接遷移型半導体である Si 結晶を用いた LED やレーザーの発光現象 [1] や、非磁性体である SiC 結晶において発現する巨大磁気光学効果 [2]、非共鳴光照射時においてのみ発現する選択的的化学エッチングおよび超平滑面形成への応用 [3] などが知られている。これらは、従来光学理論において常識的に扱われる分散関係、すなわちエネルギー保存則と運動量保存則、が破綻することを意味しており、分散曲線におけるシェル（光円錐）の外側にある光子が関与する現象であるため、オフシェル科学として統一的に議論され、理論構築への期待が高まっている。

ドレスト光子を介在した物理現象を理論的または数値的に記述することはオフシェル科学という新しい物理領域を開拓することに加え、新規な駆動原理に基づく光学デバイスの設計技術としても産業的価値が高い。現在実験的に示されているドレスト光子特有の物理現象は、新たな産業領域創出を期待させるものであるが、十分な制御が為されたものとは言えない。光機能の高効率化、小型・機能集積化、波長・偏光・波面などの光学特性制御といった光学機能の最適化に対して具体的な設計手法が確立できていないのが現状であり、解析手段を提供するための研究が精力的に進められている。本稿で取り上げる従来量子場理論をベースとした手法のほか、量子ウォークとドレスト光子の類似性の探求、旧来扱われてきた電界・磁界に変わる新しい物理量（クレブシュ双対場）によるオフシェル領域への理論拡張など、各方面からの理論研究が精力的に進められており、本稿に合わせて参照いただきたい [4, 5, 6, 7] (Slide 2 参照)。

ドレスト光子を議論する際、その特徴的な振る舞いとして、物質境界部や欠陥部への局在現象がよく知られ、理論や数値解析の妥当性の定性的な説明に用いられる。また、上述の光デバイスや光化学反応の例に見られるように、ドレスト光子が存在する場において自律的な構造形成が促されるといふ性質を有している。その他にも、発光現象の時間応答特性に現われる高速なエネルギー移動（パリスティックなエネルギー伝導）の存在が先行的な実験によって確認されている。このような特徴から、ドレスト光子はナノ物質内においてコヒーレンスを保持した量子場としての性質を残しつつ、しかしながら熱浴への散逸を同時に含む系としてモデル化されるべきとの見解に至る。量子確率論的な解釈によれば、調和振動子の高励起状態における境界部へのエネルギー集中（逆正弦法則、量子古典対応）と物質境界部に局在するドレスト光子との類似した関係と見なすことができ、理論モデル構築の一役を担うことが期待されている。

上述の立場にならば、本稿では現在研究開発を進めている量子密度行列を用いたドレスト光子ダイナミクスモデル化手法（数値シミュレーション方法）を概説し、本数

値シミュレーションを用いた上述の Si 発光素子の自律的構造形成の解釈について、研究初期の結果ではあるが得られた知見を紹介したい。

2. ドレスト光子の数値シミュレーション

Slide 3 に、現在検討を進めているドレスト光子系の数値シミュレーションモデルおよび基本概念について説明する。ここでは、テーパー状の構造体を物体の例として用いている。Slide 3 右図は調和振動子のポテンシャルにおける固有状態の空間分布を低励起状態からプロットしたものであり、高い空間周波数の状態ほど端部での存在確率が高くなり、これが古典的な振動子の存在確率と連続的に繋がるという描像をもつ。この端部への空間分布の集中がドレスト光子の局在と同等と見なすことができる。この描像を任意のサイズ、次元を有する系で表現するために、物体を複数の格子点（ノード）でモデル化し、各ノードに補足されたドレスト光子がノード間を距離に対応した相互作用強さでホッピング伝導するという物理描像により、高励起モードが内在する系をモデル化した（Slide 3 左図）。

Slide 4 左図は、ノード間のホッピング伝導を表わす基底状態を例示している。ドレスト光子の時間発展は Liouville 方程式と呼ばれる量子密度行列の（Schrödinger 方程式より導出される）運動方程式に散逸項を近似的に与えた Lindblad 方程式 [8] を用いて記述することができる。この時間発展方程式すなわち量子密度行列の全要素からなる連立微分方程式の数値解を算出することにより、所定時間を経過した後の各基底状態の占有（存在）確率および遷移確率を得る。結果の一例として、Slide 4 の左図に示すような量子密度行列の定常状態のドレスト光子存在確率のマップが得られる。しかしながら、ノードにドレスト光子が束縛された状態を示す基底では、Slide 3 で説明した高励起状態の局在性との対応付けが困難である。そこで、算出された量子密度行列を空間モードで展開する方法を与える。算出された定常状態の空間分布をできる限り少ない準静的な基底状態で表現するために、各ノードにドレスト光子が存在する基底状態により得られた量子密度行列を励起状態について（真空状態を除いて）対角化する行列を用いて、基底変換する。Slide 4 右図は定常状態を真空状態（ドレスト光子 0 個）と励起状態（ドレスト光子 1 個）の状態に分割し、励起状態を対角化行列 \mathbf{P} で表現し、オリジナルの量子密度行列を基底変換する手順を説明している。この基底変換行列 \mathbf{P} を構成する行ベクトルの一部を抽出したカラーマップを Slide 4 右下図に示しており、これらのマップが空間周波数の低い基底から空間周波数の高い基底までを表わす変換後の基底状態に対応している。

ドレスト光子系を駆動する具体的な運動方程式の構成要素①～④について、Slide 5 に説明する。①は前述したノード間のエネルギー移動を表わす相互作用ハミルトニアンであり、相互作用強さを湯川関数で表わし、全ノード間で距離応じた結合があるものとして、数値シミュレーションを行う。（湯川関数の導出については後述する。）②はドレスト光子の生成消滅をコヒーレントに与えるソースであり、電気双極子と同等に生成演算子と消滅演算子でこれを表現する。③は非輻射緩和を表わす項であり、系の端部のみからインコヒーレントなエネルギーの流出を与える。④は輻射緩和を表わす項である。ここで、インデックスの異なる生成消滅演算子の和により散逸が記述されている点に着目して欲しい。これは、反対称な励起成分の散逸を禁止する効果、すなわち電気双極子禁制遷移により自由光子として散逸できるモードが限定されることを意味している。以上の定式化において留意しておきたい点は、使用している生成消滅演算子がドレスト光子自身を意味するものであり、光子、物質励起、フォノンのような従来の光物性理論により扱う素励起の分解はせずに、様々な相互作用の結果を一まとめに捉えたものをドレスト光子と見なしている。換言すると、質量の与え方により物質的に光子的にも見なすことが可能な準粒子として取り扱っており、これがドレスト光子と自由光子を連続的につなぐ役割を果たすと考えている。

2つのノード間のドレスト光子エネルギー移動を湯川関数により与える背景について小林ら [9] の理論を概説する。前述した通り、ドレスト光子は光子と環境（物質励起やフォノン）の相互作用下における物質系内部に留まる混成状態と見なされる。ナノメートル領域（すなわち光の回折限界以下）の光の相互作用ではドレスト光子の空間局在性や時間スケールの短さから、エネルギー保存則および運動量保存則が満たされない仮想状態を介したエネルギーのやり取り、すなわちオフシェル状態を介したエネルギーのやり取りが許容されると考えられる。Slide 6内の数式は、この仮想（中間）状態を介した状態の遷移確率を表わしている。（ただし、一次の摂動近似までを記載している。）本式において、中間状態と始状態または終状態とのエネルギー差を分母にもつ重みの項が現われ、通常は除外される先進ポテンシャルの項を主成分として式展開を行うと、湯川関数で表わされる有限の相互作用距離をもつ成分が導出される。Slide 6は参考文献 [9] にしたがって、一方の物質から励起子ポラリトンを介して他方へ物質励起を移す遷移確率を描画しているが、ドレスト光子を単なる調和振動子と見なす本稿のモデル化手法においては、一方のドレスト光子を他方へ移す状況も同等と見なすことができる。

以上の数値シミュレーションモデルを用い、ドレスト光子の存在確率を量子密度行列の対角成分より抽出した結果を Slide 7 に示す。二次元物質に限定し、光ファイバプロープに見立てたテーパー構造について解析した例である。光ファイバプロープは近接場光学顕微鏡に使用されるものであり、光ファイバのコア領域先端を化学エッチングにより先鋭化することでドレスト光子を局所領域に送り込むドレスト光子生成ツールである。Slide 7 左図は計算に使用した物質系のモデルであり、右図は時間発展の様子をカラーマップとして図示したものである。時間発展の初期状態においてドレスト光子はテーパー構造の斜面を駆け降り、先端部が反射端となることで先端部にドレスト光子のエネルギーが蓄積されていく様子を見て取れる。実験で観測されるような量子性に起因するバリスティックなエネルギー伝導と対称性の乱れた領域へのドレスト光子の局在が確認され、ドレスト光子の数値シミュレータとして、実験状況を定性的に再現していることがわかる。

上述の二次元テーパー構造による定常解から空間モードを算出した（対角行列により基底変換した）結果を Slide 8 に示す。対角化に用いる固有値に対して降順に基底状態を並べて表示している。青枠で示した基底状態は、真空状態と対称性の良い（低い空間周波数の）状態を抽出したものであり、電気双極子による自由光子の放射と同等の空間モードであることがわかる。一方、赤枠で示したモードは、入力端からのドレスト光子の励起を明瞭に示す基底状態と、テーパー構造先端に局在し反対称な振幅をもつ基底状態を表わしている。次に、Slide 9 に示す基底変換後の相互作用ハミルトニアンと量子密度行列から読み取れる状況について説明する。Slide 9 左図の相互作用ハミルトニアンは基底状態（空間モード）間の遷移の起こり易さを表わしており、局在性の強い基底状態の幾つか（ $n = 5, 11$ ）が、選択的に対称性のよい低い空間周波数モード（ $n = 24$ ）と結合する様子を読み取ることができる。一方、局在性の強い基底状態はお互いに結合し、寿命の長い励起状態を形成していることが相互作用ハミルトニアンと量子密度行列の順位から読み取ることができる。このような考察から、局所的な禁制遷移状態から外場へエネルギーを散逸する許容遷移状態へのエネルギーの流れがあることが推察される。

以上のように、本節ではこれまでに研究開発を進めてきた量子密度行列を用いた数値シミュレーションのモデル、運動方程式、駆動機構、基底変換による空間モードの抽出方法、および数値計算例について説明してきた。次節では本数値シミュレーションの応用例として、間接遷移型半導体である Si の発光現象をもたらす欠陥配置について考察し、実験において確認されている物理現象の解釈を試みる。

3. 欠陥配置とドレスト光子の局在および散逸

まず始めに、ドレスト光子の介在による Si 結晶中の B 原子（不純物）の位置決め機構（ドレスト光子フォノン援用アニール）について、先駆的な実験により得られている物理的ないし現象論的な解釈について説明する。本発光デバイスの作製プロセスでは、ドーパントである B 原子を打ち込んだのち、外部より光を照射した環境下で電流を印加し、ジュール熱による B 原子の拡散（アニール）を行う（Slide 10 参照）。B 原子は熱拡散により Si 結晶中を熱拡散するが、光照射環境下では B 原子はドレスト光子を発生する欠陥構造として機能する。B 原子が拡散する際に他の B 原子が近接し所定の距離に収まるとドレスト光子を介在した相互作用が生じ、この不純物原子対がドレスト光子の散逸源となり、熱エネルギーを奪うように機能する。（フォノンを介した相互作用であることが実験的に確かめられているが、本稿の数値シミュレーションモデルではフォノン成分も含めて一つのドレスト光子と見なしていることから、フォノンの効果が顕著に観察できるような可視化は難しい。）したがって、所定の距離において B 原子の熱拡散が抑制され（冷却され）、B 原子（対）がその場に定着する。このようなプロセスがドレスト光子フォノン援用アニールの説明するところである。本プロセスにより作製されたデバイスは驚くべきことに照射光の特性を「転写」することが知られ、光子ブリーディング現象と呼ばれている。Slide 10 右図は、光子ブリーディングの幾つかの例を示しており、Si 結晶による RGB 各波長での LED 発光、SiC 結晶による UV 波長領域への拡張、偏光状態の転写など、従来の結晶のバンドギャップに依存した発光とは異なる数々の興味深い発光現象が確認されている。

上述の実験状況を表現するための数値シミュレーションモデルを Slide 11 に図示する。前節のテイパー構造との一番の差異は不純物の有無である。ノード間のホッピング伝導において、不純物に対応したノードとそれ以外すなわち異種ノードとの結合強さが、同種ノード間の結合強さより弱くなるようにパラメータを設定する。これは、異種原子同士においてエネルギー準位のずれがあり、共鳴的な伝搬が阻害されることを意味している。Slide 11 右図は二次元系のモデルを表わしており、ドレスト光子のコヒーレントな励起が系内に含まれる全ノードから行われ、物体の四辺から非輻射緩和があり、全ノードから輻射緩和がある系となっている。

二次元の計算結果を議論する前に、欠陥構造を含む系におけるドレスト光子の局在現象を定性的に理解するため、一次元系物質の数値シミュレーションを実施した結果を Slides 12-14 に示す。Slide 12 は一次元格子（16 ノード）中に異種ノードが一つ含まれる場合の、ドレスト光子の存在確率を表わしたグラフおよびカラーマップである。不純物が系内に一つある場合、その欠陥位置にドレスト光子が局在する様子を確認できる。Slide 13 も同様に不純物一つを系内に含む場合であるが、異種ノードとの結合強さの比が 0.5 と小さく設定した結果である。このとき、不純物近傍への局在性は弱くなり、結合強さのミスマッチの大きさが局在性の強さと密接に関係にあることがわかる。

次いで、Slide 14 に系内に不純物を二つ有する場合の結果を示す。Slide 14 右図に示すように、不純物間隔をパラメータとして振った場合に、異種ノードに挟まれた背景の（同種）ノードにおいて局在ピークが現われ、異種ノードがあたかも共振器のようにドレスト光子を溜め込み、ドレスト光子のエネルギーを自由光子に変換し外部へ放出している状況とみることができる。この状況は、本節冒頭に述べたドレスト光子フォノン援用アニールのドーパント位置の自律的な決定機構を連想させる。

Slide 14 に示した一次元の欠陥構造とドレスト光子の局在特性の結果を踏まえ、数値シミュレーションモデルを二次元系に拡張した結果について Slide 14 に説明する。左図は幾つかの不純物配置の場合の計算結果をカラーマップで表現したものであり、そのうちの二つの不純物配置について、空間モードを抽出する定常解による基底変換を施した後の基底状態の占有確率を右図に示している。グラフ中の青色の棒グラフとオレンジ

色の棒グラフの違いより読み取れるように、2個の不純物間の距離が小さくなると占有確率が図中の左側にシフトし、局在性の高い基底状態にドレスト光子が集中する様子が確認できる。この二つの不純物間距離とドレスト光子の外部へのエネルギー散逸との関係を調べるため、Slide 16 示すように、ドレスト光子の居心地の良さ (comfortability) を指標に定義しグラフ化した。二次元物質を表わすノード数の少なさから、ややばらつきのある大きな結果ではあるが、横軸の不純物間距離が小さくなるほど、comfortability が低下し、ドレスト光子エネルギーが外部へ散逸しやすくなる様子が確認できる。一次元の場合は欠陥構造で挟まれた位置がドレスト光子の局在位置であったが、二次元の場合にはこの特徴距離の存在は確認できなかった。各種パラメータの設定値にも依存することが想定されるため、この次元による依存性は現時点では明らかにできていない。

これまでの議論はドレスト光子1個が系内に励起された場合の振る舞い、特に局在特性を示したものである。実験結果からの推察では、誘導放出が不純物の位置を固定する冷却機構を担っているとの見解であるが、上述の数値シミュレーションモデルは誘導放出の効果が明に含まれていない。誘導放出の効果を組み入れるために、Slide 17 に示すように、熱浴を外部共振器と見立てて、外場によるドレスト光子の励起 (外場のエネルギー吸収) を表わす項の導入などを検討中であるが、現時点で定性的および定量的な議論には至っておらず、ここでは計算事例の紹介に留めておき、詳細は今後検討を進めていきたい。

以上に述べたように、本節では量子密度行列によるドレスト光子の数値シミュレーションを結晶中の不純物の位置決め機構の説明に用いた適用事例について述べた。一次元および二次元の両方の場合について、二つの不純物ノードが近接した配置において特徴的なドレスト光子の局在が生じ、同時に外場へのエネルギー散逸が強調されている様子が数値シミュレーションにより得られ、実験結果において不純物の冷却が発動する機構を矛盾なく説明できている。

4. 結論

本稿では、現在研究開発を進めているドレスト光子の数値シミュレーション手法を概説するために、第2節において量子密度行列を用い、ドレスト光子介在物理現象を再現するモデル化および定式化について述べ、第3節において間接遷移型半導体における発光現象を説明する不純物の位置決め機構を説明する初歩的な数値シミュレーション事例を紹介した。それぞれについてのまとめを Slide 18 および Slide 19 に示す。Slide 18 に示すように、ドレスト光子を低励起状態から高励起状態までの様々な基底状態が混在する系であると見なし、定常解の対角化行列を用いた基底変換により空間モードに展開する手法により、二次元テーパー構造を例に内在するモードの特徴を顕わにした。その結果、ドレスト光子の高速なエネルギー移動や、局在成分・非局在成分の空間分布について直観的イメージに対応する基底状態を導き出し、またその基底状態の存在確率を算出した。この基底変換による手法は、ドレスト光子を様々な質量をもつ第二のドレスト光子に再定義することに等しく、ドレスト光子から自由光子への変換の様相を説明しているとも言える。本数値シミュレーションの実際の物理現象への適用例に関するまとめが Slide 19 であり、2個の不純物が近接配置した状況においてドレスト光子の局在状態を経て、光エネルギーが系外へ散逸される結果が得られている。これは、ドレスト光子を介在した不純物原子の拡散の抑制 (冷却) 現象を定性的に説明する結果と言える。

ドレスト光子により引き起こされる特異な物理現象は、光電子デバイスのような身近な対象において観測されるエネルギー保存則および運動量保存則の逸脱現象、すなわちオフシェル科学によって説明されるべき現象である。オフシェル科学に属する物理現象を説明する上で、非平衡系、時間発展、不確定性原理、量子古典対応といった

本研究会で取り上げられる数理的対象は必要不可欠な要素となっている。このようにドレスト光子物理が異分野および実験物理との橋渡しとなる興味深い研究題材であることに述べて本稿のまとめとしたい (Slide 20)。

謝辞

本研究は、ドレスト光子研究起点における研究討論の内容の一部をまとめたものです。Slide 21 に記載する関係の方々に深く感謝申し上げます。

REFERENCES

- [1] Motoichi Ohtsu, *Silicon Light-Emitting Diodes and Lasers* (Springer, Berlin, Germany, 2016).
- [2] Naoya Tate, Tadashi Kawazoe, Wataru Nomura and Motoichi Ohtsu, Current-Induced Giant Polarization Rotation Using a ZnO Single Crystal Doped with Nitrogen Ions, *Sci. Rep.* 5 (2015) 12762.
- [3] Takashi Yatsui, Katsuyuki Nobusada, Near-Field Assisted Chemical Reactions and Its Applications, In: Motoichi Ohtsu and Takashi Yatsui (eds) *Progress in Nanophotonics 4. Nano-Optics and Nanophotonics*, (Springer, Cham, 2017) 57–85.
- [4] Leo Matsuoka, Kenta Yuki, Hynek Lavička and Etsuo Segawa, Maze Solving by a Quantum Walk with Sinks and Self-Loops: Numerical Analysis, *Symmetry* 13 (2021) 2263. doi:10.3290/sym13122263
- [5] Hirofumi Sakuma and Izumi Ojima, On the Dressed Photon Constant and Its Implication for a Novel Perspective on Cosmology, *Symmetry* 13 (2021) 593. doi:10.3290/sym13040593
- [6] Hayato Saigo, Category Algebras and States on Categories, *Symmetry* 13 (2021) 1172. doi:10.3290/sym13071172
- [7] Kazuya Okamura, Towards a Measurement Theory for Off-Shell Quantum Fields, *Symmetry* 13 (2021) 1183. doi:10.3290/sym13071183
- [8] Howard J. Carmichael, *Statistical Methods in Quantum Optics 1*, (Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 1999).
- [9] Kiyoshi Kibayashi, Suguru Sangu, Haruhiko Ito and Motoichi Ohtsu, Near-Field Optical Potential for a Neutral Atom, *Phys. Rev. A* 63 (2000) 013806. doi:10.1103/PhysRevA.63.013806

「ドレスト光子」とは？

ドレスト光子が引き起こす不可思議な現象

- 禁制遷移の許容、等方的な材料による光学異方性、解離エネルギー未達の光化学反応 ⇒ 『オフシェル科学』の提唱

ドレスト光子の特徴的な振る舞い

- 非対称性の強い領域(構造端部、原子欠陥位置)における局在
- 自律的な原子配置決定
- 高速応答性(パリストティック伝導、量子性)

2022/7/21(木)-23(土) 九大IMI 研究会『時間・量子測定・準古典近似の理論と実験〜古典論と量子論の境界〜』

SLIDE 1. ドレスト光子が引き起こす特異な物理現象と、ドレスト光子の特徴

ドレスト光子理論、シミュレーション手段の探求

ドレスト光子デバイス設計技術への期待

- 効率を上げたい
- 複数波長を合成したい
- 発光素子を小型化したい
- 波面(位相)を制御したい
- 材料依存 → 光源のカスタムデザイン

ドレスト光子現象をシミュレートする方法

(a)ドレスト光子(粒子)の量子密度行列表記 (b)量子ウォークによる現象論的モデル化 (c)ドレスト光子を含む光学理論の構築

2022/7/21(木)-23(土) 九大IMI 研究会『時間・量子測定・準古典近似の理論と実験〜古典論と量子論の境界〜』

SLIDE 2. ドレスト光子の理論および数値シミュレーション研究への期待

ドレスト光子のモデル

ドレスト光子の特徴的な振る舞い

- 非対称性の強い領域(構造端部、原子欠陥位置)における局在
- 自律的な原子配置決定
- 高速応答性(パリストティック伝導、量子性)

調和振動子の高励起状態

光子、電子励起(励起子)、フォノンの混成状態である「ドレスト光子」を質量をもつ調和振動子と捉え、少数のきれいな基底状態では考えない。

マクロ (波動、質量ゼロ) → ミクロ (粒子的、重い) → 湯川型相互作用 → 近接(コヒーレント/インコヒーレント) → 散逸 (near-field) → 散逸 (far-field, collective)

2022/7/21(木)-23(土) 九大IMI 研究会『時間・量子測定・準古典近似の理論と実験〜古典論と量子論の境界〜』

SLIDE 3. ドレスト光子の特徴を再現する数値シミュレーションモデル

励起状態の表現方法(2段階)

RICOH imagine. change.

- 格子点による基底状態
 - 密度行列 $\rho = \dots$
 - 格子点基底の定常解 $V_{1,2}, V_{1,3}, \dots$
 - ドレスト光子のダイナミクスの記述 \Rightarrow Liouville方程式 \rightarrow Lindblad方程式(散逸の導入)
 - $$\frac{d\hat{\rho}(t)}{dt} = \frac{i}{\hbar} [\hat{\rho}(t), \hat{H}_0 + \hat{H}_{int}] + \mathcal{L}[\hat{\rho}(t)]$$
- 定常状態の対角化による基底状態
 - 密度行列 $\rho = \dots$
 - ODP状態 \rightarrow 1DP状態, 1DP状態 \rightarrow 1DP状態
 - $$\hat{\rho} = \rho_0 + P(P^{-1}\rho_1 P)^{P^{-1}}$$
 - 対角化 $\hat{\rho} = P^{-1}\rho P = \dots$
 - 変換後の基底状態 $V'_{1,2}, \dots$

2022/7/21(木)-23(土) 九大IMI 研究会「時間・量子測定・準古典近似的理論と実験～古典論と量子論の境界～」

SLIDE 4. 量子密度行列によるドレスト光子ダイナミクスの記述と、励起状態の表現方法

運動方程式の構成要素

RICOH imagine. change.

- 格子点間のエネルギー移動
 - $$H_{int} = \sum_{i,j} hV(|r_i - r_j|)(a_i^\dagger a_j + a_i a_j^\dagger)$$
 - $$V(r) = \frac{V_0 e^{-m_{eff}r}}{r}$$
 (湯川関数)
- ドレスト光子の生成/消滅
 - $$H_{exc} = \sum_{i \in \text{edge}} hA(a_i + a_i^\dagger)$$
- ドレスト光子の散逸
 - $$\mathcal{L}^{(nr)}\rho(t) = \frac{\gamma^{(nr)}}{2} \sum_{i,j \in \text{edge}} (2a_i \rho(t) a_j^\dagger - \{a_i^\dagger a_j, \rho(t)\})$$
 - Non-radiative reservoir
- 自由光子場への散逸
 - $$\mathcal{L}^{(r)}\rho(t) = \frac{\gamma^{(r)}}{2} \sum_{i,j} (2a_i \rho(t) a_j^\dagger - \{a_i^\dagger a_j, \rho(t)\})$$
 - Radiative reservoir (free-photon)

2022/7/21(木)-23(土) 九大IMI 研究会「時間・量子測定・準古典近似的理論と実験～古典論と量子論の境界～」

SLIDE 5. 量子密度行列の運動方程式を駆動する構成要素

有効相互作用(湯川相互作用)の導出

RICOH imagine. change.

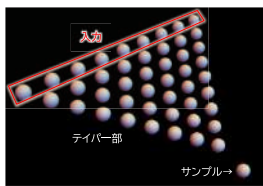
- 励起子ポラリトンを介したナノ物質間のエネルギー移動
 - $$V_{eff} = \langle \Psi_f^p | \hat{V}_{eff} | \Psi_i^p \rangle = \sum_j \langle \Psi_f^p | \rho \hat{V} \rho | \Psi_i^p \rangle \langle \Psi_i^q | \rho \hat{V} \rho | \Psi_f^p \rangle \left(\frac{1}{E_f^p - E_j^q} + \frac{1}{E_j^q - E_i^p} \right)$$
 - 励起子ポラリトンの中継(仮想)状態を介在
 - 始状態: A^*, B
 - 終状態: A, B^*
 - 遅延ポテンシャル: $|A\rangle|B^*\rangle|0\rangle_k, |A\rangle|B\rangle|1\rangle_k, |A^*\rangle|B\rangle|0\rangle_k$
 - 先導ポテンシャル: $|A\rangle|B^*\rangle|0\rangle_k, |A^*\rangle|B\rangle|0\rangle_k$
 - 湯川型相互作用が現れる成分
 - K. Kobayashi et al., PRA63(2000)

2022/7/21(木)-23(土) 九大IMI 研究会「時間・量子測定・準古典近似的理論と実験～古典論と量子論の境界～」

SLIDE 6. ナノ物質間の有効相互作用(湯川相互作用)の導出方法

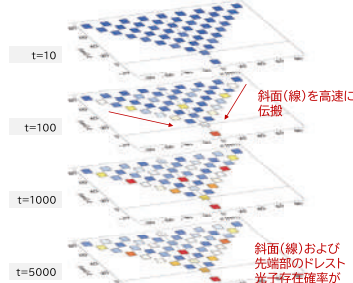
2Dテーパー構造のデモ計算 RICOH
imagine. change.

- シミュレーションモデル
「2Dテーパー構造(ノード数: 46)」



入力
テーパー部
サンプル→

- 計算結果(存在確率の時間発展)



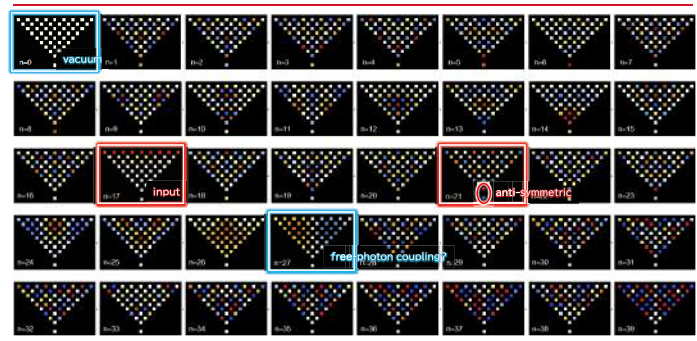
t=10
t=100
t=1000
t=5000

斜面(線)を高速に伝搬
斜面(線)および先端部のドレスト光子存在確率が高くなる。

2022/7/21(木)・23(土) 九次IMI 研究集会「時間・量子測定・準古典近似の理論と実験～古典論と量子論の境界～」 12

SLIDE 7. 二次元テーパー構造の数値シミュレーション結果

定常状態の対角化により得られる基底関数 RICOH
imagine. change.



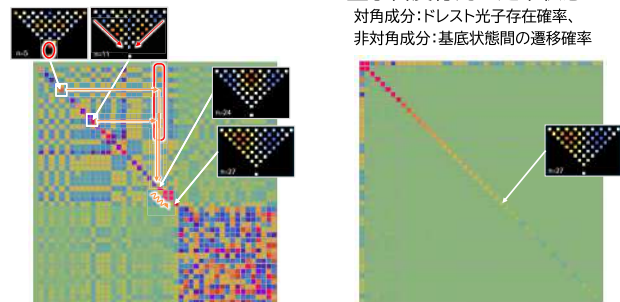
n=0 vacuum
n=17 input
n=21 anti-symmetric
n=27 free photon coupling

2022/7/21(木)・23(土) 九次IMI 研究集会「時間・量子測定・準古典近似の理論と実験～古典論と量子論の境界～」 13

SLIDE 8. 定常状態の対角化により得られる基底関数 (空間モード)

(基底変換後)相互作用ハミルトニアンと状態遷移 RICOH
imagine. change.

- 相互作用ハミルトニアン
- 量子密度行列の定常状態
対角成分: ドレスト光子存在確率、
非対角成分: 基底状態間の遷移確率



2022/7/21(木)・23(土) 九次IMI 研究集会「時間・量子測定・準古典近似の理論と実験～古典論と量子論の境界～」 14

SLIDE 9. 基底変換後の相互作用ハミルトニアンと量子密度行列の定常状態

発光シリコンの自律的構造形成 RICOH
imagine. change.

■ ドレスト光子フォノン(DPP)援用アニール法

■ 光学機能の「転写」!?

RGB波長を用いたDPP援用アニール法によるSi-LED

UV-G波長を用いたDPP援用アニール法によるSiC-LED

田中肇, 「ドレスト光子フォノンを用いた pn 接合 Si 赤外線レーザー」, 東京大学 (2015) 博士論文

M. Ohtsu, OffShell: 1709R.001.v1 (2017)

2022/7/21(木)-23(土) 九大IMI 研究会「時間・量子測定・準古典近似の理論と実験〜古典論と量子論の境界〜」 5

SLIDE 10. ドレスト光子フォノン援用アニール法による B ドープ Si 結晶の自律的構造形成

自律的位置決め機構(シリコン発光の起源)を探る RICOH
imagine. change.

■ ドレスト光子シミュレーションにおける不純物の表現

ノード間の結合強さに不均一さをもたせることで、不純物(欠陥)配置の影響をシミュレートする。結果として、ドレスト光子が自由光子に変換され、系外に放出される。

同種ノード間の結合 異種ノード間の結合

複数の不純物の配置に依存したエネルギー散逸があり、不純物の熱拡散が抑制(冷却)される。

2022/7/21(木)-23(土) 九大IMI 研究会「時間・量子測定・準古典近似の理論と実験〜古典論と量子論の境界〜」 17

SLIDE 11. ドレスト光子フォノンアニール過程の数値シミュレーションモデル

1Dモデル・シミュレーション: 1不純物の場合(1) RICOH
imagine. change.

■ シミュレーションモデル

■ 計算結果

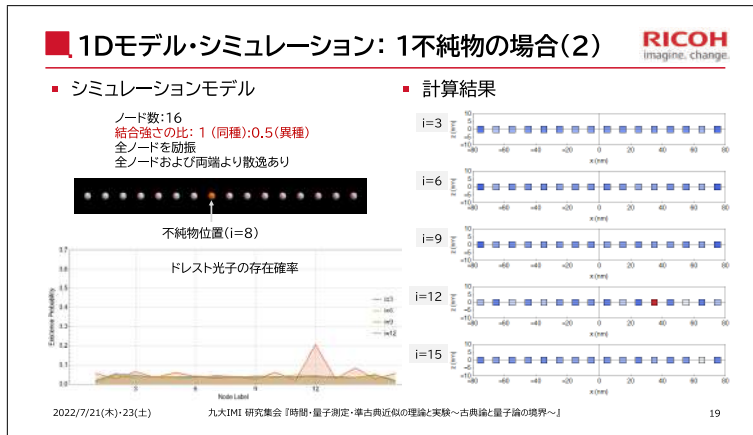
ノード数: 16
結合強さの比: 1 (同種): 0.1 (異種)
全ノードを励振
全ノードおよび両端より散逸あり

不純物位置 (i=8)

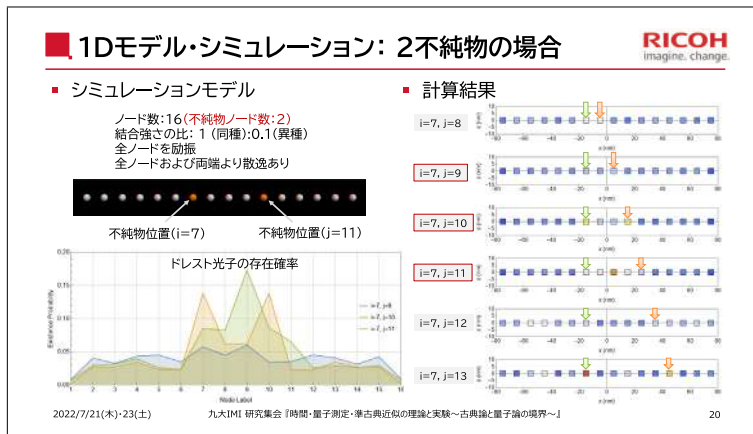
ドレスト光子の存在確率

2022/7/21(木)-23(土) 九大IMI 研究会「時間・量子測定・準古典近似の理論と実験〜古典論と量子論の境界〜」 18

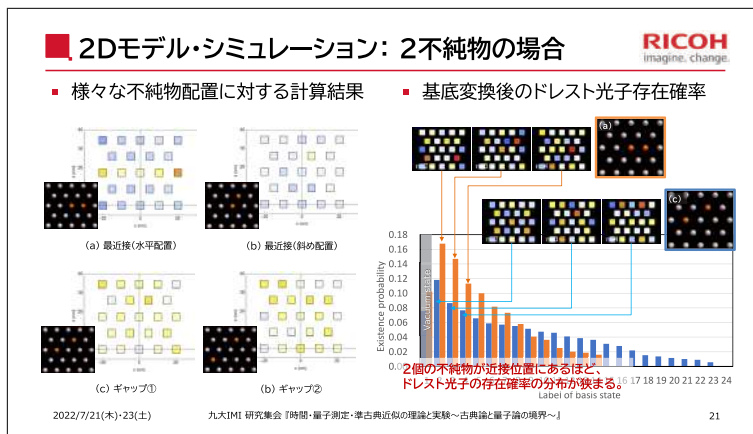
SLIDE 12. 一次元物質による数値シミュレーション結果: 結合強さのミスマッチが大きい場合



SLIDE 13. 一次元物質による数値シミュレーション結果：結合強さのミスマッチが小さい場合



SLIDE 14. 一次元物質による数値シミュレーション結果：2つの不純物を含む場合



SLIDE 15. 二次元物質による数値シミュレーション結果

2つの欠陥の距離とドレスト光子の空間分布 RICOH
imagine. change.

■ ドレスト光子の居心地の良さ

ドレスト光子の真空を除く全ての存在確率(密度行列の対角成分)を足し上げた値

$$(\text{Comfortability}) = \sum_{n=0}^N \rho_{n,n}(t \rightarrow \infty)$$

不純物の距離の近いもほど、システム内に留まるドレスト光子が少ない。つまり、エネルギー散逸が促され(冷却され)、不純物の熱拡散が抑制される傾向を再現している(?)

実際の実験では「誘導放出」が不純物の熱拡散を抑制する主要因と推察されており、本シミュレーションにはその効果が含まれていない。

2022/7/21(木)・23(土) 九大IMI 研究会『時間・量子測定・準古典近似の理論と実験～古典論と量子論の境界～』 22

SLIDE 16. 二次元物質におけるドレスト光子の居心地の良さ

ドレスト光子による誘導放出(モデル化の途中) RICOH
imagine. change.

■ 量子マスター方程式(Lindblad方程式)

$$\frac{d\hat{\rho}(t)}{dt} = \frac{i}{\hbar} \left[\hat{\rho}(t), \hbar \sum_{i,j} V_{ij} (\hat{\gamma}_i - \hat{\gamma}_j) (\hat{A}_i^\dagger \hat{A}_j + \hat{A}_i \hat{A}_j^\dagger) \right]$$

①格子点間(湯川)相互作用

$$+ \frac{i}{\hbar} \left[\hat{\rho}(t), \sum_i \mu_i(t) (\hat{A}_i^\dagger + \hat{A}_i) \right]$$

②外場によるコヒーレント励起

$$+ \frac{\gamma_{\text{ext}}}{2} \sum_{j \in \{\text{edge}\}} \{ 2\hat{A}_j \hat{\rho}(t) \hat{A}_j^\dagger - \hat{A}_j^\dagger \hat{A}_j \hat{\rho}(t) - \hat{\rho}(t) \hat{A}_j^\dagger \hat{A}_j \}$$

③境界部への散逸(Lindblad型)

$$+ \frac{\gamma_c}{2} [1 + n(\omega)] \sum_j \{ 2\hat{A}_j \hat{\rho}(t) \hat{A}_j^\dagger - \hat{A}_j^\dagger \hat{A}_j \hat{\rho}(t) - \hat{\rho}(t) \hat{A}_j^\dagger \hat{A}_j \}$$

④自由光子場へのエネルギー放出(Lindblad型)

$$+ \frac{\gamma_c}{2} n(\omega) \sum_j \{ 2\hat{A}_j^\dagger \hat{\rho}(t) \hat{A}_j - \hat{A}_j \hat{A}_j^\dagger \hat{\rho}(t) - \hat{\rho}(t) \hat{A}_j \hat{A}_j^\dagger \}$$

⑤自由光子場からのエネルギー吸収(Lindblad型)

2022/7/21(木)・23(土) 九大IMI 研究会『時間・量子測定・準古典近似の理論と実験～古典論と量子論の境界～』 23

SLIDE 17. 誘導放出影響を導入したドレスト光子ダイナミクスの記述

まとめ(1) RICOH
imagine. change.

■ ドレスト光子シミュレーションと直観的描像との整合

- ドレスト光子(準粒子)の低励起状態～高励起状態が混在する系を非平衡定常状態の空間分布に基づく基底状態で展開し、基底状態間の相互作用強さを見積った。
- 相互作用の弱い(質量の軽い)基底状態が、自由光子へ変換される描像を提案した。

■ 改めて、ドレスト光子の特徴について


- テイバー境界部等、結合手の少ない領域を高速伝搬する。
⇒ 量子ウォーク・ライクな挙動を連想
- 低い空間周波数をもつ基底状態は他の状態間との相互作用が弱く(質量の軽く)、リザーブ(熱浴)的な役割を果たす。(ドレスト光子は、局在性の強い基底状態に質量を預けて(繰り込んで)、自由光子へ変換され、マクロ系で測定される。)

2022/7/21(木)・23(土) 九大IMI 研究会『時間・量子測定・準古典近似の理論と実験～古典論と量子論の境界～』 15

SLIDE 18. 数値シミュレーション構築に関するまとめ(1)

■ まとめ(2) RICOH
imagine. change.

- シリコン発光の起源である自律的な位置決め機構について、ドレスト光子シミュレーションを適用した。
 - 2個の不純物が近接配置された場合に、関与する基底状態のドレスト光子存在確率が高くなる(確率分布が狭幅化する)。
 - 2個の不純物が近接配置した状況ほど、外場へのエネルギー散逸が大きくなる。



不純物対におけるドレスト光子の集中と、不純物の位置固定する機構を定性的には説明できている。(さらに冷却効率を高める機構が存在していると推察する。)

2022/7/21(木)・23(土) 九大IMI 研究会『時間・量子測定・準古典近似の理論と実験～古典論と量子論の境界～』 24

SLIDE 19. 欠陥構造の自律的位置決め機構の数値シミュレーションに関するまとめ

■ 全体まとめに代えて RICOH
imagine. change.

- 「ドレスト光子」という興味深い研究対象
 - 従来光学の通説を逸脱する現象が『光電子デバイス』という身近な対象において観測される。
 - オフシエル科学(エネルギー非保存、運動量非保存の現象)としての一般化が期待されている。(見えない自由度や環境(リザーバー)が顔を出す機能とは?)
- 本研究会にご参集の皆様の研究領域との接点
 - 非平衡系、時間発展
 - 不確定性原理
 - 量子古典混合系
 - ...

ご清聴ありがとうございました。

2022/7/21(木)・23(土) 九大IMI 研究会『時間・量子測定・準古典近似の理論と実験～古典論と量子論の境界～』 25

SLIDE 20. まとめに代えて

■ 謝辞 RICOH
imagine. change.

★本研究は、ドレスト光子研究起点における研究討論の内容の一部をまとめたものになります。

ドレスト光子の数理モデルや物理的描像に関する先駆的なアドバイスをいただいております、
ドレスト光子研究起点・大津先生、小嶋先生、佐久間様、
長浜バイオ大・西郷先生、名古屋大・岡村先生、
横浜国立大・瀬川先生、広島工大・松岡先生、工学院大・齋藤先生、ミドニー・結城様、
山梨大・坂野先生、
日亜化学・川添様、門脇様
に感謝申し上げます。

★ドレスト光子関連研究は、2017年度より、九州大学IMI「一般研究_研究会」に採択いただいております。

- 2021年度「解析から設計に向けたオフシエル数理科学」【研究代表者:佐久間弘文(一社ドレスト光子研究起点_理事)】
- 2019年度「ドレスト光子に関する数理研究とその応用」
- 2018年度「ドレスト光子に関する基礎的数理研究」
- 2017年度「ドレスト光子の関連技術推進の為に基礎的数理研究」

2022/7/21(木)・23(土) 九大IMI 研究会『時間・量子測定・準古典近似の理論と実験～古典論と量子論の境界～』 2

SLIDE 21. 謝辞

Uncertainty relations studied in neutron optical experiments

Yuji HASEGAWA

Department of Applied Physics, Hokkaido University, Japan

Atominstytut, TU-Wien, Wien, Austria

In his seminal paper, illustrated by the famous γ -ray microscope Gedankenexperiment, Heisenberg introduced the uncertainty principle, which states a lower bound for the product of measurement error and disturbance [1]. The position-momentum uncertainty relation was generally proven by Kennard [2], followed by the generalization by Robertson for the arbitrary pairs of incompatible observables [3]. Extension of the classical notion of root-mean-square (rms) error, which is widely accepted as the standard definition for the mean error of measurement, to quantum measurements is a non-trivial task. Recently, the noise-operator-based quantum-rms error was used to reformulate Heisenberg's error-disturbance relation to be universally valid [4]. The validity of the reformulated relation as well as the violation of the conventional relation was demonstrated first in a neutron optical experiment [5]. Furthermore, the definition of noise-operator-based quantum-rms error is refined and its completeness is experimentally confirmed [6]. Here, I describe recent investigations of uncertainty relations in neutron optical experiments. General description of recent developments of tests of fundamental quantum mechanics and dark interactions with low-energy neutrons are present in a review article [7].

References

- [1] W. Heisenberg, *Z. Phys.* **43**, 172 (1927).
- [2] E. H. Kennard, *Z. Phys.* **44**, 326 (1927).
- [3] H. P. Robertson, *Phys. Rev.* **34**, 163 (1929).
- [4] M. Ozawa, *Ann. Phys.* **311**, 350–416 (2004).
- [5] J. Erhart, S. Sponar, G. Sulyok, G. Badurek, M. Ozawa, and Y. Hasegawa, *Nat. Phys.* **8**, 185 (2012).
- [6] S. Sponar, A. Danner, M. Ozawa and Y. Hasegawa, *npj Quant. Info.*, **7**, 106 (2021).
- [7] S. Sponar, M. Pitschmann, R. Sedmik, H. Abele, and Y. Hasegawa, *Nat. Rev. Phys.* (2021).
<https://doi.org/10.1038/s42254-021-00298-2>

中性子光学実験による基礎量子物理現象の探究

長谷川 祐司

北海道大学・工・応物
Atominsitut, TU-Wien, Austria

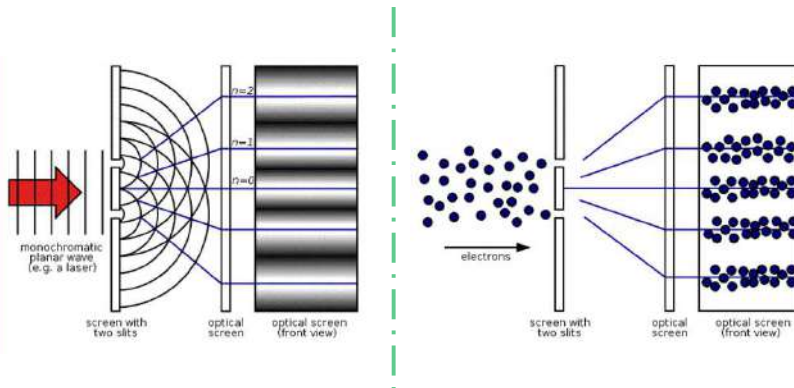
- I. はじめに：中性子干渉計、ポラリメータ
- II. 誤差と擾乱の不確定性関係
- III. 量子チェシヤ猫：粒子とスピンの分離
- IV. まとめ

1



1

Waves in classical- and quantum-mechanics



2

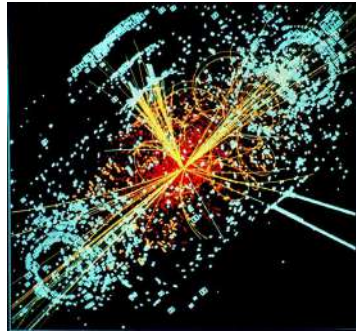


2

Measurements in quantum mechanics 1



Classical apparatus
<continuous „value“>



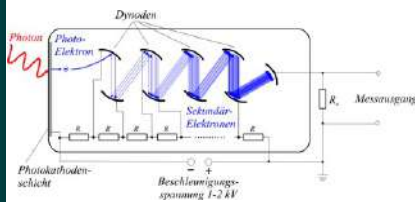
Quantum apparatus
<discrete as particle>

3



3

Measurements in quantum mechanics 2



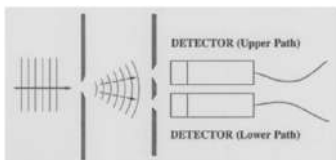
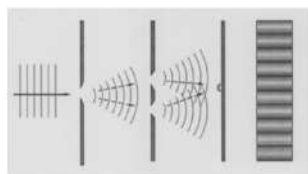
Absorption(demolition) → Amplification → Signal (pulse)

4

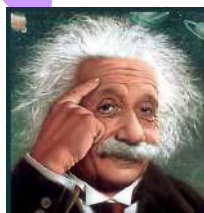


4

Is quantum theory correct? 1



Is the moon there, when nobody looks?



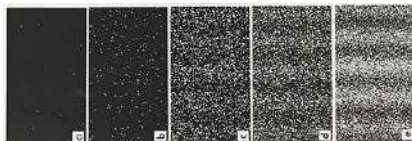
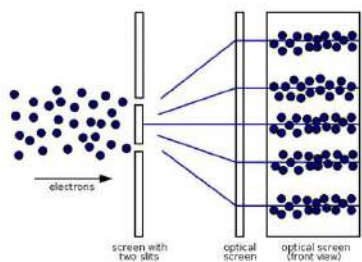
Results depends on how it is measured !!

5

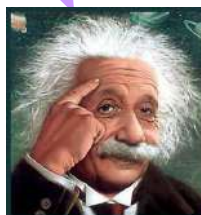


5

Is quantum theory correct? 2



God does not play dice !



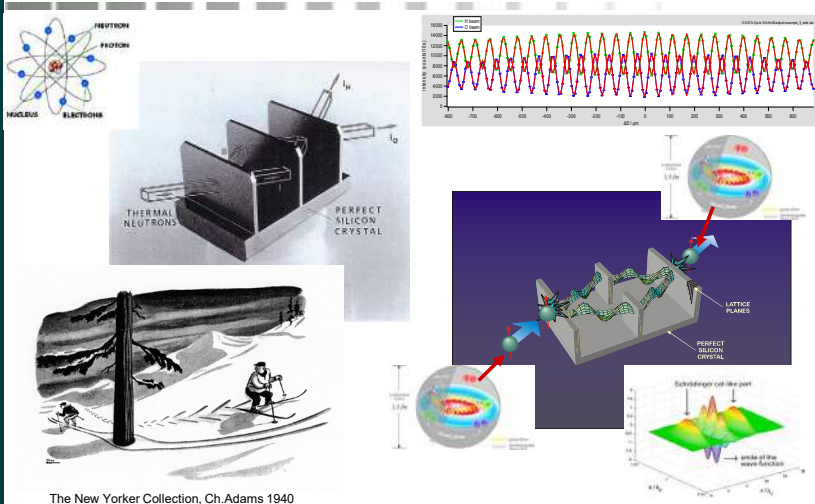
Predictions are always statistical !!

6



6

Neutronen interferometry: quantum skier

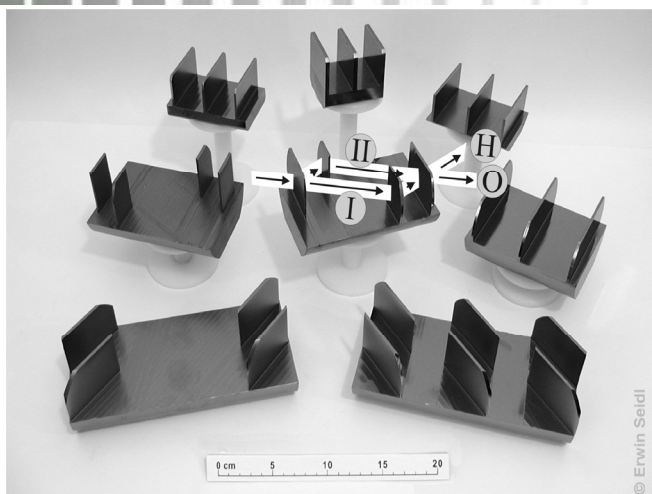


7



7

Neutron interferometer family



8



8

Neutrons in quantum mechanics

Particle and wave properties

$$p = mv = h/\lambda$$

(L. De Broglie)

Schroedinger equation

$$i\hbar \frac{\partial \Psi(\vec{r}, t)}{\partial t} = H\Psi(\vec{r}, t)$$

(E. Schrödinger)

Uncertainty

$$\Delta x \Delta p \geq \hbar/2$$

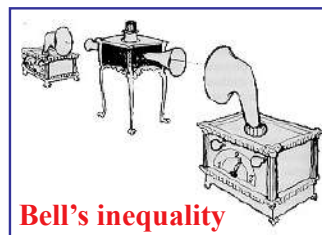
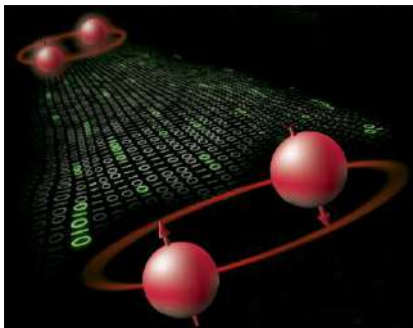
(W. Heisenberg)



9

9

Quantum information technology: entanglement



Bell's inequality



Quantum teleportation

10

10

Bi-partite and tri-partite entanglements

2-Particle Bell-State

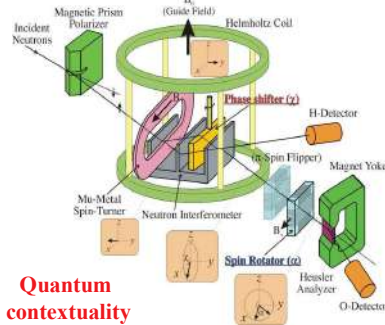
$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \{ |\uparrow\rangle_I \otimes |\downarrow\rangle_{II} + |\downarrow\rangle_I \otimes |\uparrow\rangle_{II} \}$$

2-Space Bell-State

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \{ |\uparrow\rangle_s \otimes |I\rangle_p + |\downarrow\rangle_s \otimes |II\rangle_p \}$$

I, II represent 2-Particles

s, p represent 2-Spaces, e.g., spin & path



Quantum contextuality

Violation of Bell-like inequality

$$S' \equiv E'(\alpha_1, \chi_1) + E'(\alpha_1, \chi_2) - E'(\alpha_2, \chi_1) + E'(\alpha_2, \chi_2) = 2.051 \pm 0.019 > 2$$

Nature2003, NJP2011

Kochen-Specker-like contradiction

$$E_x \cdot E_y = 0.407 \leftarrow \overset{53\%}{\rightarrow} E' = \langle \hat{X}_1 \hat{Y}_2 \cdot \hat{Y}_1 \hat{X}_2 \rangle = -0.861$$

PRL2006/2009

Tri-partite entanglement (GHZ-state)

$$|\Psi_{\text{Neutron}}\rangle = \{ |\Psi_{11}\rangle \otimes |\uparrow\rangle \otimes |\Psi(E_0)\rangle + (e^{i\pi} |\Psi_{11}\rangle) \otimes (e^{i\pi} |\downarrow\rangle) \otimes (e^{i\pi} |\Psi(E_0 + \hbar\omega_s)\rangle) \}$$

$$M_{\text{Measured}} = 2.558 \pm 0.004 > 2$$

PRA2010/NJP2013

11



11



12

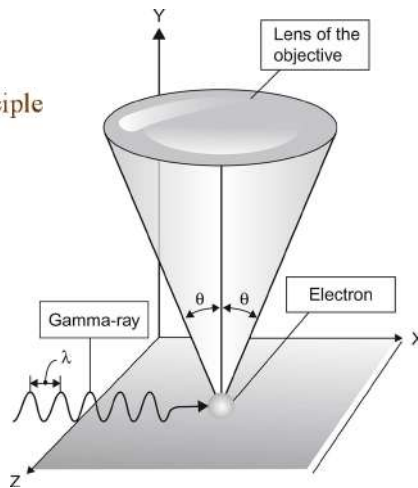
12

Heisenberg's uncertainty relation

Heisenberg's Uncertainty Principle

$$\Delta x \Delta p_x \geq h$$

Change in position *Change in momentum*



13

13

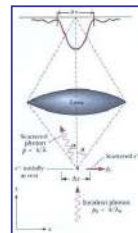
Uncertainty relation: historical 1

- In 1927 Heisenberg postulated an uncertainty principle:

γ -ray thought experiment

$$\rightarrow p_1 q_1 \sim h$$

with q_1 (mean error) & p_1 (discontinuous change)



- \rightarrow in modern treatment for commuting observables:

$$\varepsilon(Q) \eta(P) \geq \frac{\hbar}{2}$$

$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon: \text{error of the first measurement (Q)} \\ \eta: \text{disturbance on the second measurement (P)} \end{array} \right.$

14

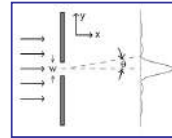
14

Uncertainty relation: historical 2

- Kennard considered the spread of a wave function ψ

$$\sigma(Q)\sigma(P) \geq \frac{\hbar}{2}$$

σ : standard deviations



- Robertson generalized the relation to arbitrary pairs of observables in any states ψ

$$\sigma(A) \sigma(B) \geq \frac{1}{2} |\langle \psi | [A, B] | \psi \rangle|$$

→ dependent on the state but independent of the apparatus

Is $\epsilon(A)\eta(B) \geq \frac{1}{2} |\langle \psi | [A, B] | \psi \rangle|$ generally valid?

15



15

Universally valid uncertainty relation by Ozawa

Definition of error & disturbance:

- Error is defined as the root-mean-square (rms):

$$\epsilon(A) \equiv \langle \psi \otimes \xi | [U^\dagger (I \otimes M) U - A \otimes I]^2 | \psi \otimes \xi \rangle^{1/2}$$

- Disturbance is defined in the same manner:

$$\eta(B) \equiv \langle \psi \otimes \xi | [U^\dagger (B \otimes I) U - B \otimes I]^2 | \psi \otimes \xi \rangle^{1/2}$$

\mathcal{K} : a Hilbert space,
 ξ : a unit vector in \mathcal{K} ,
 U : a unitary operator on $\mathcal{H} \otimes \mathcal{K}$,
 M : a self-adjoint operator on \mathcal{K}

$$\epsilon(A)\eta(B) + \epsilon(A)\sigma(B) + \sigma(A)\eta(B) \geq \frac{1}{2} |\langle \psi | [A, B] | \psi \rangle|$$

$\left\{ \begin{array}{l} \epsilon : \text{error of the first measurement (A)} \\ \eta : \text{disturbance on the second measurement (B)} \\ \sigma : \text{standard deviations} \end{array} \right.$

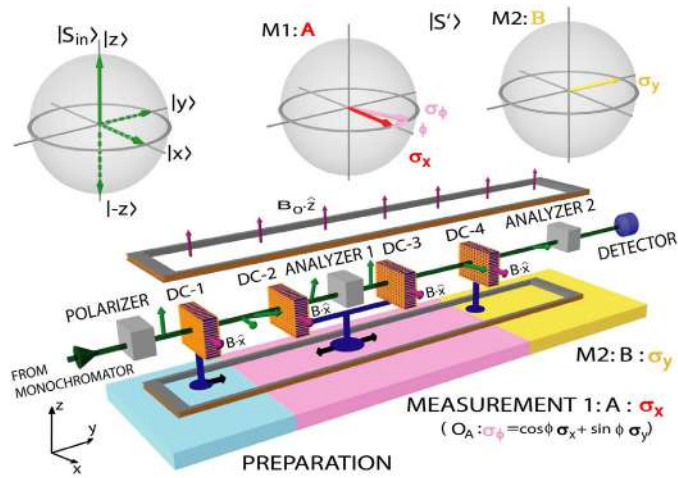
M. Ozawa, PRA 67, 042105 (2003).

16



16

Experimental setup

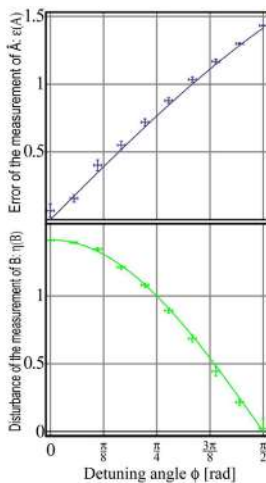


17

17



Results: error-disturbance trade-off



$$|\psi_i\rangle = |+z\rangle$$

$$\hat{A} = \hat{\sigma}_x \quad \hat{O}_A = \hat{\sigma}_\phi = \cos(\phi)\hat{\sigma}_x + \sin(\phi)\hat{\sigma}_y$$

$$\hat{B} = \hat{\sigma}_y$$

$$\begin{aligned} \epsilon(A)^2 = & \langle \psi | A^2 | \psi \rangle + \langle \psi | O_A^2 | \psi \rangle + \langle \psi | O_A | \psi \rangle \\ & + \langle A\psi | O_A | A\psi \rangle - \langle (A+I)\psi | O_A | (A+I)\psi \rangle \end{aligned}$$

$$|\psi\rangle = |+z\rangle$$

$$|\psi\rangle = |+z\rangle$$

$$|A\psi\rangle = |-z\rangle$$

$$|B\psi\rangle = |-z\rangle$$

$$|(A+I)\psi\rangle = |+x\rangle$$

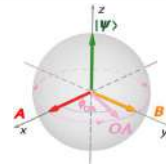
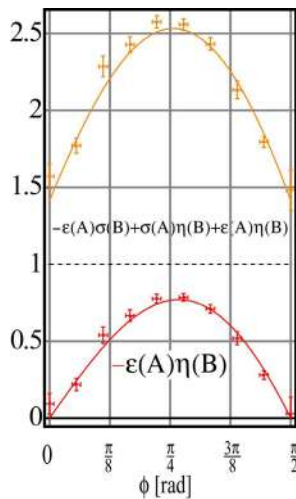
$$|(B+I)\psi\rangle = |+y\rangle$$

18

18



Results: new/old uncertainty relation



New uncertainty principle

ε : error of the first measurement (A)
 η : disturbance on the second measurement (B)
 σ : standard deviations

Heisenberg product

J. Erhart, Nature Phys. 8, 185-189 (2012)



19

19

Publications by other groups

PRL 109, 100404 (2012) PHYSICAL REVIEW LETTERS week ending 7 SEPTEMBER 2012

Violation of Heisenberg's Measurement-Disturbance Relationship by Weak Measurements

Lee A. Rozema, Ardavan Darabi, Dylan H. Mahler, Alex Hayat, Yasaman Soudagar, and Acphraim M. Steinberg

PRL 110, 220402 (2013) PHYSICAL REVIEW LETTERS week ending 31 MAY 2013

Experimental Test of Universal Complementarity Relations

(a) Morgan M. Weston, Michael J. W. Hall, Matthew S. Palsson, Howard M. Wiseman, and **ArXiv: 1304.2071**

(b) **How well can one jointly measure two incompatible observables on a given quantum state?**

Centre for Quantum
(Recent)
Com
measur
princip
photon
inaccur
DOE

Cyril Branciard
Centre for Engineered Quantum Systems and School of Mathematics
The University of Queensland, St. Lucia
(Dated: April 9, 2013)

Heisenberg's uncertainty principle is one of the main tenets of fundamental importance for our understanding of quantum foundations. Although Heisenberg's first argument was that the state necessarily disturbs another incompatible observable, since indeterminacy of the outcomes when either one or the other observable is measured, Heisenberg's intuition. Even if two incompatible observables still approximate their joint measurement, at the price of introducing measurement error on each of them. We present a new, tight relation between the error on one observable versus the error on the other. As a consequence, we derive a stronger error-disturbance relation for this scenario.

SCIENTIFIC REPORTS

OPEN Experimental violation and reformulation of the Heisenberg's error-disturbance uncertainty relation

By Morgan M. Weston, Michael J. W. Hall, Matthew S. Palsson, Howard M. Wiseman, and Cyril Branciard

Received: 12 February 2013
Accepted: 14 May 2013
Published: 14 May 2013

The uncertainty principle (Heisenberg's) is one of the main tenets of quantum foundations. Although Heisenberg's first argument was that the state necessarily disturbs another incompatible observable, since indeterminacy of the outcomes when either one or the other observable is measured, Heisenberg's intuition. Even if two incompatible observables still approximate their joint measurement, at the price of introducing measurement error on each of them. We present a new, tight relation between the error on one observable versus the error on the other. As a consequence, we derive a stronger error-disturbance relation for this scenario.

20

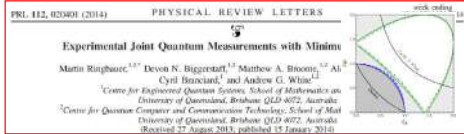
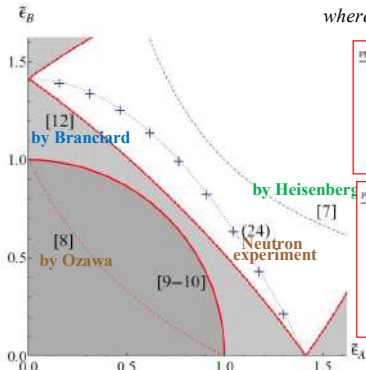


20

Tight relation derived by Branciard

$$\left[2\tilde{\varepsilon}(A)\tilde{\eta}(B)\sqrt{1-C^2} + \tilde{\varepsilon}(A)^2 + \tilde{\eta}(B)^2 \right]^{1/2} \geq C,$$

where $\tilde{\varepsilon} = \varepsilon\sqrt{1-\varepsilon^2}/4$, $\tilde{\eta} = \eta\sqrt{1-\eta^2}/4$, $C \equiv |\langle \psi | [A, B] | \psi \rangle|/2$

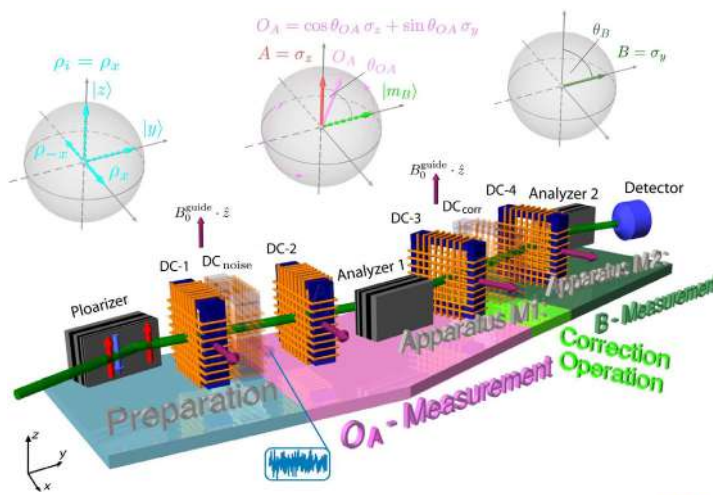


C. Branciard, Proc. Natl. Acad. Sci. U.S.A. **110**, 6742 (2013).

21

21

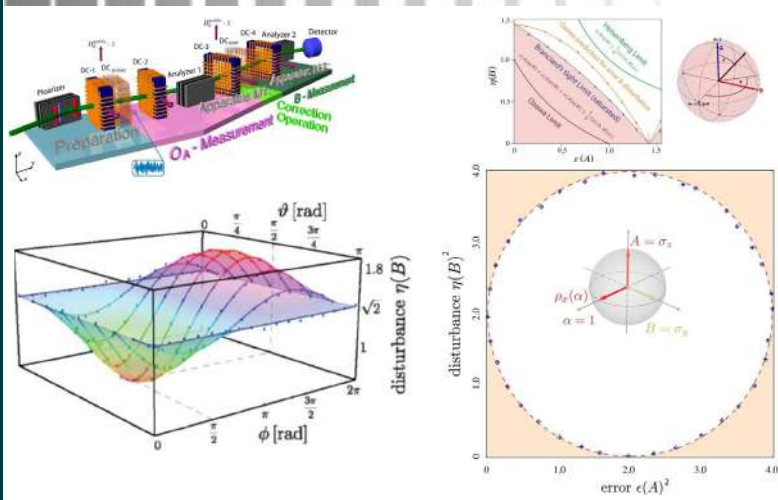
Tight relation: experimental setup



22

22

Tight relation: error-corrections

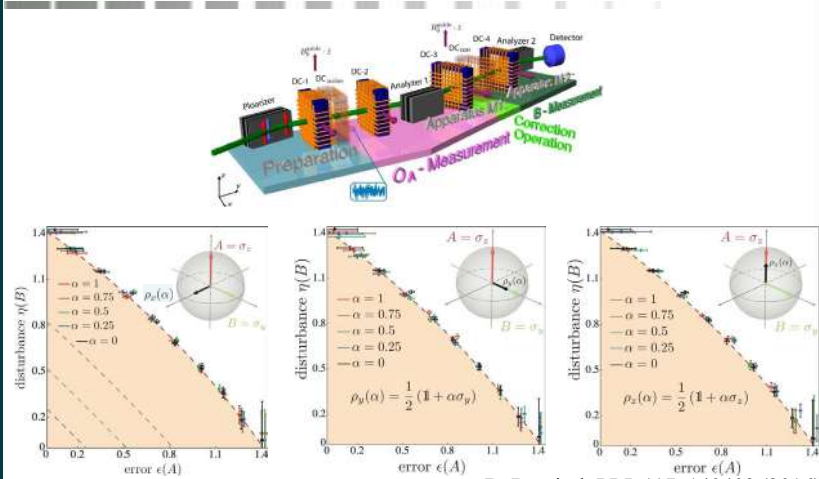


23



23

Tight relation: all mixtures



B. Demirel, PRL 117, 140402 (2016).

24



24

Exploring hidden errors in quantum measurements

Uniform quantum rms (q-rms) error

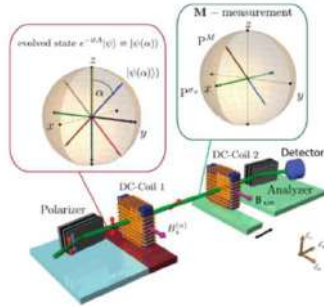
$$\bar{\varepsilon} = \sup_{t \in \mathbb{R}} \varepsilon_{\text{NO}}(A, \Pi, \exp(i t A) |\psi\rangle)$$

where

$$\varepsilon_{\text{NO}}(A, \Pi, |\psi\rangle)^2 = \langle \psi | (A - M)^2 | \psi \rangle + \langle \psi | \cancel{M^{(2)}} - \cancel{M^2} | \psi \rangle$$

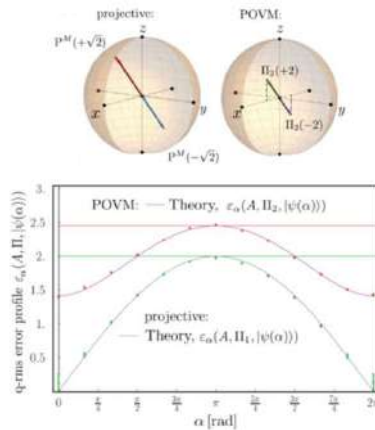
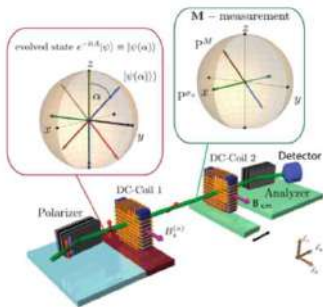
for sharp measurement

- A: observable to be measured
- M = $\sum_x x \Pi(x)$: meter observable
- with POVM Π
- $|\psi\rangle$: state to be measured



S. Sponar, npj Qunat. Inf. 106 (2021).

Exploring hidden errors in quantum measurements



S. Sponar, npj Qunat. Inf. 106 (2021).

Concluding remarks

Neutron polarimeter and interferometer are effective tools for investigations of foundation of quantum mechanics.

- **Uncertainty relation is studied in neutron's successive spin measurement.**
remark: error and disturbance are experimentally determined
- **Quantum Cheshire-Cat was observed in neutron interferometer**
remark: weak value as a measure of "effectiveness"

39



39

Fin!

40



40

Time operators associated with harmonic oscillators

Fumio Hiroshima

Faculty of Mathematics, Kyushu University, Japan

(joint work with Noriaki Teranishi)

A time operator \hat{T}_ϵ of the one-dimensional harmonic oscillator

$$\hat{h}_\epsilon = \frac{1}{2}(p^2 + \epsilon q^2)$$

is rigorously constructed. It is formally expressed as

$$\hat{T}_\epsilon = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{\epsilon}} (\arctan \sqrt{\epsilon} \hat{t} + \arctan \sqrt{\epsilon} \hat{t}^*)$$

with $\hat{t} = p^{-1}q$. It is shown that the canonical commutation relation $[h_\epsilon, \hat{T}_\epsilon] = -i\mathbb{1}$ holds true on a dense domain in the sense of sesqui-linear form, and the limit of \hat{T}_ϵ as $\epsilon \rightarrow 0$ is shown. Finally a matrix representation of \hat{T}_ϵ and its analytic continuation are given.

Time operators associated with harmonic oscillators

Fumio Hiroshima¹ and Noriaki Teranishi²

THEORY AND EXPERIMENT FOR TIME, QUANTUM
MEASUREMENT AND SEMICLASSICAL APPROXIMATION
-INTERFACE BETWEEN CLASSICAL AND QUANTUM THEORY-

Joint Research Center for Advanced and
Fundamental Mathematics-for-Industry

October 5, 2022

¹Faculty of Mathematics, Kyushu University

²Faculty of Science, Hokkaido University



Definition of time operators

Let $[A, B]$ be the commutator of linear operators A and B defined by

$$[A, B] = AB - BA.$$

If a self-adjoint operator A in Hilbert space \mathcal{H} admits a symmetric operator B satisfying CCR:

$$[A, B] = -i\mathbb{1}$$

on a non-zero subspace $D_{A,B} \subset D(AB) \cap D(BA)$, then B is called a **time operator** of A .



Three examples

■ **1. Position-Momentum** Let $p = \frac{1}{i} \frac{d}{dx}$ and $q = M_x$ be the multiplication by x .

$$[p, q] = -i\mathbb{1}$$

■ **2. Number-Phase** Let $a = q + ip$ and $a^* = q - ip$. $N = a^*a$ is called the number operator. $[a, a^*] = \mathbb{1}$. A symmetric operator $\hat{\phi}$ satisfying

$$[N, \hat{\phi}] = -i\mathbb{1}$$

is called a phase operator. *Formally* it is described as

$$\hat{\phi} = \frac{i}{2}(\log a - \log a^*).$$

■ **3. Energy -Time** Let $\hat{h}_0 = \frac{1}{2}p^2$. Let

$$\hat{T}_{AB} = \frac{1}{2}(p^{-1}q + qp^{-1}).$$

\hat{T}_{AB} is called the Aharonov-Bohm operator or time of arrival operator.

$$[\hat{h}_0, \hat{T}_{AB}] = -i\mathbb{1}.$$



Domains problems

■ Let $He_n = E_n e_n$ and $[H, T] = -i\mathbb{1}$. We apply e_n on both sides to result

$$(H - E_n)Te_n = -ie_n$$

and hence

$$0 = (e_n, (H - E_n)Te_n) = -i.$$

This is a contradiction. Thus we can see (1) or (2):

(1) $e_n \notin D(T)$

(2) $e_n \in D(T)$ but $Te_n \notin D(H)$

■ As for time operator, there is a long history of confusion. The origin of this may come from the statement of **W.G. Pauli** made in 1933 that the introduction of a time observable T with a self-adjoint operator H having a discrete eigenvalue is basically forbidden.



Three time operators of 1D harmonic oscillator

■ 1D harmonic oscillator

$$\hat{H}_\varepsilon = \frac{1}{2}(p^2 + \varepsilon q^2) \quad 0 < \varepsilon \leq 1.$$

1. Angle operator [7]: $\theta = \arctan(y/x)$.

$$\hat{T}_\varepsilon = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} (\arctan(\sqrt{\varepsilon} p^{-1} q) + \arctan(\sqrt{\varepsilon} q p^{-1})).$$

2. POVM=Galapon operator [2, 4]: Let P be a positive operator valued measure associated to \hat{H}_ε .

$$T_G = \int_{[0, 2\pi]} tdP_t = i \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m \neq n} \frac{\langle e_m, \cdot \rangle}{m-n} e_n.$$

3. Phase operator [3]: Let a and a^* be the annihilation operator and the creation operator in $L^2(\mathbb{R})$. A phase operator is formally described as

$$\hat{\phi} = \frac{i}{2}(\log a - \log a^*)$$

It is hard to define $\log a^*$ as an operator \implies [6].

Heuristic derivation of angle operator \hat{T}_ε

■ Take momentum representation. $FpF^{-1} = M_k$ and $FqF^{-1} = +i \frac{d}{dk}$. Instead of notations $L^2(\mathbb{R}_k)$, M_k and $-i \frac{d}{dk}$ we denote them as $L^2(\mathbb{R}_x)$, q and p , respectively.

Thus $[p, q] = -i\mathbb{1}$.

■ \hat{H}_ε is transformed to

$$H_\varepsilon = \frac{1}{2}(\varepsilon p^2 + q^2) \quad 0 < \varepsilon \leq 1.$$

We shall construct symmetric operator T_ε such that

$$[H_\varepsilon, T_\varepsilon] = +i\mathbb{1}.$$

■ Let $t = q^{-1}p$ with $D(t) = \{f \in D(p) \mid pf \in D(q^{-1})\}$.

$$[H_\varepsilon, t] = i(\mathbb{1} + \varepsilon t^2) \implies [H_\varepsilon, f(t)] = i(\mathbb{1} + \varepsilon t^2)f'(t) \implies f'(t) = (\mathbb{1} + \varepsilon t^2)^{-1}$$

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \arctan \sqrt{\varepsilon} t.$$

Symmetrizing f , we see that

$$T_\varepsilon = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} (\arctan \sqrt{\varepsilon} t + \arctan \sqrt{\varepsilon} t^*).$$

We rigorously define T_ε by using the Taylor expansion:

$$\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} \quad |x| < 1.$$

Note also that $\arctan x$ can be extended to a function on \mathbb{C} as

$$\arctan z = \frac{i}{2} \log \frac{i+z}{i-z} \quad z \in \mathbb{C} \setminus \{i\}.$$

■ t is unbounded and non-symmetric \implies it is not trivial to define

$$\arctan \sqrt{\varepsilon} t^\# = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} (\sqrt{\varepsilon} t^\#)^{2n+1}, \quad t^\# = t, t^*.$$

If $\sqrt{\varepsilon} t f = i f$, then $f \notin D(\arctan \sqrt{\varepsilon} t)$.

■ It is not trivial to specify a *dense* domain D such that

$$D \subset \bigcap_{n=0}^{\infty} (D(t^n) \cap D((t^*)^n))$$



Spectrum of angle operators

$$S_\varepsilon^\# = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} (\sqrt{\varepsilon} t^\#)^{2n+1},$$

$$D(S_\varepsilon^\#) = \left\{ f \in \bigcap_{n=0}^{\infty} D(t^{\#2n+1}) \mid \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^N \frac{(-1)^n}{2n+1} (\sqrt{\varepsilon} t^\#)^{2n+1} f \text{ exists} \right\}.$$

Formally $S_\varepsilon^\# = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \arctan \sqrt{\varepsilon} t^\#$ and $T_\varepsilon = \frac{1}{2}(S_\varepsilon + S_\varepsilon^*)$.

$$\mathfrak{L}_{\text{even}} = \text{LH}\{e^{-\alpha x^2/(2\sqrt{\varepsilon})} \mid \alpha \in (0, 1)\} \subset L^2_{\text{even}},$$

$$\mathfrak{L}_{\text{odd}} = \text{LH}\{x e^{-\alpha x^2/(2\sqrt{\varepsilon})} \mid \alpha \in (0, 1)\} \subset L^2_{\text{odd}}.$$

■ $\mathfrak{L}_{\text{even}} + \mathfrak{L}_{\text{odd}}$ is dense in $L^2(\mathbb{R})$, and $\mathfrak{L}_{\text{even}} \perp \mathfrak{L}_{\text{odd}}$.

Theorem (Spectrum of $S^\#$)

- (1) $D(S_\varepsilon) \supset \mathfrak{L}_{\text{even}}$ and $D(S_\varepsilon^*) \supset \mathfrak{L}_{\text{odd}}$.
- (2) $i(0, \infty) \subset \text{Spec}_p(S_\varepsilon^\#)$.
- (3) $[H_\varepsilon, S_\varepsilon] = i\mathbb{1}$ on $\mathfrak{L}_{\text{even}}$ and $[H_\varepsilon, S_\varepsilon^*] = i\mathbb{1}$ on $\mathfrak{L}_{\text{odd}}$.



List of problems

1. Ultra-weak time operator $[H_\varepsilon, S_\varepsilon] = i\mathbb{1}$ on $\mathfrak{L}_{\text{even}}$ and $[H_\varepsilon, S_\varepsilon^*] = i\mathbb{1}$ on $\mathfrak{L}_{\text{odd}}$, but $\mathfrak{L}_{\text{even}} \cap \mathfrak{L}_{\text{odd}} = \{0\}$. Define an ultra-weak time operator t_ε :

$$t_\varepsilon[H_\varepsilon\phi, \psi] - t_\varepsilon[H_\varepsilon\psi, \phi]^* = i(\phi, \psi)$$

holds on $\mathfrak{L}_{\text{even}} \oplus \mathfrak{L}_{\text{odd}}$ in the sense of sesqui-linear form.

2. Continuous limit $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} t_\varepsilon = \text{AB-time operator}$.
3. Matrix representation Set $t_{\varepsilon=1} = t$. $t[e_n, e_m]$ for some $\{e_n\}$.
4. Analytic continuation $t[e_n, e_m]$ for $e_n, e_m \in \text{LH}\{x^n e^{+izx^2/2} \mid z \in \mathbb{H} \setminus \{i\}\}$. Here \mathbb{H} denotes the open upper half plane in \mathbb{C} .
5. Positive op-valued measure $t \neq t_G$.



Hierarchy of time operators (abstract theory)[1]

■ Hierarchy of classes of time operators.

$\{\text{ultra-st-time}\} \subset \{\text{st-time}\} \subset \{\text{time}\} \subset \{\text{weak-time}\} \subset \{\text{ultra-weak-time}\}$

■ Let A be a sa operator on \mathcal{H} and D_1 and D_2 be non-zero subspaces of \mathcal{H} .

A sesqui-linear form

$$t_B : D_1 \times D_2 \rightarrow \mathbb{C}, \quad D_1 \times D_2 \ni (\phi, \psi) \mapsto t_B[\phi, \psi] \in \mathbb{C}$$

with domain $D(t_B) = D_1 \times D_2$ is called **an ultra-weak time operator** of A

\iff

$\exists \mathcal{S}, \exists \mathcal{C} \subset D_1 \cap D_2$ such that the following (1)–(3) hold:

- (1) $\mathcal{C} \subset D(A) \cap \mathcal{S}$.
- (2) $t_B[\phi, \psi]^* = t_B[\psi, \phi]$ for all $\phi, \psi \in \mathcal{S}$.
- (3) $A\mathcal{C} \subset D_1$ and, for all $\psi, \phi \in \mathcal{C}$,

$$t_B[A\phi, \psi] - t_B[A\psi, \phi]^* = -i(\phi, \psi).$$



Ultra-weak time operators associated with H_ε

■ We define

$$\begin{aligned} \mathfrak{t}_{\text{even}}[\psi, \phi] &= \frac{1}{2}((\psi, S_\varepsilon \phi) + (S_\varepsilon \psi, \phi)), \quad \psi, \phi \in \mathfrak{L}_{\text{even}}, \\ \mathfrak{t}_{\text{odd}}[\psi, \phi] &= \frac{1}{2}((\psi, S_\varepsilon^* \phi) + (S_\varepsilon^* \psi, \phi)), \quad \psi, \phi \in \mathfrak{L}_{\text{odd}}. \end{aligned}$$

\mathfrak{t}_ε is defined by

$$\mathfrak{t}_\varepsilon = \mathfrak{t}_{\text{even}} \oplus \mathfrak{t}_{\text{odd}}$$

i.e.,

$$\mathfrak{t}_\varepsilon[\psi_{\text{even}} \oplus \psi_{\text{odd}}, \phi_{\text{even}} \oplus \phi_{\text{odd}}] = \mathfrak{t}_{\text{even}}[\psi_{\text{even}}, \phi_{\text{even}}] + \mathfrak{t}_{\text{odd}}[\psi_{\text{odd}}, \phi_{\text{odd}}].$$

Theorem

\mathfrak{t}_ε is an ultra-weak time operator of H_ε .



Continuous limit

- Angle operator: $T_\varepsilon = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} (\arctan(\sqrt{\varepsilon}t) + \arctan(\sqrt{\varepsilon}t^*))$.
- Aharonov-Bohm operator: $T_{AB} = \frac{1}{2}(t + t^*)$
- T_{AB} can be extended to the ultra-weak time operator.

$$\mathfrak{M}_{\text{even}} = \text{LH}\{e^{-\alpha x^2/2} \mid \alpha \in (0, 1)\},$$

$$\mathfrak{M}_{\text{odd}} = \text{LH}\{xe^{-\alpha x^2/2} \mid \alpha \in (0, 1)\}.$$

Let

$$\mathfrak{t}_{AB,0}[\psi, \phi] = \frac{1}{2} \{(\psi, t\phi) + (t\psi, \phi)\} \quad \psi, \phi \in \mathfrak{M}_{\text{even}},$$

$$\mathfrak{t}_{AB,1}[\psi, \phi] = \frac{1}{2} \{(\psi, t^*\phi) + (t^*\psi, \phi)\} \quad \psi, \phi \in \mathfrak{M}_{\text{odd}}.$$

Define \mathfrak{t}_{AB} by $\mathfrak{t}_{AB} = \mathfrak{t}_{AB,0} \oplus \mathfrak{t}_{AB,1}$

Theorem (Continuous limit)

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathfrak{t}_\varepsilon[\psi, \phi] = \mathfrak{t}_{AB}[\psi, \phi] \text{ on } \mathfrak{M}_{\text{even}} \oplus \mathfrak{M}_{\text{odd}}.$$



Matrix representations for $\alpha \in (0, 1)$

We set $t_{\varepsilon=1} = t$, $S_{\varepsilon=1}^{\#} = S^{\#}$ and

$$h_{\alpha} = e^{-\alpha x^2/2}, \quad \alpha \in (0, 1).$$

- What is matrix $(x^a h_{\alpha}, T x^b h_{\alpha})$?
- We want to see the function K_{ab} such that

$$\mathfrak{t}[x^a h_{\alpha}, x^b h_{\alpha}] = (h_{\alpha}, K_{ab} h_{\alpha}), \quad a, b \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Let us set

$$t_{\alpha} = 2 \left(\frac{x^2}{2} - \frac{d}{d\alpha} \right).$$

Theorem

Suppose that $\alpha \in (0, 1)$. Let P be a polynomial. Then

$$\begin{aligned} SP(x^2)h_{\alpha} &= \frac{i}{2} \left(P(t_{\alpha}) \log \frac{1+\alpha}{1-\alpha} \right) h_{\alpha}, \\ S^* P(x^2)xh_{\alpha} &= \frac{i}{2} \left(P(t_{\alpha}) \log \frac{1+\alpha}{1-\alpha} \right) xh_{\alpha}. \end{aligned}$$



Together with them we have the matrix representation of \mathfrak{t} . Let

$$\mathfrak{K}_{\alpha} = \text{LH}\{x^n e^{-\alpha x^2/2} \mid n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}.$$

Corollary (Matrix rep. for $\alpha \in (0, 1)$)

Let $f_a = x^a h_{\alpha}$ and $f_b = x^b h_{\alpha}$. Then $\mathfrak{t}[f_a, f_b]$ is given by

$$\begin{cases} -\frac{i}{4} \left(h_{\alpha}, \left\{ (t_{\alpha}^n x^{2m} - x^{2n} t_{\alpha}^m) \log \frac{1+\alpha}{1-\alpha} \right\} h_{\alpha} \right) & a = 2n, b = 2m \\ -\frac{i}{4} \left(h_{\alpha}, \left\{ (t_{\alpha}^n x^{2m+2} - x^{2n+2} t_{\alpha}^m) \log \frac{1+\alpha}{1-\alpha} \right\} h_{\alpha} \right) & a = 2n+1, b = 2m+1 \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

Let

$$\mathfrak{K} = \text{LH}\{x^n e^{-x^2/2} \mid n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}.$$

Theorem (Matrix rep. for $\alpha = 1$)

$\mathfrak{K} \cap D(S^{\#}) = \{0\}$. In particular, let e_n be an ev of H , then $e_n \notin D(S^{\#})$.



Analytic continuations

- Let $h_z = e^{+izx^2/2}$ for $z \in \mathbb{C}$. C.f., $h_{i\alpha} = e^{-\alpha x^2/2}$.
Let $\mathcal{C} : \mathbb{C} \setminus \{-i\} \rightarrow \mathbb{C}$ be the Cayley transform defined by

$$\mathcal{C}(z) = \frac{z - i}{z + i}.$$

We have

$$\log \frac{1 + \alpha}{1 - \alpha} = -\log(-\mathcal{C}(i\alpha)).$$

- Let $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Im}z > 0\}$ and $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$.
- $z \mapsto -\log(-\mathcal{C}(z))$ is analytic on $\mathbb{C} \setminus \{i\alpha \mid \alpha \in (-\infty, -1] \cup [1, \infty)\}$.

$$\begin{aligned} \mathfrak{N}_{\text{even}} &= \text{LH}\{P(x^2)h_z \mid P \text{ is polynomial}, z \in \mathbb{H} \setminus \{i\}\}, \\ \mathfrak{N}_{\text{odd}} &= \text{LH}\{P(x^2)xh_z \mid P \text{ is polynomial}, z \in \mathbb{H} \setminus \{i\}\}. \end{aligned}$$

We also define t_z by

$$t_z = 2 \left(\frac{x^2}{2} - i \frac{d}{dz} \right).$$



We define $\hat{S}^\#$ by

$$\begin{aligned} \hat{S}P(x^2)h_z &= -\frac{i}{2} (P(t_z) \log(-\mathcal{C}(z))) h_z, \\ \hat{S}^*P(x^2)xh_z &= -\frac{i}{2} (P(t_z) \log(-\mathcal{C}(z))) xh_z. \end{aligned}$$

- $\hat{S}^\# = S^\#$ on \mathfrak{R}_α for $\alpha \in (0, 1)$.
- $[\hat{S}^\#, H] = -i\mathbb{1}$ on $\mathfrak{N}_\#$.
- We define sesqui-linear forms \hat{t}_{even} and \hat{t}_{odd} by

$$\begin{aligned} \hat{t}_{\text{even}}[\psi, \phi] &= \frac{1}{2} \{(\hat{S}\psi, \phi) + (\psi, \hat{S}\phi)\}, \quad \psi, \phi \in \mathfrak{N}_{\text{even}}, \\ \hat{t}_{\text{odd}}[\psi, \phi] &= \frac{1}{2} \{(\hat{S}^*\psi, \phi) + (\psi, \hat{S}^*\phi)\}, \quad \psi, \phi \in \mathfrak{N}_{\text{odd}}. \end{aligned}$$

- The sesqui-linear form \hat{t} is defined by $\hat{t} = \hat{t}_{\text{even}} \oplus \hat{t}_{\text{odd}}$.

Theorem

\hat{t} is an ultra-weak time operator of H .



Let $f \in L^2(\mathbb{R})$.

$$G_{\text{even}}(z) = (f, \hat{S}P(x^2)h_z) = (f, -\frac{i}{2} (P(t_z) \log(-\mathcal{L}(z))) h_z), \quad z \in \mathbb{D} \cap \mathbb{H}$$

$$G_{\text{odd}}(z) = (f, \hat{S}^*P(x^2)xh_z) = (f, -\frac{i}{2} (P(t_z) \log(-\mathcal{L}(z))) xh_z), \quad z \in \mathbb{D} \cap \mathbb{H}.$$

Define $F_{\text{even}}(z) = (f, \hat{S}P(x^2)h_z)$ and $F_{\text{odd}}(z) = (f, \hat{S}^*P(x^2)xh_z)$ for $z \in \mathbb{H} \setminus \{i\}$. Then $F_{\#}$ is analytic on $\mathbb{H} \setminus \{\alpha i \mid \alpha \in [1, \infty)\}$ and the analytic continuation of $G_{\#}$.

Corollary (Analytic continuation)

Let $z \in \mathbb{H} \setminus \{i\}$. Let $f_a = x^a h_z$ and $f_b = x^b h_z$.

$$\hat{t}[f_a, f_b] = \begin{cases} \frac{i}{4} (h_z, \{ (t_z^n x^{2m} - x^{2n} t_z^m) \log(-\mathcal{L}(z)) \} h_z) & a = 2n \text{ and } b = 2m, \\ \frac{i}{4} (h_z, \{ (t_z^n x^{2m+2} - x^{2n+2} t_z^m) \log(-\mathcal{L}(z)) \} h_z) & a = 2n + 1 \text{ and } \\ 0 & b = 2m + 1, \\ & \text{otherwise.} \end{cases}$$

■ Let $z = \alpha i$ with $\alpha \in (0, 1)$. Then $\hat{t}[f_a, f_b] = t[f_a, f_b]$.

■ The map $z \mapsto \hat{t}[f_a, f_b]$ is analytic on $\mathbb{H} \setminus \{\alpha i \mid \alpha \in [1, \infty)\}$. In particular $\hat{t}[f_a, f_b]$ is the analytic continuation of $t[f_a, f_b]$.

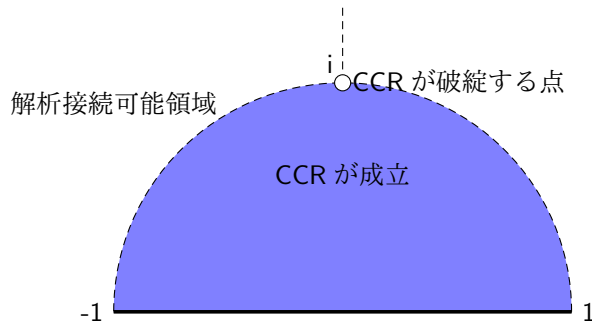


Figure: 時間作用素が存在する線型空間 $LH\{x^n e^{izx^2/2} \mid n = 0, 2, \dots\}$



We can also define the sesqui-linear form associated with T_G by

$$t_G[\phi, \psi] = \frac{1}{2}\{(\phi, T_G\psi) + (T_G\phi, \psi)\}.$$

t_G is also an ultra-weak time operator of h .

Theorem (angle operator \neq Galapon operator)

It follows that $t \neq t_G$.

Proof: t_G is bounded, but t is unbounded. □



Concluding remarks $A = T, T_G, \hat{\phi}$

In physics it is formally treated that $[H, A] = +i\mathbb{1}$ for

$$T = \frac{1}{2}(\arctan q^{-1}p + \arctan pq^{-1}),$$

$$T_G = \int_{[0, 2\pi]} tdP(t) = i \sum_n \sum_{m \neq n} \frac{(e_m, \cdot)}{m - n} e_n,$$

$$\hat{\phi} = \frac{i}{2}(\log a - \log a^*) \implies [6].$$

We made relationships among them clear [5].

- (1) $T \neq T_G$.
- (2) If T is defined in the sense of sesqui-linear form t , then the domain of t is dense and $t[H\phi, \psi] - t[H\psi, \phi]^* = -i(\phi, \psi)$ holds on a dense subspace.
- (3) The continuous limit of T_ε is $T_{AB} = \frac{1}{2}(q^{-1}p + pq^{-1})$.
- (4a) A matrix representation of t is given on \mathfrak{K}_α for $\alpha \in i(0, 1)$.
- (4b) **It can be extended on \mathfrak{K}_z for $z \in \mathbb{H} \setminus \{i\}$.**



Reference I

- [1] A. Arai and F. Hiroshima.
Ultra-weak time operators of Schrödinger operators.
Ann. Henri Poincaré, 18:2995–3033, 2017.
- [2] A. Arai and Y. Matsuzawa.
Time operators of a Hamiltonian with purely discrete spectrum.
Rev. Math. Phys., 20:951–978, 2008.
- [3] P.A.M. Dirac.
The quantum theory of the emission and absorption of radiation.
Proceedings of the Royal Society of London. Series A, 114:243–265, 1927.
- [4] E.A. Galapon.
Self-adjoint time operator is the rule for discrete semi-bounded Hamiltonians.
Proc. R. Soc. Lond. A, 458:2761–2689, 2002.
- [5] F. Hiroshima and N. Teranishi.
Time operators of harmonic oscillators and their representations I.
preprint, arXiv:2201.06352, 2022.
- [6] F. Hiroshima and N. Teranishi.
Time operators of harmonic oscillators and their representations II.
in preparation.
- [7] L. Susskind and J. Glogower.
Quantum mechanical phase and time operator.
Physics, 1:49–61, 1964.



Time operators of the harmonic oscillator in $\ell^2(\mathbb{N})$

Noriaki Teranishi

Department of Mathematics, Faculty of Science, Hokkaido University, Japan

(joint work with Fumio Hiroshima)

The harmonic oscillator $h = (p^2 + q^2)/2$ has a time operator

$$T_G = i \sum_{n \in \mathbb{N}} \left(\sum_{m \neq n} \frac{\langle e_m, \cdot \rangle}{n - m} \right) e_n$$

and a ultra weak time operator

$$T = \frac{1}{2} (\arctan(p^{-1}q) \dot{+} \arctan(qp^{-1})).$$

It is shown that there exists a unitary operator $U: L^2(\mathbb{R}) \rightarrow \ell^2(\mathbb{N})$ such that

$$UT_GU^* = i(\overline{\log(1 - L) - \log(1 - L^*)}),$$

$$UTU^* = -\frac{i}{4}(\log(a^{*-1}a) \dot{+} \log(aa^{*-1})),$$

where L is the left shift operator and a is the annihilation operator. We show that some relations between the time operator T_G and ultra weak time operator T .

$\ell^2(\mathbb{N})$ における調和振動子の時間作用素

寺西 功哲

北海道大学

本研究は 廣島文生（九州大学） との共同研究によるものである。



内容

- 背景.
- Phase 作用素と angle 作用素.
- Galapon 時間作用素.
- 結果



背景

$L^2(\mathbb{R})$ 上の量子調和振動子 $H(\varepsilon) := \frac{1}{2}p^2 + \varepsilon\frac{1}{2}q^2$ に対して,
 $H(0)$ の時間作用素 T_{AB} に収束する半線形形式の族

$$T(\varepsilon) := \frac{1}{2\sqrt{\varepsilon}} \arctan(\sqrt{\varepsilon}p^{-1}q) + \arctan(\sqrt{\varepsilon}qp^{-1})$$

が超弱時間作用素の意味で数学的に正当化された.

$$\begin{array}{ccc}
 H(\varepsilon) & \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} & H(0) := \frac{1}{2}p^2 \\
 \uparrow \text{ultra-weak CCR} & & \uparrow \text{CCR} \\
 T(\varepsilon) & \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0 \text{ (form sense)}} & T_{AB} := \frac{1}{2}(qp^{-1} + p^{-1}q)
 \end{array}$$

疑問

量子調和振動子 $H := H(1)$ のスペクトルは離散固有値のみから成る :

$$\sigma(H) = \left\{ n + \frac{1}{2} \mid n \in \mathbb{N} \right\}.$$

従って, H は超弱時間作用素としての angle 作用素 $T := T(1)$ とは別に, 有界な時間作用素 T_G を持っている.

疑問 1

2つの(超弱)時間作用素 T と T_G には, 構造的な関係があるだろうか?

$L^2(\mathbb{R})$ で見てもよくわからないので、空間を変える。
 H の n 番目の固有ベクトルを g_n とする。

よく知られているように、 $L^2(\mathbb{R})$ は下記のユニタリ作用素 U により自然に $\ell^2(\mathbb{N})$ にユニタリ同値である：

$$\begin{array}{ccc} U : L^2(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \ell^2(\mathbb{N}) \\ \Psi & & \Psi \\ g_n & \longmapsto & e_n := (\delta_{mn})_{m \in \mathbb{N}} \end{array}$$

$$UHU^* = N + 1/2, \quad N : e_n \longmapsto ne_n$$

phase 作用素

先ず、angle 作用素 $T = \frac{1}{2}(\arctan(qp^{-1}) + \arctan(pq^{-1}))$
 から $\ell^2(\mathbb{N})$ の言葉で書き換えていく。

物理の方面では

Lewis, Lawrence, and Harris

"Quantum Action-Angle Variables for the Harmonic Oscillator"

等により angle 作用素 T は "phase 作用素" と次の関係があるらしいとの記述がある：

$$\frac{1}{2}(\arctan(qp^{-1}) + \arctan(pq^{-1})) = \frac{\pi}{2} - \frac{i}{2}(\log a - \log a^*) + G(N)$$

(a^* , a はそれぞれ生成、消滅作用素である： $a^*e_n = \sqrt{n+1}e_{n+1}$)

形式的に $[N, f(a)] = -i$ を満たす関数 f を求めると、
確かに $f(x) = -i \log x$ となる。

従って、angle 作用素 T の $\ell^2(\mathbb{N})$ における対応物は

$$\phi := -\frac{i}{2}(\log a - \log a^*)$$

であるとしたところであるが、これは次の命題から無理であろう。

命題 1

$D_0 \subseteq \ell^2(\mathbb{N})$ を有限粒子空間とする。このとき

$$D_0 \cap D(\log a) = D_0$$

$$D_0 \cap D(\log a^*) = \{0\}$$

$\phi = -\frac{i}{2}(\log a - \log a^*)$ は $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ 上の作用素としては問題ないが、
 $\ell^2(\mathbb{N})$ 上の作用素として問題がある。

そこで、形式的には $-\frac{i}{2}(\log a - \log a^*)$ と同じ次の作用素を考えることにする：

$$\phi_* := -\frac{i}{4}(\log(aa^{*-1}) + \log(a^{*-1}a))$$

定義

$\log(aa^{*-1}) + \log(a^{*-1}a)$ の定義を確認する.

定義 1

$A: \ell^2(\mathbb{N}) \rightsquigarrow \ell^2(\mathbb{N})$ に対して次を定める.

$$\log A := - \sum_{k \geq 1} \frac{1}{k} (1 - A)^k$$

$$D(\log A) := \left\{ f \in \ell^2(\mathbb{N}) \mid \sum \frac{1}{k} (1 - A)^k f \text{ exists} \right\}$$

$a^*: \ell^2(\mathbb{N}) \rightsquigarrow (1 - P_0)\ell^2(\mathbb{N})$ は単射なので,

$a^{*-1}: (1 - P_0)\ell^2(\mathbb{N}) \rightsquigarrow \ell^2(\mathbb{N})$ が存在する.

$a^{*-1}a: \ell_{\text{even}}^2(\mathbb{N}) \rightsquigarrow \ell_{\text{even}}^2(\mathbb{N}) := \overline{\langle (a_0, 0, a_2, 0, \dots) \rangle}$.

$[a^{*-1}a, a^{*2}] = 2$ on $a^{*2}D_0$.

$D(\log(a^{*-1}a)) \supseteq \ell_{\text{even}}^2(\mathbb{N}) \cap D_0$.

$D(\log(aa^{*-1})) \supseteq \ell_{\text{odd}}^2(\mathbb{N}) \cap D_0$.

$$\begin{aligned} \frac{i}{2} \log(a^{*-1}a): \ell_{\text{even}}^2(\mathbb{N}) &\rightsquigarrow \ell^2(\mathbb{N}), & \arctan(q^{-1}p): L_{\text{even}}^2(\mathbb{R}) &\rightsquigarrow L^2(\mathbb{R}) \\ \frac{i}{2} \log(aa^{*-1}): \ell_{\text{odd}}^2(\mathbb{N}) &\rightsquigarrow \ell^2(\mathbb{N}), & \arctan(pq^{-1}): L_{\text{odd}}^2(\mathbb{R}) &\rightsquigarrow L^2(\mathbb{R}) \end{aligned}$$

phase 作用素と angle 作用素は殆ど同じ構造を有しているの、関係があるはずである. 先ず, $q^{-1}p, pq^{-1}$ のそれぞれの固有ベクトル $e^{-\alpha x^2}, xe^{-\alpha x^2}$ の行き先を確認する.

命題 2

$U: L^2(\mathbb{R}) \rightarrow \ell^2(\mathbb{N}), \Omega := (1, 0, 0, \dots)$ に対して,

$$U e^{-\alpha x^2/2} = \pi^{1/4} \sqrt{\frac{2}{1+\alpha}} \exp\left(\frac{1-\alpha}{1+\alpha} \frac{a^{*2}}{2}\right) \Omega$$

$$U \left(x e^{-\alpha x^2/2} \right) = \pi^{1/4} \frac{2}{(1+\alpha)^{3/2}} a^* \exp\left(\frac{1-\alpha}{1+\alpha} \frac{a^{*2}}{2}\right) \Omega$$

Unitary equivalence

命題 3

$$U \arctan(q^{-1}p)U^* = -\frac{i}{2} \log(a^{*-1}a) \quad \text{on } U\langle e^{\alpha x^2/2} \rangle_{\alpha \in (0,1)}$$

$$U \arctan(pq^{-1})U^* = -\frac{i}{2} \log(aa^{*-1}) \quad \text{on } U\langle x e^{\alpha x^2/2} \rangle_{\alpha \in (0,1)}$$

$$\begin{aligned} U \left(\arctan(q^{-1}p) e^{-\alpha x^2/2} \right) &= \frac{i}{2} \log \left(\frac{1+\alpha}{1-\alpha} \right) U e^{-\alpha x^2/2} \\ &= -\frac{i}{2} \log \left(\frac{1-\alpha}{1+\alpha} \right) \pi^{1/4} \sqrt{\frac{2}{1+\alpha}} \exp \left(\frac{1-\alpha}{1+\alpha} \frac{a^{*2}}{2} \right) \Omega \\ &= -\frac{i}{2} \log(a^{*-1}a) \pi^{1/4} \sqrt{\frac{2}{1+\alpha}} \exp \left(\frac{1-\alpha}{1+\alpha} \frac{a^{*2}}{2} \right) \Omega \\ &= -\frac{i}{2} \log(a^{*-1}a) U e^{-\alpha x^2/2}. \end{aligned}$$

(北海道大学)

時間作用素

11 / 26

$a^{*-1}a$ を用いて $\ell^2(\mathbb{N})$ の部分空間上で CCR を満たす作用素を得たが、生成・消滅作用素でなければならないだろうか？

生成作用素 a^* を極分解すると $a^* = \sqrt{N}L^*$.

ここで $L: e_n \mapsto e_{n-1}$ ($e_{-1} = 0$) は左シフトである。

同様に、消滅作用素を極分解すると $a = \sqrt{N+1}L$ である。

従って、 $D_0 \cap \ell^2_{\text{even}}(\mathbb{N})$ 上で

$$\begin{aligned} a^{*-1}a &= (\sqrt{N}L^*)^{-1} \sqrt{N+1}L \\ &= L^{*-1} \sqrt{\frac{N+1}{N}} L \\ &= L \sqrt{\frac{N+1}{N}} L \\ &= \sqrt{\frac{N+2}{N+1}} L^2 \end{aligned}$$

(北海道大学)

時間作用素

12 / 26

同様にして, $aa^{*-1} = \sqrt{\frac{N+1}{N+2}}L^2$ となる.

そこで, 適当な関数 $g \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ を取り, $g(N)L^2$ を考えてみる.

補題 4

f, g を

$$g(N+1)f(N) - g(N-1)f(N-2)P_{\geq 2} = \beta \text{ on } D_0 \cap \ell_{\text{even}}^2(\mathbb{N})$$

$$\Omega \in D(g(N-1)e^{\alpha f(N-2)L^{*2}})$$

を満たす関数とする. (e.g., $g(N+1)f(N) = N+2$).
このとき次が成立する:

$$g(N+1)L^2e^{\alpha f(N-2)L^{*2}}\Omega = \alpha\beta e^{\alpha f(N-2)L^{*2}}\Omega.$$

命題 5

$\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ は $|1 - \alpha\beta| < 1$ と

$$g(N+1)f(N) - g(N-1)f(N-2)P_{\geq 2} = \beta \text{ on } D_0 \cap \ell_{\text{even}}^2(\mathbb{N}),$$

$$\Omega \in D(N \log(g(N+1)L^2)e^{\alpha f(N-2)L^{*2}})$$

$$\cap D(\log(g(N+1)L^2)Ne^{\alpha f(N-2)L^{*2}})$$

を満たすとする. このとき

$$[N, i \log(g(N+1)L^2)] = -2i \text{ on } \langle e^{\alpha f(N-2)L^{*2}}\Omega \rangle$$

が成立する. すなわち, $-\frac{i}{2} \log(g(N+1)L^2)$ から N の超弱時間作用素が作れる.

命題 6

$\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ は $|1 - \alpha\beta| < 1$ と

$$\frac{g(N+2)h(N+2)}{h(N)}f(N) - \frac{g(N)h(N)}{h(N-2)}f(N-2)P_{\geq 2} = \beta$$

on $D_0 \cap \ell^2(\mathbb{N})$,

$$\Omega \in D(N \log(g(N+1)L^2)h(N-1)L^*e^{\alpha f(N-2)L^{*2}}) \\ \cap D(\log(g(N+1)L^2)Nh(N-1)L^*e^{\alpha f(N-2)L^{*2}})$$

を満たすとする。このとき

$$g(N+1)L^2(h(N-1)L^*e^{\alpha f(N-2)L^{*2}}\Omega) \\ = \alpha\beta(h(N-1)L^*e^{\alpha f(N-2)L^{*2}}\Omega),$$

$$[N, i \log(g(N+1)L^2)] = -2i \text{ on } \langle h(N-1)L^*e^{\alpha f(N-2)L^{*2}}\Omega \rangle.$$

が成立する。

Galapon 時間作用素

定義 2 (Galapon'02, Arai-Matsuzawa'08)

$H: \mathcal{H} \rightsquigarrow \mathcal{H}$ は $\sigma(H) = \{E_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ かつ $\sum E_n^{-2} < \infty$ を満たす。
 $\{g_n\}$ を H の固有ベクトルから成る集合とする: $Hg_n = E_n g_n$.
 このとき, Galapon の時間作用素 T_G を次で定める:

$$T_G f := i \sum_n \left(\sum_m \frac{(g_m, f)}{E_n - E_m} \right) g_n.$$

定理 7 (Arai-Matsuzawa'08)

ある実数 $a > 0$, $\lambda > 0$, $\mu \in \mathbb{R}$ が存在して

$$E_n = \lambda n + \mu, \quad n > a$$

をみたすとする。このとき, T_G は有界な自己共役作用素である。

T_G も $U: L^2(\mathbb{R}) \rightarrow \ell^2(\mathbb{N})$, $Ug_n = e_n$ を用いて $\ell^2(\mathbb{N})$ の言葉で書き換える. $f(n) := E_n$ とすると

$$\begin{aligned}
 UT_G U^* \phi &:= i \sum_n \sum_{m \neq n} \frac{(Ug_m, \phi)}{E_n - E_m} Ug_n \\
 &= i \sum_n \left(\sum_{m < n} \frac{(e_m, \phi)}{E_n - E_m} + \sum_{m > n} \frac{(e_m, \phi)}{E_n - E_m} \right) e_n \\
 &= i \sum_n \left(\sum_{m < n} \frac{(L^{n-m} e_n, \phi)}{E_n - E_m} + \sum_{m > n} \frac{((L^*)^{m-n} e_n, \phi)}{E_n - E_m} \right) e_n \\
 &= i \sum_n \left(\sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{(L^k e_n, \phi)}{E_n - E_{n-k}} - \sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{((L^*)^k e_n, \phi)}{E_{n+k} - E_n} \right) e_n \\
 &= \sum_n \left(e_n, i \left(\sum_k (f(N) - f(N-k))^{-1} (L^*)^k \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - \sum_k (f(N+k) - f(N))^{-1} L^k \right) \phi \right) e_n
 \end{aligned}$$

従って,

$$\begin{aligned}
 UT_G U^* &= \overline{i \sum_k \left((f(N) - f(N-k))^{-1} (L^*)^k - (f(N+k) - f(N))^{-1} L^k \right)}
 \end{aligned}$$

特に, 調和振動子の場合

$$f(n) = n + \frac{1}{2}$$

より $(f(N) - f(N-k))^{-1} = k^{-1}$. 従って,

$$\begin{aligned}
 UT_G U^* &= i \overline{\left(\sum_k \frac{1}{k} (L^*)^k - \sum_k \frac{1}{k} L^k \right)} \\
 &= i \overline{(\log(1-L) - \log(1-L^*))}
 \end{aligned}$$

一旦 T_G の事は忘れて, ユニタリ同値な

$$L_G := i(\log(1 - L) - \log(1 - L^*))$$

と関係がありそうなものを考えていく.

命題 8

$g \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ は任意の $n \in \mathbb{N}$ で $|g(n)| = 1$ を満たすとする. このとき $L_G(N) = \log(g(N) - L) - \log(\bar{g}(N) - L^*)$ は N の時間作用素である:

$$[N, \log(g(N) - L) - \log(\bar{g}(N) - L^*)] = -1$$

on $\text{Ran}((L^* - \bar{g}(N))) \cap D(NL_G(N)) \cap D(L_G(N)N)$.

もう少し広く

$$\log(f(L)) - \log(f(L^*))$$

の形のもので考えてみる.

定理 9

実多項式 f を $1 - f(L)$ が単射かつ $w\text{-}\lim_k f(L^*)^k = 0$ を満たし, $1 - f$ の多重度 m_α の根 $\alpha \in \mathbb{C}$ は $\alpha \notin \sigma_p(L)$ かつ α^{-1} も $1 - f$ の多重度 m_α の根になるとする. このときある複素数 $c \in \mathbb{C}$ が存在して

$$c(\log(1 - f(L)) - \log(1 - f(L^*)))$$

は N の時間作用素となる.

形式的に L_G の有限和からも N の時間作用素が作れる.

多項式 f の根 α が円周上に分布している場合は分かったので、それ以外のケースを調べてみる。

補題 10

次を満たす実多項式 f は存在しない:

- (1) $0 \notin \sigma(f(L))$,
- (2) ある無限次元部分空間 D 上で

$$[N, \log f(L) - \log f(L^*)] = -1$$

を満たす。

$$\xi(x) := \begin{cases} 1 & x < m, \\ \left[\frac{x}{m}\right] & x \geq m. \end{cases}$$

$$\mathfrak{R} := \left\langle \{(L^*)^k e^{\alpha \xi(N)(L^*)^m} \Omega \mid k < m, |\alpha| < 1, 0 < |\alpha - 1| < 1\} \right\rangle$$

$$\mathfrak{L}(f, c) := \left\langle \left\{ g \in D(N) \mid \begin{array}{l} \exists \alpha \in \mathbb{C}, g \in \ker(L - \alpha), \\ |f(\alpha) - 1| < 1, \alpha f'(\alpha) + cf(\alpha) = 0 \end{array} \right\} \right\rangle.$$

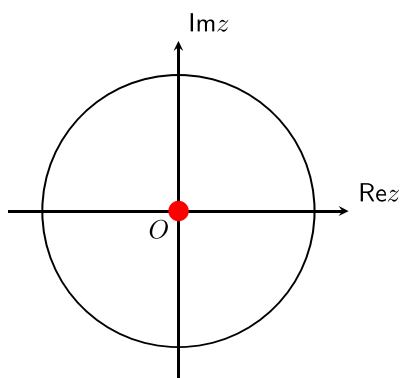
補題 11

- (1) $[N, i \log L^m] = -im$ on \mathfrak{R} . ($m = 2$ のときが angle 作用素)
- (2) f を実多項式, $c \in \mathbb{R}$ とする. 複素数 $|\alpha| < 1$ で $|f(\alpha) - 1| < 1$ を満たすものが存在するとき,

$$[N, i \log f(L)] = ic \quad \text{on } \mathfrak{L}(f, c)$$

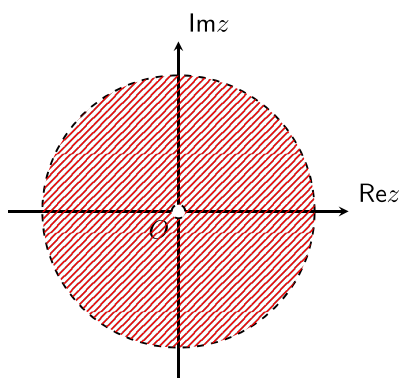
を満たす。

まとめ



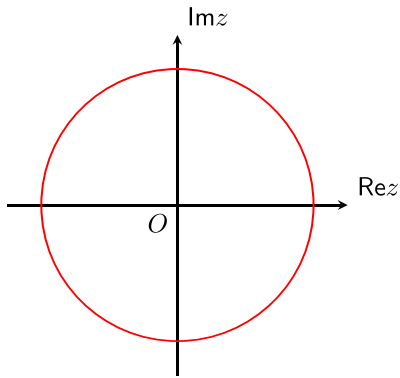
$z = 0$
 $\Rightarrow i \log(z - L)$ は無限次元部分空間上で N の超弱時間作用素.
(angle 作用素っぽい)

まとめ



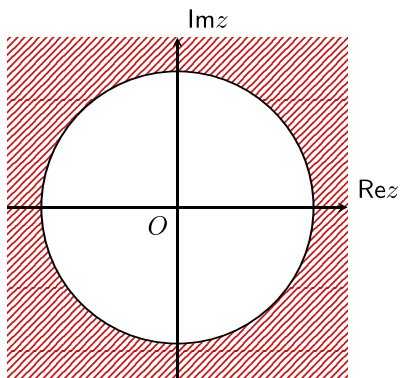
$0 < |z| < 1$
 $\Rightarrow i \log(z - L)$ は有限次元部分空間上で N の超弱時間作用素.

まとめ



$|z| = 1$
 $\Rightarrow i(\log(z-L) - \log(z^{-1} - L^*))$
は無限次元部分空間上で N の時間作用素.

まとめ



$|z| > 1$
 $\Rightarrow i(\log(z-L) - \log(z^{-1} - L^*))$
は無限次元部分空間上で N の時間作用素にならない.

時間結晶を用いた「新井・宮本の不等式」の実証へ向けて

Keiji Nakatsugawa

International Center for Materials Nanoarchitectonics (WPI-MANA), National
Institute for Materials Science, Tsukuba 305-0044, Japan

(joint work with Satoshi Tanda)

BACKGROUND

Definition of a time operator. In the standard formulation of quantum mechanics, position operators, momentum operators, and the position-momentum uncertainty relation are well-established. The position-momentum uncertainty relation $\Delta x \Delta p \geq \hbar/2$ can be derived mathematically from the canonical commutation relation $[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar$. Meanwhile, the energy-time uncertainty relation $\Delta E \Delta T \sim \hbar$ is also known experimentally. So, in analogy with position and momentum, one expects that the energy-time uncertainty relation can be obtained from the canonical commutation relation (CCR)

$$(1) \quad [\hat{H}, \hat{T}] = i\hbar.$$

Such time operators are necessary to derive time-energy uncertainty relations and to unify space and time at the level of quantum mechanics.

However, in the framework of standard quantum mechanics, time is not an observable but just a parameter because it is difficult to define a self-adjoint time operator \hat{T} that satisfies Eq. (1). To illustrate this difficulty, let us consider the Aharonov-Bohm time operator [1]

$$(2) \quad \hat{T}_{\mathbb{R}} = -\frac{m}{2}(\hat{x}\hat{p}^{-1} + \hat{p}^{-1}\hat{x})$$

which describes the arrival time of a free particle on a line (\mathbb{R}). This operator satisfies Eq. (1) with the Hamiltonian $\hat{H} = \hat{p}^2/2m$. On the other hand, observables in standard quantum mechanics are represented by self-adjoint operators. Unfortunately, the operator (2) does not have orthogonal eigenstates and real eigenvalues, so it is symmetric but not self-adjoint. Today, it is well understood that self-adjoint time operators can be defined for Hamiltonians with discrete energy spectrum [2, 3]. What is the discrete analog of the time operator (2)? What would be its physical interpretation?

Time Operators in Terms of Time Crystals. In our previous work, we have considered the problem of time operators in the context of quantum time crystals (QTC) in ring systems S^1 [4, 5]. A QTC is a quantum mechanical state which spontaneously breaks time translation symmetry. The periodic oscillation of a QTC seems to promote time from a parameter to a physical observable. So, we proposed that QTCs are candidates for constructing time operators. A generalized commutation relation called

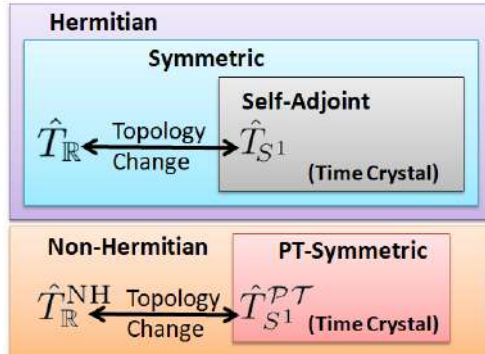


FIGURE 1. (Redrawn from Ref. [5].) \hat{T}_{S^1} is a self-adjoint time operator and $\hat{T}_{S^1}^{PT}$ is a \mathcal{PT} -symmetric time operator that is defined on a ring system (S^1). In the large radius limit (from S^1 to \mathbb{R}), \hat{T}_{S^1} reduces to the Aharonov-Bohm time operator $\hat{T}_{\mathbb{R}}$ (2).

the generalized weak Weyl relation [6] is used to derive a class of self-adjoint time operators for ring systems: Its eigenvalues are interpreted as the period of a QTC. The Aharonov-Bohm time operator (2) is obtained from such time operators by taking the infinite-radius limit. We also reveal the relationship between our time operators and \mathcal{PT} -symmetric time operators (which are non-Hermitian operators but have real eigenvalues). These time operators are then used to derive several energy-time uncertainty relations. A summary of our time operators is given in Fig. 1.

The Arai-Miyamoto Inequality. Mathematical correctness does not necessarily imply physical reality. Any physical theory is fully accepted once it survives experimental verification. One way to test the existence of time operators is the “Arai-Miyamoto inequality” which was first proposed by Miyamoto [7] and later developed by Arai [8, 6, 9]. This inequality is derived from the weak Weyl relation (WWR)

$$(3) \quad TU = U(T + t)$$

where T is a time operator and U is a unitary operator. Using $U = e^{-iHt/\hbar}$ and differentiate Eq. (3) we recover the CCR (1). We can also write Eq. (3) in the inner product form

$$\langle \psi, [U, T]\psi \rangle = \langle \psi, tU\psi \rangle.$$

Then, using the triangular inequality and the Cauchy-Schwarz inequality, we obtain the Arai-Miyamoto inequality

$$(4) \quad |\langle \psi, U\psi \rangle|^2 \leq \frac{4\sigma_T^2}{t^2}$$

where $\sigma_T = \|(T - \langle \psi, T\psi \rangle)\psi\|$. Experimental demonstration of this inequality will prove the existence of time operators. But, there is an additional hurdle to overcome.

That is to say, Weyl relations such as Eq. (3) are not yet fully recognized by the physics community. Therefore, we also need to verify the WWR experimentally. Equation (4) is derived only from the WWR and does not depend on the specific forms of T and U . Therefore, equivalent inequalities can be obtained using other observables that satisfy the WWR.

GOAL OF THIS PRESENTATION

We propose quantum crystals as a stage where the WWR and the Arai-Miyamoto inequality play an essential role. In quantum space crystals, the operator \hat{x} is insufficient as a position operator because it does not satisfy the periodic boundary condition of the crystal. Instead, $\hat{W} = e^{i\hat{x}}$ is needed to make the position periodic. The canonical quantization on S^1 with \hat{W} and the canonical angular momentum operator L

$$(5) \quad \hat{W}\hat{L} = (\hat{L} + \hbar)\hat{W}$$

is known as the Ohnuki-Kitakado quantization [10]. Eq. (5) has the same structure as the WWR (3). We have shown that periodic time operators are also needed in quantum time crystals [4, 5]. Therefore, we show that the WWR is necessary for periodic quantum crystal systems and that the Arai-Miyamoto inequality holds. The connection between the time operators in Fig. 1 will be investigated in future study.

REFERENCES

- [1] Y. Aharonov and D. Bohm, *Phys. Rev.* **122**,1649 (1961).
- [2] E. A. Galapon, *Proc. Royal Soc. Lond. A: Math. Phys. Eng. Sci.* **458**, 2671 (2002).
- [3] A. Arai, *Lett. Math. Phys.* **87**, 67 (2008).
- [4] K. Nakatsugawa, T. Fujii, and S. Tanda, *Phys. Rev. B* **96**, 094308 (2017).
- [5] K. Nakatsugawa, T. Fujii, A. B. Saxena, and S. Tanda, *J. Phys. A* **53**, 025301 (2020).
- [6] A. Arai, *Rev. Math. Phys.* **17**, 1071 (2005).
- [7] M. Miyamoto *J. Math. Phys.* **42**, 1038 (2001).
- [8] A. Arai, *Rev. Math. Phys.* **17**, 1071 (2005).
- [9] A. Arai and F. Hiroshima, *Ann. Henri Poincaré* **18**, 2995 (2017).
- [10] Y. Ohnuki and S. Kitakado, *J. Math. Phys.* **34**, 2827 (1993).

量子結晶を用いた「新井・宮本の不等式」の実証へ向けて

物質・材料研究機構^A, 北大工学院^B, 旭川医大^C, ロスアラモス研究所^D
 中津川啓治^A, 藤井敏之^C, Avadh Saxena^D, 丹田聡^B

2022年7月20日(金)
 時間・量子測定・準古典近似の理論と実験
 ～古典論と量子論の境界～

1

Introduction: Is time an observable?

- In quantum mechanics, position operators, momentum operators, and the position-momentum uncertainty relation are well-established.
- The energy-time uncertainty relation is also known experimentally. However, in the framework of standard quantum mechanics, time is not an observable but just a parameter.

$$\begin{array}{ccc}
 [\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar & \xrightarrow{\text{Analogy}} & [\hat{H}, \hat{T}] = i\hbar \\
 \downarrow \text{Math} & & \downarrow \text{Goal} \\
 \Delta x \Delta p \geq \hbar/2 & \xleftrightarrow{\text{Look similar}} & \Delta E \Delta t \geq \hbar/2
 \end{array}$$

► Time Crystal: A physical system where time becomes discrete
 F. Wilczek Phys. Rev. Lett **109**, 160401, (2012);
 K. Nakatsugawa, T. Fujii and S. Tanda, Phys. Rev. B **96**, 094308 (2017)

► Time Crystal ⇒ Time Operators
 K. Nakatsugawa, T. Fujii, A. Saxena & S. Tanda, J. Phys. A **53**, 025301 (2020)

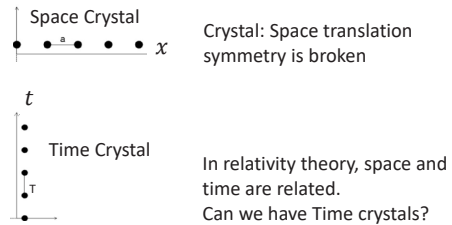
2

Outline

- 1. Quantum Time Crystal in ring system:**
 K. Nakatsugawa, T. Fujii & S. Tanda, Physical Review B **96**, 094308 (2017)
- 2. Time Operators from Time Crystals:**
 K. Nakatsugawa, T. Fujii, A. Saxena & S. Tanda, J. Phys. A **53**, 025301 (2020)
- 3. Toward an experimental test of the Arai-Miyamoto inequality**

3

Crystal Structure in Time?



4

New Types of Crystals

<p>Time Crystal F. Wilczek, PRL 109 (2012)</p> <p>T space?</p>	<p>Phase Crystals P. Holmvall et. al., Phys. Rev. Research 2, (2020)</p> <p>φ space?</p>	<p>Phase-space Crystal L. Guo et. al., PRL 111 (2013)</p> <p>k space?</p>
---	---	--

Can these new types of crystals really exist?
 First, reconsider space crystals

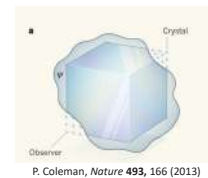
5

Ground State of a Crystal

A ground state must satisfy the symmetry of the Hamiltonian
 ⇒ **Symmetry broken state cannot be a "true" ground state.**
 F. Strocchi, Symmetry Breaking (Springer, New York, 2008)

E.g. The periodicity of a crystal is not evident from its wavefunction. Broken symmetry becomes apparent due to collapse of wavefunction.
 J. van Wezel and J. van den Brink, Am. J. Phys. **75**, 635 (2007)
 F. Wilczek, Phys. Rev. Lett. **109**, 160401 (2012)
 P. Coleman, Nature **493**, 166 (2013)

Loss of coherence plays an essential role to determine physical ground states.



6

Macroscopic Quantum States

Type 1: Information about the entire system is not obtained by local measurement

$$|\Psi\rangle \propto (|\alpha\rangle_1 + |\beta\rangle_1) \otimes (|\alpha\rangle_2 + |\beta\rangle_2) \otimes \dots \otimes (|\alpha\rangle_N + |\beta\rangle_N)$$

-Superconductivity, Josephson effect

Type 2: Information about the entire system is obtained by local measurement

$$|\Psi\rangle \propto (|\alpha\rangle_1 \otimes |\alpha\rangle_2 \otimes \dots \otimes |\alpha\rangle_N) + (|\beta\rangle_1 \otimes |\beta\rangle_2 \otimes \dots \otimes |\beta\rangle_N)$$

-Schrödinger's cat, Greenberger-Horne-Zeilinger state, topological order, etc.

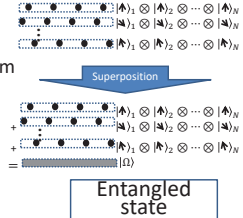
They are both superimposed states but differ in terms of measurement

7

Quantum Crystals

The symmetry broken state is **not** the true ground state

- Periodicity is not apparent from the crystal's wave function
- Periodicity appears after measurement



F. Wilczek, Phys. Rev. Lett. **109**, 160401 (2012)
P. Coleman, Nature **493**, 166 (2013)

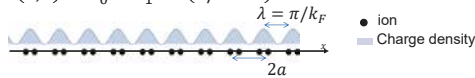
Quantum time crystal: Energy conservation implies time translation symmetry (superposition of lattice), but it may be spontaneously broken.

8

Incommensurate CDW

The Charge Density Wave (CDW) amplitude is

$$n(x, t) = n_0 + n_1 \cos(x/\lambda + \theta)$$



- Order Parameter: Macroscopic wave function
- Incommensurate CDW : $\lambda/a = \text{irrational number}$
Energy independent of $\theta \Rightarrow$ Fröhlich superconductivity

$$\frac{\lambda}{a} = 2.11 \quad \begin{array}{l} \theta = 0 \\ \theta \approx 3.05 \end{array}$$

9

ICDW Ring

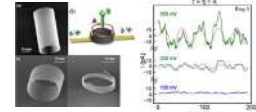


Topological crystals

S. Tanda et al., Nature **417**, 139 (2002)

- A boson, so superposition is possible
- Macroscopic wave function
- A space crystal, direct measurement is possible

Ideal space crystal with coherence.



CDW Aharonov-Bohm effect
Tsubota et al, Europhys. Lett. **97**, 57011 (2012)

10

Classical Dynamics of ICDW ring

Assumption: $\theta' = \frac{d\theta}{dx} = 0$

Consider the CDW phase

Lagrangian

[H. Fukuyama, JPSJ **41**, 513 (1976)]

$$L(\theta, \theta') = \frac{\hbar v_F}{4\pi c_0^2} \int_0^{2\pi R} dx [\dot{\theta}^2 - c_0^2 \theta'^2] = \frac{I}{2} \dot{\theta}^2$$

Fermi Velocity: v_F

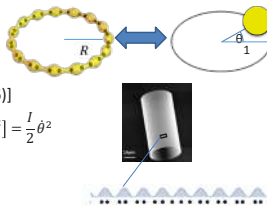
Phason velocity: c_0

Moment of Inertia: $I = R\hbar v_F/c_0^2$

Collective coordinate: $\theta(t) = 2k_F x(t)$

➤ Equivalent to a single free particle on a ring!

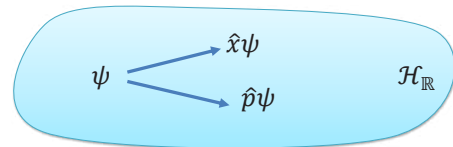
How can we quantize this system?



11

Quantization of 1D (\mathbb{R}) System

$$\{x, p\}_{PB} = 1 \rightarrow [\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar$$



12

Quantization of Periodic Systems

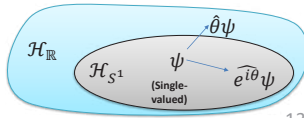
L. Susskind and J. Glogower, *Physica* **1**, 49 (1964)
 P. Carruthers and M.M. Nieto, *Rev. Mod. Phys.* **40**, 411 (1968)
 Y. Ohnuki and S. Kitakado, *J. Math. Phys.* **34**, 2827 (1993);
 S. Tanimura, *Prog. Theor. Phys.* **90**, 271 (1993)

The wave function of a ring system must be periodic
 But θ is a multivalued operator and breaks periodicity

$$[\theta, L] = i\hbar \quad \longrightarrow \quad [e^{i\theta}, L] = \hbar e^{i\theta}$$

Single-valued

We must consider the
 "weak Weyl relation"
 instead of the CCR.



13

Ground state of ICDW ring

Charge Density Operator:

$$\hat{n} \sim \widehat{\cos \theta}$$

Ground state Expectation value:

$$\langle \hat{n}(t) \rangle \sim \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} d\theta [n_L(\theta, t) + n_R(\theta, t)] = 0$$

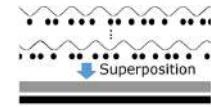
$$n_L(\theta, x, t)$$

$$n_R(\theta, x, t)$$

$$[n_L(\theta, x, t) + n_R(\theta, x, t)]/2$$

Period $P = 4\pi l / \hbar \propto R$

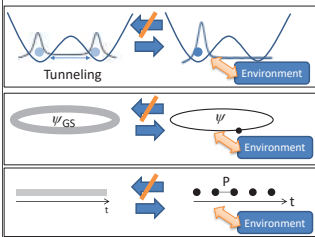
The ground state is a uniform
 superposition of CDW



14

Symmetry Breaking by Decoherence

Superposition Localization



2-state system (Leggett
et al., *Rev. Mod. Phys.*
59, 1 (1987))

Coupling with environment
 will localize the particle

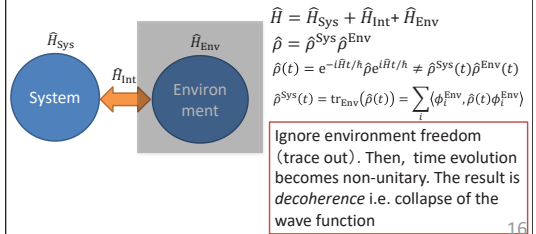
Idea: Breaking of time
 translation symmetry by
 decoherence?

15

Symmetry Breaking by Decoherence

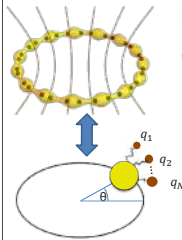
Measurement problem: How (or why) collapse of a wave function
 $\sum c_i \psi_i \rightarrow \psi_i$ occurs?

Caldeira-Leggett model: Model of measurement problem using
 interaction with an environment (Caldeira and Leggett, *Physica A*: 121:587-616 (1983))



16

Model: ICDW Ring + Environment



Consider fluctuating magnetic flux
 Environment: Harmonic oscillators $\{q_i\}$
 c.f. Caldeira and Leggett, *Physica A* **121**, 587 (1983)

$$\hat{H} = \frac{1}{2I} \left(L - \sum_j \frac{C_j}{\omega_j} \hat{q}_j \right)^2 + \sum_j \left(\frac{1}{2m_j} \hat{p}_j^2 + \frac{m_j \omega_j^2}{2} \hat{q}_j^2 \right)$$

Interaction with Environment Environment Hamiltonian

Charge density operator :

$$\hat{n} = n_0 + n_1 \hat{C}$$

Expectation value:

$$n(t) = \langle \psi_{\text{GS}} | e^{i\hat{H}t/\hbar} \hat{n} e^{-i\hat{H}t/\hbar} | \psi_{\text{GS}} \rangle$$

17

Decoherence in S^1

CDW charge density

$$n(t) \sim \langle U_t^\dagger e^{i\theta} U_t \rangle = \text{tr}_{\text{ring}} [e^{i\theta} \text{tr}_{\text{env}}(\hat{\rho}(t))] = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\theta_f} \rho(\theta_f, t) d\theta_f$$

Reduced Density Matrix

$$\rho(\theta_f, \phi_f, t) = \int_{-\pi}^{\pi} d\theta_i \int_{-\pi}^{\pi} d\phi_i \left\{ \rho(\theta_i, \phi_i, 0) \sum_{l_1, l_2 \in \mathbb{Z}} J(\theta_f + 2\pi l_1, \phi_f + 2\pi l_2, t; \theta_i, \phi_i, 0) \right\}$$

Feynman-Vernon Propagator

$$J(\theta_f, \phi_f, t; \theta_i, \phi_i, 0) = \int_{\theta_i}^{\theta_f} D\theta \int_{\phi_i}^{\phi_f} D\phi^* \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} S[\phi^+, \phi^-] - \Gamma[\phi^-] \right\} \Big|_{\phi^+ = (\phi + \theta)/2, \phi^- = \phi - \theta}$$

Classical Action

$$S[\phi^+, \phi^-] = - \int_0^t dt I \dot{\phi}^+(\tau) \dot{\phi}^-(\tau) + 2 \int_0^t dt \int_0^{\tau} ds \phi^-(\tau) \alpha_r(\tau-s) \phi^+(s)$$

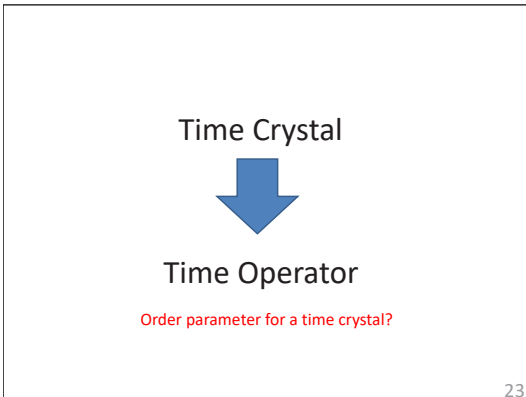
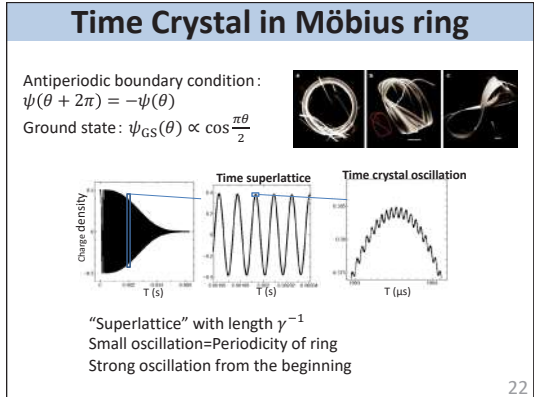
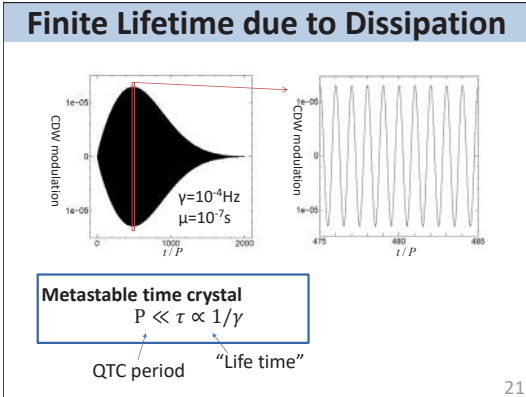
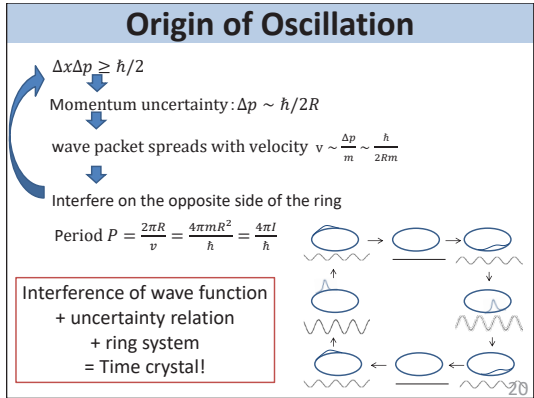
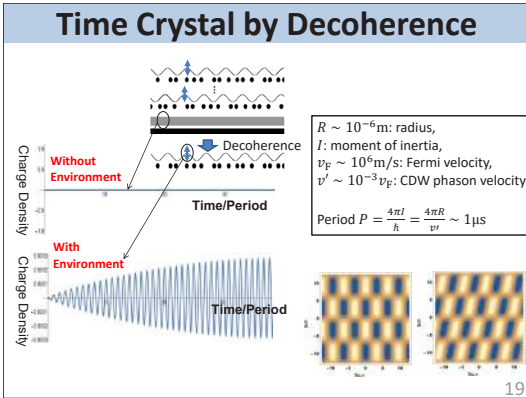
Noise Action

$$\Gamma[\phi^-] = \frac{1}{2\hbar} \int_0^t dt \int_0^{\tau} ds \phi^-(\tau) \alpha_R(\tau-s) \phi^-(s)$$

$$\alpha_R(\tau-s) = \sum_j \frac{C_j^2}{2m\omega_j} \coth \frac{\hbar\omega_j}{2k_B T} \cos \omega_j(\tau-s)$$

$$\alpha_I(\tau-s) = \sum_j \frac{C_j^2}{2m\omega_j} \left[\frac{2}{\omega_j} \delta(\tau-s) + \sin \omega_j(\tau-s) \right]$$

18



Canonical Commutation Relation

In quantum mechanics, non-commutativity of operators plays an essential role. One example is the canonical commutation relation (CCR)

$$[x, p] = i\hbar$$

From the CCR we obtain the uncertainty relation.

$$\sigma_x \sigma_p \geq \frac{\hbar}{2}$$

In relativity, time-space and energy-momentum are related. Can we obtain time operators?

$$[H, T] = i\hbar$$

24

Weyl relations

$\xrightarrow{d/ds}$ $\xrightarrow{d/dt}$
 Weyl relation Weak Weyl relation CCR

$$e^{ist} e^{itH} = e^{ist} e^{itH} e^{isT} \quad T e^{itH} = e^{itH} (T + t) \quad [H, T] = i\hbar$$

M. Miyamoto J. Math. Phys. **42**, 1038 (2001)
 A. Arai, Rev. Math. Phys. **17**, 1071 (2005)

25

Time Operator

Free particle on a line $\mathbb{R} \xrightarrow{-\frac{p}{x}}$

Y. Aharonov & D. Bohm, Phys. Rev. **122**, 1649 (1961)

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} \quad \hat{T}_{\mathbb{R}} = -\frac{m}{2} (\hat{x} \hat{p}^{-1} + \hat{p}^{-1} \hat{x})$$

$$[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar \Rightarrow [\hat{H}, \hat{T}_{\mathbb{R}}] = i\hbar$$

26

Generalized weak Weyl relation

Weak Weyl relation Canonical commutation relation
 $[\hat{B}, e^{it\hat{A}}] = t e^{it\hat{A}}$ $[\hat{A}, \hat{B}] = i$
 $\xrightarrow{d/dt}$ $\xrightarrow{d/dt}$

Generalized weak Weyl relation **Generalized CCR**
 $[\hat{B}, e^{it\hat{A}}] = \hat{K}(t) e^{it\hat{A}}$ $[\hat{A}, \hat{B}] = i\hat{K}'(0)$
 $\xrightarrow{d/dt}$ $\xrightarrow{d/dt}$

A. Arai, Rev. Math. Phys. **17**, 1071 (2005) **Ideal for ring systems!**

27

Time Operators in Terms of Time Crystals

- Time crystals seem to promote time from a parameter to a physical quantity
- In ring systems time becomes periodic and consequently form a time crystal. Consider this periodicity carefully.

$$e^{i\theta} \rightarrow \hat{W}, \quad \hat{H} = L^2/2I$$

$$\hat{W}(t) = e^{i\hat{H}t/\hbar} \hat{W} e^{-i\hat{H}t/\hbar} = \hat{W}(t + P)$$

$$\hat{f}(t) = \sum c_n \hat{W}^n(t) = \hat{f}(t + P)$$

P : Period of our time crystal

- A time operator \hat{T} for a ring should be a function of L, \hat{W}

$$\hat{T}(t) = F(\hat{\pi}_\theta, \hat{W}(t)) = \hat{T}(t + P)$$

28

Time Operators in Terms of Time Crystals

Time-of-arrival operator in S^1

$$\hat{T}_{S^1} = \frac{mR^2}{i} \left[\frac{1}{2L+\hbar} \hat{W}^\dagger - \hat{W} \frac{1}{2L+\hbar} \right]$$

$$\hat{T}_{S^1} \rightarrow \hat{T}_{\mathbb{R}}$$

Hermitian

Symmetric

Self-Adjoint

$\hat{T}_{\mathbb{R}} \xleftarrow{\text{Topology Change}} \hat{T}_{S^1} \xrightarrow{\text{Topology Change}} \hat{T}_{\mathbb{R}}$

(Time Crystal)

We obtain self-adjoint time operator in ring system

$$[\hat{S}, L] = i\hbar \hat{C} \rightarrow [\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar$$

$$[\hat{H}, \hat{T}_{S^1}] = i\hbar \hat{C} \rightarrow [\hat{H}, \hat{T}_{\mathbb{R}}] = i\hbar$$

$$\hat{S} = (\hat{W} - \hat{W}^\dagger)/2i \quad \hat{C} = (\hat{W} + \hat{W}^\dagger)/2$$

29

Time Operators in Terms of Time Crystals

Generalized weak Weyl relation $\hat{A} e^{-it\hat{B}} = e^{-it\hat{B}} (\hat{A} + \hat{K}(t))$

A. Arai, Rev. Math. Phys. **17**, 1071 (2005)

$$[\hat{A}, \hat{B}] = i\hat{K}'(t) \Big|_{t=0}$$

1D system:	A	B	K(t)	Commutation relation
	x	p	t	[x, p] = iħ
	T _ℝ	H	-t	[T _ℝ , H] = -iħ

Ring system:	A	B	K(t)	Commutation relation
	S	L	S(t) - S	[S, L] = iħC
	T _{S¹}	H	T _{S¹} (t) - T _{S¹}	[T _{S¹} , H] = iħC

30

Relationship between time crystal and time operator

- In quantum mechanics, time is regarded as **parameter**, not an operator
- Time Crystal**: Time translation symmetry becomes discrete
- Can we solve the **problem of time operator in terms of time crystals**?
- In the $R \rightarrow \infty$ limit we obtain the time operator for \mathbb{R} but with linear time evolution. This coincides with the “criticisms” of time crystal ground states (H. Watanabe and M. Oshikawa, *PRL* **114**, 251603 (2015))
- We surmise that $\tilde{K}(t)$ characterizes the time-evolution of a time crystal.
- We will have a time crystal ground state if $\tilde{K}(t) = \hat{T}(t) - \hat{T}$ has a periodic expectation value at ground state.

31

Quantum Crystals

↓

“Arai-Miyamoto Inequality”

32

The Arai-Miyamoto Inequality

Consider the weak Weyl relation (WWR)

$$TU = U(T + t)$$

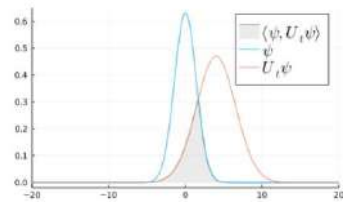
Can we obtain an uncertainty relation from the WWR? One consequence of the WWR is the “Arai-Miyamoto inequality”

$$|\langle \psi, U\psi \rangle|^2 \leq \frac{4\sigma_T^2}{t^2} \quad \text{Arai-Miyamoto Inequality}$$

M. Miyamoto *J. Math. Phys.* **42**, 1038 (2001).
A. Arai, *Rev. Math. Phys.* **17**, 1071 (2005).

33

Intuition of the Arai-Miyamoto Ineq.



$$|\langle \psi, U\psi \rangle|^2 \leq \frac{4\sigma_T^2}{t^2} \quad \text{Overlap}$$

34

Derivation of the Arai-Miyamoto Ineq.

- Rewrite the WWR into inner product form

$$\langle \psi, [U, T]\psi \rangle = \langle \psi, tU\psi \rangle$$
 which is invariant by the replacement $T \rightarrow \tilde{T} = T - \langle \psi, T\psi \rangle$

$$\langle \psi, [U, \tilde{T}]\psi \rangle = \langle \psi, tU\psi \rangle$$
- Use the triangular inequality and the Cauchy-Schwarz inequality.

$$|\langle \psi, [U, \tilde{T}]\psi \rangle| \leq |\langle \psi, U\tilde{T}\psi \rangle| + |\langle \psi, \tilde{T}U\psi \rangle| \leq 2\|U\psi\|\|\tilde{T}\psi\| = 2\sigma_T$$
 where we defined $\sigma_T = \|\tilde{T}\psi\| = \|(T - \langle \psi, T\psi \rangle)\psi\|$. Consequently, we obtain the Arai-Miyamoto inequality.

$$|\langle \psi, U\psi \rangle|^2 \leq \frac{4\sigma_T^2}{t^2}$$

35

Alternative form

- We can also replace $T \rightarrow \tilde{T} = T - \langle \psi, T\psi \rangle$, $U \rightarrow \tilde{U} = U - \langle \psi, U\psi \rangle$ in the WWR

$$\tilde{T}\tilde{U} = \tilde{U}(\tilde{T} + t),$$

$$\langle \psi, [\tilde{U}, \tilde{T}]\psi \rangle = \langle \psi, tU\psi \rangle$$

- Use the triangular inequality and the Cauchy-Schwarz inequality

$$|\langle \psi, [\tilde{U}, \tilde{T}]\psi \rangle| \leq |\langle \psi, \tilde{U}\tilde{T}\psi \rangle| + |\langle \psi, \tilde{T}U\psi \rangle| \leq 2\|\tilde{U}\psi\|\|\tilde{T}\psi\| = 2\sigma_U\sigma_T$$
 where defined $\sigma_U = \|\tilde{U}\psi\| = \|(U - \langle \psi, U\psi \rangle)\psi\|$. Consequently, we obtain the uncertainty relation.

$$\sigma_U\sigma_T \geq \frac{|\langle \psi, tU\psi \rangle|}{2}$$

- σ_T can be interpreted as some temporal uncertainty. However, it is difficult to interpret σ_U .

36

Alternative form

- σ_U is explicitly written as

$$\sigma_U^2 = \langle \psi, U^* U \psi \rangle - |\langle \psi, U \psi \rangle|^2 = 1 - |\langle \psi, U \psi \rangle|^2$$
- Therefore, we rewrite $\frac{|\langle \psi, U \psi \rangle|}{2} \leq \sigma_U \sigma_T$ into an equivalent form

$$|\langle \psi, U \psi \rangle|^2 \leq \frac{4\sigma_T^2}{(t^2 + 4\sigma_T^2)}$$

- This is a stronger form of the Arai-Miyamoto inequality.

$$|\langle \psi, U \psi \rangle|^2 \leq \frac{4\sigma_T^2}{t^2 + 4\sigma_T^2} \leq \frac{4\sigma_T^2}{t^2}$$

- At $t = 0$ we obtain the equality $|\langle \psi, \psi \rangle|^2 = 1$. Anyway, the power-law decay is important.

37

Uncertainty relation in S^1

- The Ohnuki-Kitakado quantization on S^1 is equivalent to the WWR. [Y. Ohnuki and S. Kitakado. *J. Math. Phys.* **34**, 2827 (1993)]

$$e^{i\theta} L = (L + \hbar) e^{i\theta}$$

- Several forms of position-momentum uncertainty relations have been proposed. [S. Tanimura, *Prog. Theor. Phys.* **90**, 271 (1993)]

- We propose that the Arai-Miyamoto inequality can be used as an uncertainty relation on S^1

$$|\langle \psi, e^{i\theta} \psi \rangle|^2 \leq \frac{4\sigma_L^2}{4\sigma_L^2 + \hbar^2}$$

38

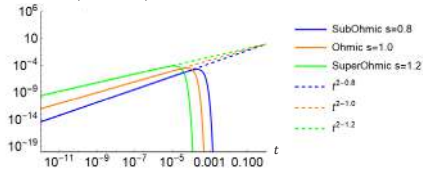
Application to time crystal

In our model of time crystal, there are two temporal scales.

- Period of the time crystal, which are eigenvalues of T_{S^1} .
- Dephasing time, which is due to coupling with environment.

Using the Caldeira-Leggett model I find $|\langle \psi, \hat{W} \psi \rangle| \propto t^{2-s}$
 where $\hat{W}(t) = e^{i\hbar t/h} \widehat{e}^{i\hbar t/h} e^{-i\hbar t/h}$

Envelope function of $|\langle \psi, \hat{W}(t) \psi \rangle|$



39

Conclusion

Arai-Miyamoto Inequality

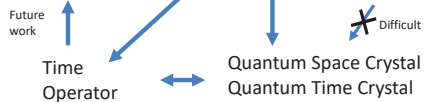
$$\text{Time} \quad |\langle \psi, e^{-i\hbar t/h} \psi \rangle|^2 \leq \frac{4\sigma_T^2}{t^2 + 4\sigma_T^2} \leq \frac{4\sigma_T^2}{t^2}$$

$$\text{Space } (S^1) \quad |\langle \psi, e^{i\theta} \psi \rangle|^2 \leq \frac{4\sigma_L^2}{4\sigma_L^2 + \hbar^2}$$

Weak Weyl relation

$$\text{Time} \quad T e^{-i\hbar t/h} = e^{-i\hbar t/h} (T + t)$$

$$\text{Space } (S^1) \quad L e^{i\theta} = e^{i\theta} (L + \hbar)$$



40

Quantum Topological Science and Technology: Real-space and K-space Topological Control

Satoshi Tanda

Department of Applied Physics, Hokkaido University
Center of Education and Research for Topological Science and Technology, Hokkaido Univ.

We have investigated “Topological Science and Technology” in terms of real-space and K-space topology. In the case of real-space, we discover topological crystals of Mobius ring and Hopf-link crystal. Using topological crystals, we also give the evidence of Aharonov-Bohm effect of charge-density waves (CDW) as macroscopic wave-functions, and precursor of Frolich superconductors, time crystals of CDW, and chiral CDW [1]. As a K-space topological control, we succeed to make Dirac fermion from Schrodinger fermion by using strain in the one dimensional materials. We were able to confirm the finding of a topological phase in unstrained TaSe3, directly visualizing the spin-momentum locking that is a hallmark signature of its topological surface states[2]. This uniaxial strain is rapidly becoming a promising tool for studying the electronic structure evolution of quantum materials, where many more discoveries can be expected.

References

- [1] Real-space Topology control; Nature 417, 397 (2002)
- [2] K-space Topology control; Nature Materials 20, 1093 (2021)

Quantum Topological Science and Technology :
Real-space and K-space
Topological Control

S.Tanda, Hokkaido Univ.

22July22 Hakata

Outline

★ Topological Science and Technology

Concept

★★ Real space Topology control

Mobius Ring, Eightfigure, Hopf link
Topological Crystals



★★★ K-Space Topology control

MX3 Topological Crystals
Strain induced Dirac-fermion



2

Topological Science and Technology
21COE Since by 2000



北海道大学・工・応用
物理学専攻
トポロジー理工学教育
研究センター
丹田 聡

メビウス結晶



3

無から有

ゼロ0の認識 7Cインデ

ドーナツの穴



いくら分解してもわからない

分解

分けて
分かる

ギリシャ 西洋的



類推

つないで
わかる

ブッダ 東洋的



今世紀に解明されないとならぬもの

生命原理



共通点

複雑・進化・
非平衡・
一度きり

社会現象



宇宙原理



新しい科学的アプローチが必要

トポロジー科学

同じ形をした
結晶は多い!

Analogy

創発性テーマの作り方

5

トポロジーとは

連続変形により不変かつ離散的な性質を抽出

コーヒーカップ = ドーナツ = 連続変形

つぎがり方に着目した形の分類とその性質

通常のリング ≠ メビウス・リング

ネットワーク・トポロジー

トポロジーを切り口に

ネットワーク

情報科学

生物科学

社会科学

形態

DNA

物質科学

ホモトピー論

数学

普遍数理科学

トポロジー

C₆₀ カーボン/チューブ

宇宙論

高温超伝導

³He超流動

物性物理学

量子渦

量子論

フラクタルホール

トポロジカル絶縁体

多様性の中の普遍性の追求

これもあれも元々は同じはず

多様な自然

この現象とあの現象は似てるなぁ

分解

類推

要素に普遍性を求める

要素還元

相補的

普遍数理

数理に普遍性を求める

数理モジュール化

数理構築

万物の理論

物の科学

形科学

自然の構造化

要素還元論

冷徹

創発

プログラミング

素粒子

西洋的

東洋的

トポロジー科学

分解の科学

類推の科学

分解の科学

ATOM DREAM PROJECT

これもあれも元々は同じはず

要素還元

西洋的

類推の科学

これもあれは似てるなぁ

普遍数理

東洋的

方法は極めてユニークで創発的

分解の科学

これもあれも元々は同じはず

要素還元

西洋的

分解の科学

金属結合

原子

核子

クォーク

クーロン力

中間子

グルーオン

ほとんどの素粒子・宇宙は実験・観測により確かめられてきた。要素還元科学

革新的実績：生物学の分野 8/14

類推の科学

粘菌と脳は同じではないか
バイオ・ネットワークの研究

中垣氏 **イグノーベル賞2回**
Nature 公表

迷路を解く粘菌。
 迷路一面に広がる1個の粘菌に餌をおくと、自らのトポロジーを変化させ最短経路にだけ体を残す。



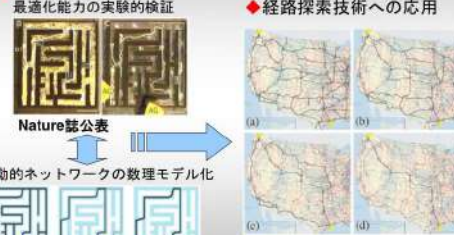
• 世界各国の新聞で報道された他、BBC、NHKなどの特集番組として放映
 • スミンニアン博物館で展示

粘菌ネットワークの最適化機構とその応用

生物科学・情報数理学の融合

- ◆ 粘菌のネットワーク最適化能力の実験的検証
- ◆ 生物型情報処理の解明
- ◆ 経路探索技術への応用

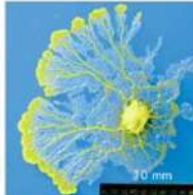
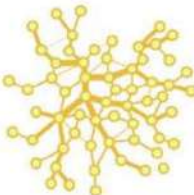
Nature誌公表



◆ 動的ネットワークの数値モデル化

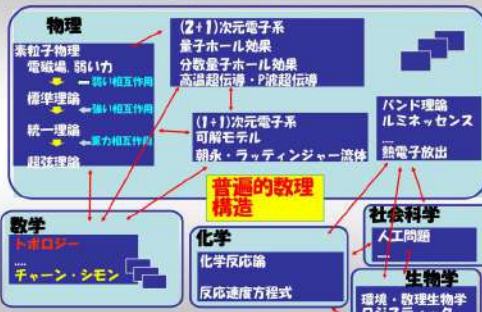
各種テレビ放映
 並列分散的な計算処理アルゴリズム(Discovery Channel特別企画)

類推の科学

粘菌ネットワーク **ITネットワーク**

普遍数理科学



物理
 素粒子物理、電磁場、弱い力、標準理論、統一理論、超弦理論

(2+1)次元電子系
 量子ホール効果、分数量子ホール効果、高温超伝導、P波超伝導

(1+1)次元電子系
 可解モデル、鎖系・ラテンジャー流体

普遍的数理構造

数学
 トポロジー、チャーン・シモン

化学
 化学反応論、反応速度方程式

社会科学
 人工問題、生物学、環境・数理生物学、ロジスティック、鹿・魚

Topological Approach

素粒子・重力場の理論	凝縮系物理
	(1+1)次元
カイラル量子異常 Chiral Anomaly	ジョセフソン素子 Josephson Junction
トポロジカルソリトン Topological Soliton	不整合CDW Incommensurate CDW
ベリー位相 Berry Phase	高分子 (分数電荷) Polymer
	光ファイバー Optical Fiber
	光スピンホール効果
	(2+1)次元
パリティ量子異常 Parity Anomaly	整数量子ホール効果 Quantum Hall Effect
	Farady Rotation
チャーン・シモン項 Chern-Simons Term	分数統計 Fractional Statistics (Anyon)
	分数量子ホール効果 FQHE
	CuO・RuO ₂ ・FeTe系超伝導
	He ₃ 渦, Graphen
	(3+1)次元
ゲージ場 Gauge Field	Aharanov-Bohm Effect
一般相対論 General Relativity	結晶転位・回位 Dislocation, Disclination

多様性の中の普遍性の追求

これもあれも元々は同じはず この現象とあの現象は似てるな

多様な自然

分解 類推

要素に普遍性を求める 数理モジュール化 数理構造

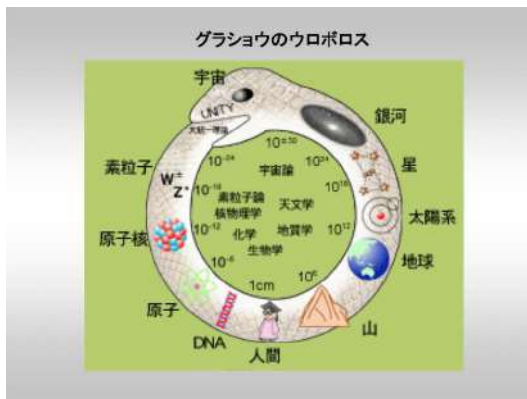
要素還元 普遍数理 数理に普遍性を求める

万物の理論 物の科学 形科学

冷徹 西洋的 創発 東洋的

相補的 自然の構造化 フログラミング

分解の科学 類推の科学



トポロジー応用科学

トポロジー変化によって系の性質はどのように変化するのか?

スピン秩序の変化 **物性物理**
 メビウス帯、カーボンナノチューブ

正常細胞組織 → がん細胞組織 (癌転化)
 細胞ネットワーク: ハブ構造 → ロバストネス (がんの増殖)

トポロジーの応用

ベリー位相デバイス **光制御工学**
 ナノチューブネットワーク **物質科学**

地下鉄ネットワーク **効率**
 ロバストネットワーク

経済学・情報学・流通

期待される成果の例(1): 癌ネットワーク組織のトポロジー診断

病理学における形の分類=診断

正常組織 vs 癌組織

従来の診断: 分解
 a, b, c (異なる形状の細胞)

マイクロな診断 → 個人の経験による判断

新しい可視化技術: 光や音波を用いた染色画像処理

つながり方診断 **トポロジー診断**

ネットワークトポロジーの定量化 (ベッチ数)

非接触で定量的な診断 原理特許

実空間トポロジー制御

Real-space Topology control;
 Nature 417, 397 (2002)

Introduction: Escher's ants

Möbius Strips II (1963) by M. C. Escher

蟻は2周してはじめて元にもどる。
 裏と表の区別がない

エキゾチックな単個性の世界

芸術家から科学者まで

帯自体 → 格子, 結晶
 蟻 → 電子, スピン, 光子, 超伝導, 電荷密度波

そういう場を作れるのか?
 何が起るのか?

東洋 > 西洋 有でもない無でもない

白隠禪師
 メビウスより100年前から直が付いていた。
 有相 (形あるもの: 形: 色)
 無相 (形なきもの: 事: 空)

有=無 → 色=空

有相でも無相でもないそれを越えた真相

色即足空, 空即足色

裏表のない心

禅画: 布袋図

及転

スイス・ドイツ・イタリアなどでも展覧会

メビウスの帯

1758年 白隠禪師(中興の祖: 禅僧: 1685~1768)
 「メビウスの帯」の禅画を描き色即空をとく
 東洋(の哲学)

1858年 メビウス (ドイツ数学者: 1790~1868)
 「メビウスの帯」を提唱
 西洋(の数学)

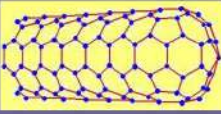
2002年 北大「メビウスの帯」結晶を発見
 東洋(の発見)
トポロジー理工学

Difficulties towards "Möbius Crystals"


Crystal rigidity (bending, twisting)

Translational periodic symmetry

Topological materials (CNT, C₆₀)



CNT
Cylindrical



C₆₀
Sphere

次元性とトポロジカル物質

3次元物質: 弾性体, パルキ
 Nb, Si, Fe: 超伝導体, 半導体, 磁性体
 NaCl, NiO, BaTiO₃: 絶縁体, 誘電体

2次元物質: 層状物質, レイヤー
 MX₂: 電荷密度波, 超伝導
 グラファイト: 半金属
 NiCl₂: 低次元スピン系

1次元物質: 針状物質, ファイバー
 MX₃: 電荷密度波, 超伝導
 ポリアセチレン: 金属
 DNA: 生体・情報物質

NaCl, Au
Nb

C60
CNT
NbSe₂

リング
メビウス結晶
NbSe₃

Fibers



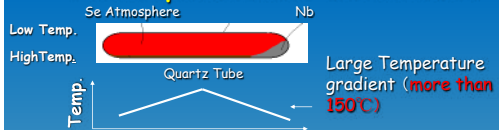
The fibers are typically 1 μ m \times 0.1 μ m (cross section) \times 10mm (long).

Ring Crystals (0π)



Seamless!!

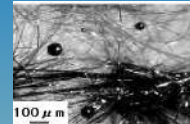
Nonequilibrium condition



Se circulates through

Vapor, mist, liquid droplet

Like a Earth system

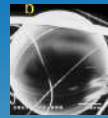


These droplet need for formation of ring crystals.

Formation of Ring Crystals



a growing crystal can eat its own tail.



The ribbon-shaped $NbSe_3$ crystals grown in the viscous Se droplet are bent due to Se surface tension.



circulating $NbSe_3$ fiber on the equator of Se droplets during growth

Seamless ring

リング及びチューブ結晶 (0π)



Tube-like



Tube with hole



Hole radius is less than $1 \mu m$!!

CDW Correlation length is $5 \mu m$, which is larger than hole radius!!

This matter is ideal system in observation of Interference effect of CDW

X-ray Diffraction

Powder Method (grinding up ring-crystals)



2θ

$NbSe_3$ Single Phase
Not Nb_2Se_3 , $NbSe_2$, Nb_3Se_4 , Nb_2Se_9

Monoclinic ($P2_1/m$) $NbSe_3$!!
lattice constants $a=10.01 \text{ \AA}$
 $b=3.48 \text{ \AA}$
 $c=15.63 \text{ \AA}$, $\beta=108.5^\circ$

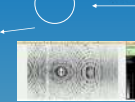
X-ray Diffraction: Ring Spring



Line is homogeneous

Imaging Plate

Ring X-ray

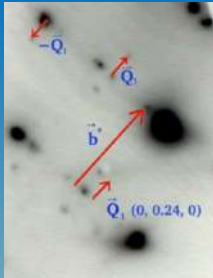


Ring X-ray



Single Crystals !!

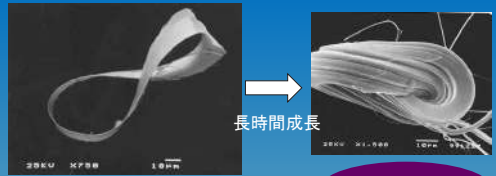
Electron Diffraction Pattern



$T_{C1} = 145K$
 $T_{C2} = 52K$
 $T = 138K$
 $Q = (0, 0.24, 0)$

Existence of CDW state in the NbSe₃ Ring-Crystals !!

8の字結晶の数学的性質 (2π)



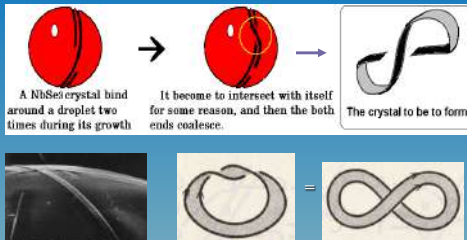
ハートマン-ニレンバーグ定理
Math. Ann. 322, 573 (2002)

最大結晶体!
ホール 2 軸は直交

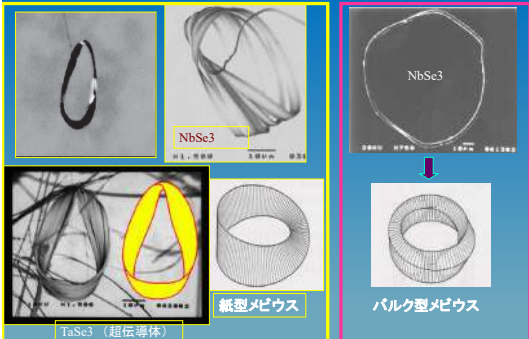
リング結晶 (0π) は自己交差がないので
無限に大きくなる → チューブ結晶

自己交差型結晶体の発見

Mechanism of formation of Figure 8 Crystals



2種類のメビウス結晶 (π)



Bending to Twisting

formation mechanism of Möbius crystals

Difficulties → twisting shear

Question is how the twisting is introduced without actual shear forces

Answer

Crystal symmetry → The bending-twisting conversion

Bending ↔ Twisting
Compliance

Monoclinic, triclinic



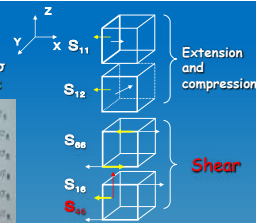
Compliance

Elasticity (Expansion of Hook's law)

$\sigma = k\varepsilon \rightarrow \varepsilon = (1/k) \times \sigma$ Stress: σ Strain: ε

S_{ijkl} Compliance tensor

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_1 &= S_{11}\sigma_1 + S_{12}\sigma_2 + S_{13}\sigma_3 + S_{14}\sigma_4 + S_{15}\sigma_5 + S_{16}\sigma_6 \\
 \varepsilon_2 &= S_{21}\sigma_1 + S_{22}\sigma_2 + S_{23}\sigma_3 + S_{24}\sigma_4 + S_{25}\sigma_5 + S_{26}\sigma_6 \\
 \varepsilon_3 &= S_{31}\sigma_1 + S_{32}\sigma_2 + S_{33}\sigma_3 + S_{34}\sigma_4 + S_{35}\sigma_5 + S_{36}\sigma_6 \\
 \varepsilon_4 &= S_{41}\sigma_1 + S_{42}\sigma_2 + S_{43}\sigma_3 + S_{44}\sigma_4 + S_{45}\sigma_5 + S_{46}\sigma_6 \\
 \varepsilon_5 &= S_{51}\sigma_1 + S_{52}\sigma_2 + S_{53}\sigma_3 + S_{54}\sigma_4 + S_{55}\sigma_5 + S_{56}\sigma_6 \\
 \varepsilon_6 &= S_{61}\sigma_1 + S_{62}\sigma_2 + S_{63}\sigma_3 + S_{64}\sigma_4 + S_{65}\sigma_5 + S_{66}\sigma_6
 \end{aligned}$$



Cubic Tetragonal Orthorhombic Monoclinic Triclinic
 Lower symmetry

Bending to Twisting

曲げ→捻り

捻り角 Angle of twist θ

捻り

断面図

$$\theta = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right) = -\frac{M}{2I} S_{35}$$

$$\theta \propto -S_{35}$$

曲げ

モノクリン NbSe₃

S_{35} = 奇数

X面を x_2 方向にシアの力を加えた時、Z面が x_3 方向に力が働く

捻りは内部的!

Evidence of Twisting

モノクリン NbSe₃

S_{35}

- zero
- nonzero
- **Shear term for Monoclinic**

twisting is introduced by bending through this mechanism without actual shear forces during the growth processes along surface

Formation of Möbius Crystals

To form a Möbius strip (1 π), a twist is needed to be introduced during spooling.

Summary of formation Mechanism

Ring (L=1) Möbius (L=3/2) Figure-8 (L=2)

So the materials are classified by **Linking number L** and Twist number N which is defined as N of a twist of Nm introduced during circling a loop.

Knot Crystals

Evolution of concept of crystal : Rotational Symmetry

e.g., Graphite

Translational symmetry

Topological defect Dislocations

e.g., CNT

Rotational symmetry

Twisting symmetry

Topological defect Dislocations

$\Phi = \varphi \cos \theta$

Möbius and 8-figure

How should these materials group have been expressed?

回位(Disclinations)とトポロジカル結晶の関係

内部回位 (Internal disclinations) 2次元面内に欠陥がある

外部回位 (External disclinations) 2次元面外に欠陥があってもよい(結晶)

局所回位 Local disclinations 局所的欠陥

Twist 局所的ツイスト

大回位 Global wedge disclinations 大回位 Global wedge disclinations

大回位 Global wedge disclinations 大回位 Global wedge disclinations

局所回位 Local wedge disclinations

Topological Defect 局所の特異点表現

Topological Crystals 大回位 Global wedge disclinations

外部大回位をもつ結晶 \leftrightarrow チューブ結晶

Topological Crystals の分類

外部大局回位 ($w=2m\pi$) をもつ結晶 ⇔ チューブ結晶、リング結晶
さらに外部大局ひねり回位 ($w^*=n\pi$) をもつ結晶 ⇔ メビウス結晶、8の字結晶



Ring

$w = 2\pi$
 $w^* = 0\pi$
 $L_k = 1$



Möbius

$w = 2\pi$
 $w^* = 1\pi$
 $L_k = 3/2$



Figure-8

$w = 2\pi$
 $w^* = 2\pi$
 $L_k = 2$

$L_k = (w + w^*) / 2\pi = m + n/2$

リンキング数
結び目結晶をはじめ
めて定義

(旧来の結晶学)
局所理論
Frank index (w, w^*)
微分幾何学

トポロジーは局所的性質と大局的性質を相補的に結びつける方法ともいえる

大局的表現
Linking数
 L_k (大局的)
位相幾何学

$$\frac{1}{2\pi} \int_{crystal} f(w, w^*) dV = L_k$$

Classification of Topological Crystals

w : Wedge Disclinations
 w^* : Twist


w^* , w is independent, respectively, due to the topological defect theory of the crystals, as yet. (by Frank)

$w = 1/2\pi$
 $w^* = 0\pi$

$w = 2\pi$
 $w^* = 0\pi$


New Definition!
Knot Theory

$L_k = (w + w^*) / 2\pi - 1$
Linking Number



Ring

$w = 2\pi$
 $w^* = 0\pi$
 $L_k = 0$



Möbius

$w = 2\pi$
 $w^* = 1\pi$
 $L_k = 1/2$





Figure-8

$w = 2\pi$
 $w^* = 2\pi$
 $L_k = 1$


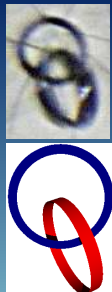


3π Möbius

$w = 2\pi$
 $w^* = 3\pi$
 $L_k = 3/2$

Knots Crystals !!

ところが、リンキング数でも定義できない？

Matsuura, et al.: JCG (2006)
松浦・松山・轟中・山中・豊島・丹田

ホップリンク結晶の発見

埋め込み多様体として結晶を分類

NbSe₂ トポロジカル結晶

世界初のホップリンク結晶
Matsuura, Matsuyama, Tanda: JCG (2006)



球面 クラインの瓶 トーラス ダブルトーラス 埋め込み多様体

局所的理論ではなく、大局的な埋め込み多様体として分類されなければならない
→ 新しい結晶学の構築

New classification of crystals

Crystallography + Mathematics = embedding manifolds

Topological Crystals

Ring: $n=0$ Möbius: $n=\pi$ Figure-8: $n=2\pi$

Noriaki Taniai, Taku Tomita, Yoshitoki Okamoto, Kazuhiko Inagaki, Kazuhiko Yamaya, and Noriyuki Hatakenaka, Nature 417, (2002) 397

Hopf link Crystal

T. Matsuura, M. Yamazaki, N. Hanikawa, T. Matsuyama, and S. Tanda, J. Cryst. Growth 297 (2006) 157

結晶の定義 (結晶学上)

Bragg反射の示す物質
国際結晶学連合 (1991)

- 結晶
 - 通常の結晶
 - 並進対称性・点群
 - 超格子結晶
 - 低次元結晶
 - 非並進結晶
 - 回転対称性・点群
 - 準結晶
 - 非整合結晶
 - トポロジカル結晶
 - 回転対称性・ひねり
 - 点群・微分幾何・位相幾何
 - 埋め込み多様体
 - 管状結晶 (CNT, リング結晶)
 - 球面結晶 (C₆₀, Onion)
 - メビウス結晶
 - ホップリンク結晶
 - DNA ring
- 液晶
 - プラスチック
- 非晶 (アモルファス)

Definition of Crystals

Crystals show Bragg reflection

Bragg reflection of electron beam/X-ray

Mathematically, Fourier transform from real space (lattice) to *k*-space (Bragg spots)

$n\lambda = 2d \sin \theta$

Crystals and quasicrystals show sharp Bragg spots

?

Copyright © 2002 Nature

X-ray Diffraction: Ring Spring

Imaging Plate

Ring X-ray

X-ray

Ring

Line is homogeneous

Single Crystals !!

63

LETTERS TO NATURE

Helical microtubules of graphitic carbon

Sumio Iijima

NEC Corporation, Fundamental Research Laboratories, 34 Miyukigaoka, Tsukuba, Ibaraki 305, Japan

This synthesis of molecular carbon structures in the form of C₆₀ and other fullerenes¹ has stimulated intense interest in the structures accessible to graphitic carbon sheets. Here I report the preparation of a new type of finite carbon structure consisting of needle-like tubes. Produced using an arc-discharge evaporation method similar to that used for fullerene synthesis, the needles grow at the negative end of the electrode used for the arc discharge. Electron microscopy reveals that each needle comprises coaxial tubes of graphitic sheets, ranging in number from 2 up to about 50. On each tube the carbon atoms hexagons are arranged in a helical fashion about the needle axis. The helical pitch varies from needle to needle and from tube to tube within a single needle. It appears that this helical structure may aid the growth process. The formation of these needles, ranging from a few to a few tens of nanometres in diameter, suggests that engineering of carbon structures should be possible on scales considerably greater than those relevant to the fullerenes.

64

Electron beam

1 2 3

V H

V C C

FIG. 2 Cinographic view of a possible structural model for a graphitic tube. Each cylinder represents a coaxial closed layer of carbon hexagons. The meaning of the labels V and H is explained in the text.

65

Electron beam

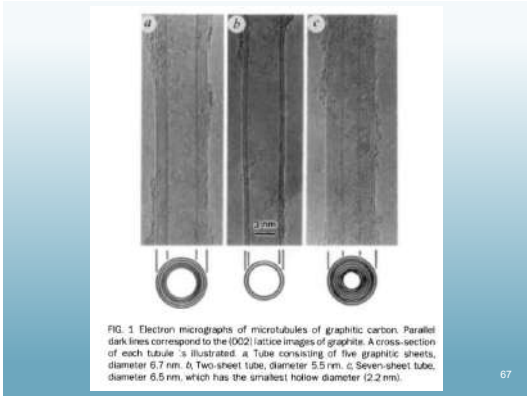
1 2 3

V H

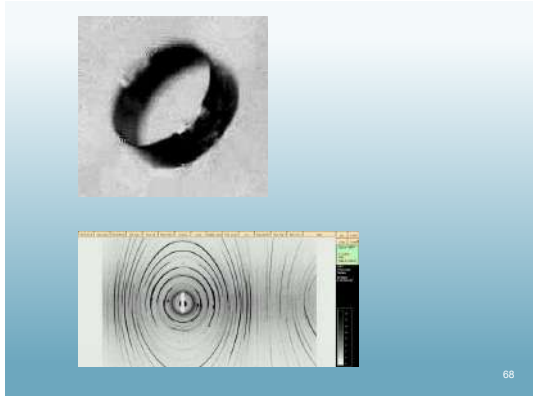
V C C

FIG. 2 Cinographic view of a possible structural model for a graphitic tube. Each cylinder represents a coaxial closed layer of carbon hexagons. The meaning of the labels V and H is explained in the text.

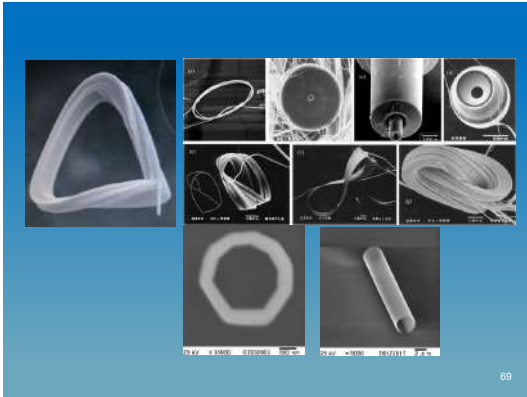
66



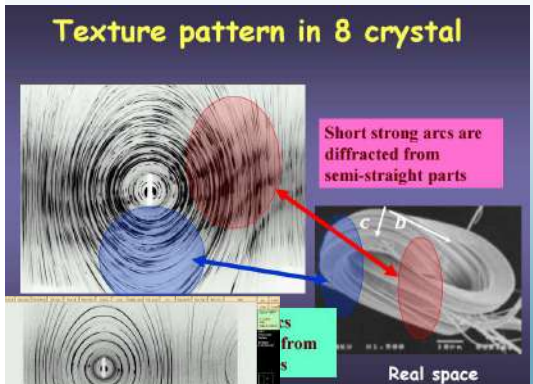
67



68



69



K空間トポロジー制御

K-space Topology control;
Nature Materials 20, 1093 (2021)

71

実空間トポロジーとK空間トポロジー

<p>大局的な束縛条件 (通常は境界条件)</p> <ul style="list-style-type: none"> • 球面にはエニオンがない。 • 数学的には向き付け不能体にはスピンをはれない。(メビウス帯) • メビウス超伝導リングにおいて、Little-Parks 振動がある。(林・高志沢、東北大 JPSJ 2001, 2005) • メビウスにおけるイジングモデル (岡部・金田, PRL 2001, 2004) 	<p>量子異常: 凝縮系に適用</p> <p>カイラル異常</p> <ul style="list-style-type: none"> • スペクトラルフロー (林) • He3 滴の準粒子 (Volovik, 1982)・量子ホール効果: (Matsuyama, 1982, Thouless; 波動関数の曲率の積分=チャーン数) • グラファイト副格子: (Semenoff, 1984, Jackiw) Diracフェルミオン(波動関数のスピノール表示)・金属CNTには後方散乱がない(空藤、JPSJ 1999)
---	---

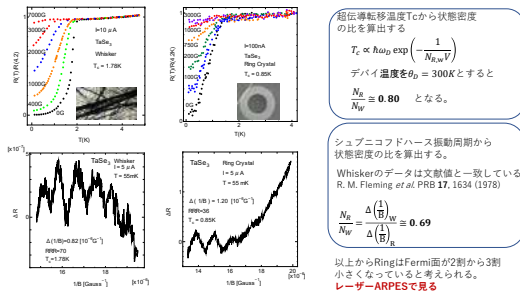
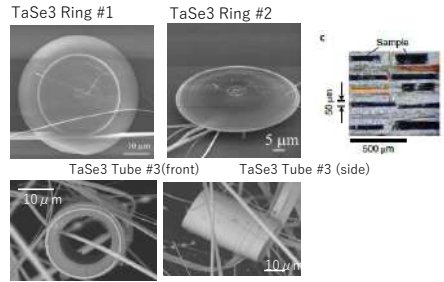
K空間トポロジーの制御:一軸性圧力、リング化



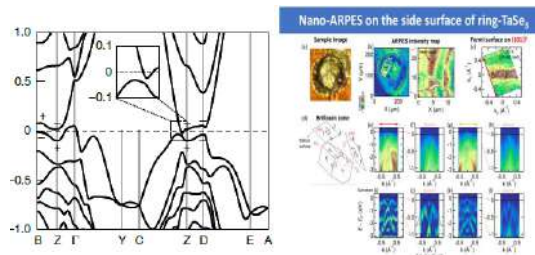
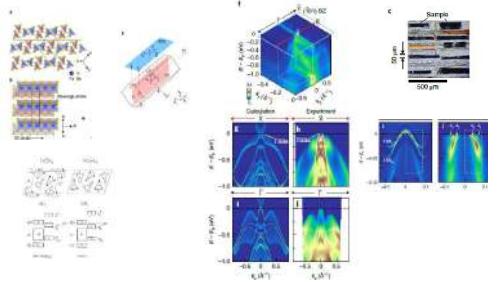
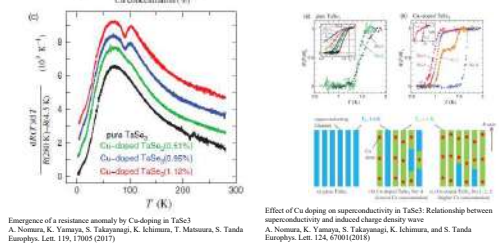
Visualization of the strain-induced topological phase transition in a quasi-one-dimensional superconductor TaSe₃

Chen Liu¹, Masayuki Ochi¹, Ryo Nagai¹, Kenta Kaneda¹, Masahito Sakoda¹, Atsushi Nomura¹, Masakazu Tsubota¹, Peng Zhang¹, Cedric Barthele¹, Kifu Kurakawa¹, Yusuke Arai¹, Kaichu Kawaguchi¹, Hiroaki Tanaka¹, Koichiro Yaji¹, Ayumi Marasawa¹, Makoto Hashimoto¹, Donghui Lu², Shik Shin², Ryotaro Arita^{2,3}, Satoshi Tenda^{2,3} and Takashi Kondo^{1,4}*

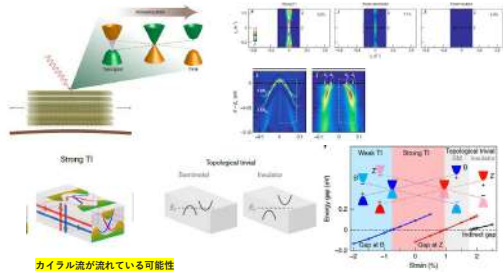
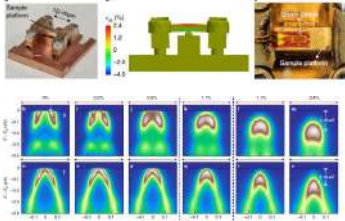
Control of the phase transition from topological to normal insulators can allow for an on/off switching of edge currents. While topological phase transitions have been revealed by elemental calculations in semiconducting alloys, such an approach requires preparation of materials with various compositions. Thus it is difficult for a flexible device application, which demands a reversible operation. Here we use angle-resolved photoemission spectroscopy and spin- and angle-resolved photoemission spectroscopy to visualize the strain-driven band-structure evolution of the quasi-one-dimensional superconductor TaSe₃. We demonstrate that an isotropic-reversible strain-based topological phase transition from a strong topological insulator phase with spin-polarized, quasi-one-dimensional topological surface states, to topologically trivial semiconductors and band insulating phases. The spin-orbit-dependent superconductor TaSe₃ provides a suitable platform for engineering the topological superconductors, for example as an on/off switch for a spin current that is robust against impurity scattering.



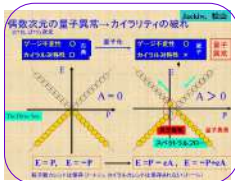
CuドーピングTaSe₃ ⇒ induced CDW + Superconductors



Ringのデータを精密に理解する⇒曲げて一軸性圧力



量子アノマリー：正則化によるヘリシティ安定化 (半古典的解釈)



ゲージ場のヘリシティ
 1 + 1次元の渦：E
 2 + 1次元の渦：AB
 3 + 1次元の渦：EB
 +
 粒子のヘリシティ
 カイラルカレント

粒子とゲージ場が相互作用しているため両方にヘリカル不安定性が現れ⇒両方も正則化による安定を図る。しかも偶然じゃなく必然に。(Atiyah-Singerの指数定理)

Helical instability

Ordered state Gauge, Spacetime

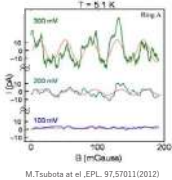
In nematic liq. Crystals, the excess of chiral molecules leads to the helicity. Helicity/chiral current in the cholesteric structure.

In Standard model, particle-hole pair (vacuum polarizers) make helicity/chiral current in the gauge fields as quantum anomalies. Adler-Bell-Jackiw

E: Chiral Anomaly (1+1)D
 A-B: Parity Anomaly (2+1)D
 E-B: Chiral Anomaly (3+1)D

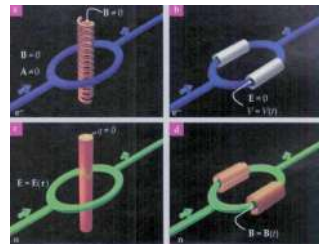
非線形伝導領域のCDWそのものの量子干渉

TaS₅は量子干渉効果が効くことが発見された：AB効果
 垂直磁場を印加することで真の磁気抵抗が生じる




K.Inagaki et al. PRB 93,075423(2016)
 磁抵抗の変化率-1.0%

$$L = \frac{1}{2} \delta_1^2 + \frac{1}{2} \delta_2^2 - W[1 - \cos(\phi_1 - \phi_2)] - \frac{e}{\pi c} A(\delta_1 + \delta_2)$$


$$L_p(\phi) = N_p \left[\frac{1}{2} \delta^2 + (\epsilon_1^2 / 2) (\delta^2)^2 - (N_p \epsilon_1^2 / M^2) (1 - \cos M\phi) - (ie / \pi c) A \phi \right]$$


実空間トポロジーとK空間トポロジー

<p>大域的な束縛条件 (通常は境界条件)</p>  <ul style="list-style-type: none"> 球面にはエニオンがない。 数学的には向き付け不能体にはスピンをはれない。(メビウス帯) メビウス超伝導リングにおいて、Little-Parks π 振動がある。(林・高志沢、東北大 JPSJ 2001, 2005) メビウスにおけるイジングモデル(岡部・金田, PRL 2001, 2004) 	<p>量子異常:凝縮系に適用</p> <p>カイラル異常</p> <ul style="list-style-type: none"> スペクトラルフロー(体) He3滴の準粒子(Velovich 1982)・量子ホール効果:(Matsuyama 1982, Thouless: 波動関数の曲率の積分=チャーン数) グラファイト副格子:(Semenoff 1984, Jackiw) Diracフェルミオン(波動関数のスピノール表示)・金属CNTには後方散乱がない(安藤、JPSJ 1999)
---	---

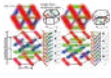
自発的対称性の破れ+NGボソンのMassive化 \Rightarrow ヘリシティ

Since the macroscopic-order contain the first-order derivative of the order parameter, **helical term** cause instability of the vacuum toward the spatially inhomogeneous



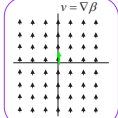
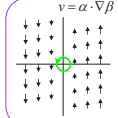
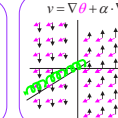
Ordered state

In nematic liq. Crystals, the excess of the chiral molecules leads to the helicity term, $\eta \cdot (\nabla \times \eta)$ and to the cholesteric structure.



- Higgs機構 局在化
- NGボソンの質量化
- ゲージ場の質量化
- Helicity機構 局在化
- NGボソンのスピニ化
- 粒子と場が相互作用してれば場の幾何学によりトポロジカルになる

Helical Dynamics of particles in $v = \nabla\theta + \alpha \cdot \nabla\beta$ Clebsch parametrization θ, α, β ; scalar functions

 <p>$v = \nabla\beta$</p>	 <p>$v = \alpha \cdot \nabla\beta$</p>	 <p>$v = \nabla\theta + \alpha \cdot \nabla\beta$</p>
<p>Emergent of flow</p> <p>$\omega = \nabla \times v = \nabla \times (\nabla\beta) = 0$</p> <p>$v$ is irrotational</p>	<p>Emergent of Vortex</p> <p>$\omega = \nabla \times v = \nabla \times (\alpha \cdot \nabla\beta)$ $= \nabla \alpha \times \nabla\beta$</p> <p>$\Gamma = \int \omega \cdot dr^2 = \int \omega \cdot v \cdot dr$</p>	<p>Emergent of Helicity</p> <p>$\theta - \int \beta \cdot \alpha =$ $-\int \alpha^i (\nabla^j \theta + \alpha \cdot \nabla\beta) (\nabla^i \alpha + \nabla^j)$ $-\int \alpha^i \nabla^j (\alpha \cdot \nabla\beta)$ $-\int \alpha^i \nabla^j (\alpha \cdot \nabla\beta) - \int \alpha^i \nabla^j (\alpha \cdot \nabla\beta)$</p>
<p>Γ: Topological Invariant</p>		<p>H: Helicity (Kinematics)</p>

対称性の破れとヘリシティ

揺らぎが局所的、大域的な渦やヘリシティをつくる。それらは余ったエネルギーを蓄え系を安定化させるように働く

自発的対称性の破れ+揺らぎ (量子/古典) \Rightarrow ヘリシティ構造の出現

液晶、結晶、DNA、古典流体、量子流体、超伝導、CDW


磁性体、生物、、、、NGボソンのHiggs化: Massive

量子的対称性の破れ (正則化) \Rightarrow CS ゲージ場、粒子ゲージ相互作用

必然 トポロジカル安 量委ホール液体 (非相対論、相対論)、パイオン崩壊

時空的対称性の破れ (正則化) \Rightarrow CS 重力場、スピン-重力相互作用

粒子場ヘリシティの出現? フラットローテーションカーブ ジェット現象?



B 中間子崩壊に見る素粒子物理と量子力学の基礎との交流

筒井 泉

高エネルギー加速器研究機構・素粒子原子核研究所

量子力学の基礎研究は、遡れば量子力学の建設直後に行われたアインシュタインとボーアの論争に端を発する。その最大の論点は、1935年にアインシュタインらがEPR論文の中で提出した量子力学の完全性への疑問であり、ここにおいて量子もつれ(entanglement)と非局所実在性との矛盾が指摘された。これに対して、ボーアは量子世界における測定の状況依存性を提示して反論したが、両者の論争は決めてを欠くままに30年近く放置された。これに風穴を開け、ベル不等式の検証を通して両者の是非を判定できることを示したのがベルの1964年の論文であり、70年代以降、徐々に量子力学の基礎研究の研究が盛んになる。90年代以降の量子情報科学はその発展に触発されたものであり、その技術的な基盤は量子もつれを初めとした量子力学の基礎にある。本年(2022年)のノーベル物理学賞は、このベル不等式の検証実験を通して量子情報科学の発展に道を開いた功績に対して与えられた。

この量子力学の基礎の研究は、これまでは比較的取り扱いが容易で量子もつれ状態を作り易い光子を用いて行われるのが標準的であり、これに僅かに電子や核子、イオン等が加わる程度であった。一方、高エネルギー加速器を用いた素粒子実験では、近年、 CP 対称性の研究のために量子もつれ状態にある B 中間子が大量に生成されており、ここでのベル不等式の検証実験の可能性が模索されるようになってきた。これは従来の低エネルギー領域で行われた研究領域を一気に拡大するだけでなく、素粒子物理の研究の方の視野をも拡大する機運となる。逆に、量子力学の基礎研究において提案された新しい物理量である「弱値(Weak Value)」という概念を用いて、 CP の破れをより高精度に行うことも考えられ、将来の量子力学の基礎と高エネルギー物理との相互の裨益関係をもたらすものとして期待される。

本講演は、この量子力学の基礎と高エネルギー(素粒子)物理との最近の研究上の「交流」の最近の状況について、共同研究者と行った B 中間子実験に関する2つの研究に基づく報告である。その一つは上述の弱値(その測定方法は弱測定と呼ばれる)を通した CP 対称性の破れの精密測定の可能性[1, 2]であり、もう一つはベル不等式の高エネルギーでの検証実験の可能性[3]である。特に後者では、本年よりRun-3として稼働が始まったCERNのATLAS実験において検証される見込みが十分にあることが示される。以下に講演で用いたスライドを(一部省略して)添附する。

REFERENCES

- [1] *Weak value amplification in high energy physics: A case study for precision measurement of CP violation in B meson decays*, S. Higashino, Y. Mori, Y. Takubo, T. Higuchi, A. Ishikawa and I. Tsutsui, *Phys. Rev. D* **104** (2021) 033001.
- [2] *Weak-value amplification and the lifetime of a decaying particle*, Y. Mori and I. Tsutsui, *Phys. Rev. A* **104** (2021) 032202.
- [3] *Feasibility of Bell Inequality Violation at ATLAS Experiment with Flavor Entanglement of B^0 \bar{B}^0 Pairs from pp Collisions*, Y. Takubo, T. Ichikawa, S. Higashino, Y. Mori, K. Nagano and I. Tsutsui, *Phys. Rev. D* **104** (2021) 056004.

内容

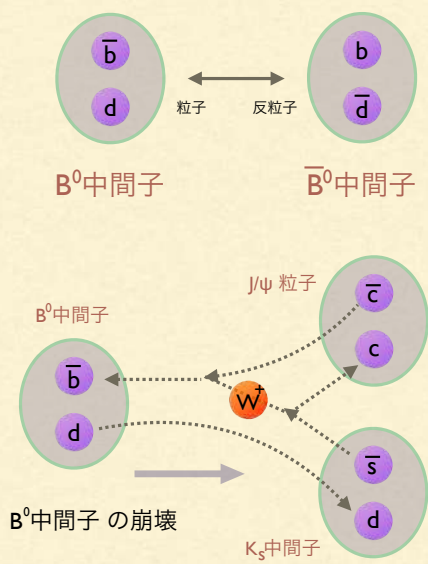
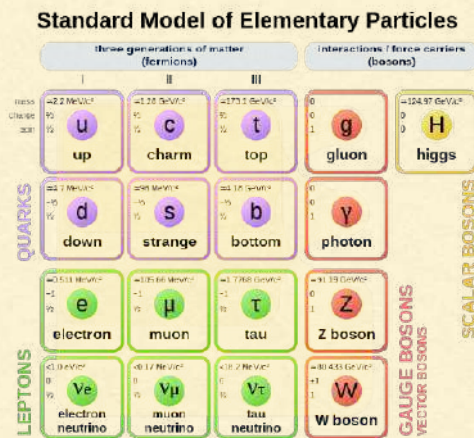
1. B 中間子とは：量子もつれと素粒子実験
2. 弱測定と崩壊寿命の変化：CP 対称性の破れ
 - 弱測定による崩壊寿命の変化
 - Belle II (KEK) での長寿命化と CP の破れの精密測定の可能性
3. B 中間子と Bell 検証実験
 - 高エネルギー物理における Bell 不等式（局所実在性）の検証
 - ATLAS (CERN) での Bell 検証実験の可能性

文献:

- [1] Y. Mori and I.T., Phys. Rev. A.104 (2021) 032202.
- [2] S. Higashino et al., Phys. Rev. D.104 (2021) 033001.
- [3] Y. Takubo et al., Phys. Rev. D.104 (2021) 056004.

1

I. B 中間子とは：量子もつれと素粒子実験



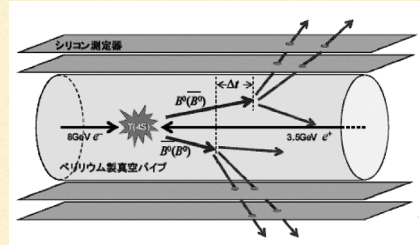
2

B 中間子の生成

KEK (高エネルギー加速器研究機構)



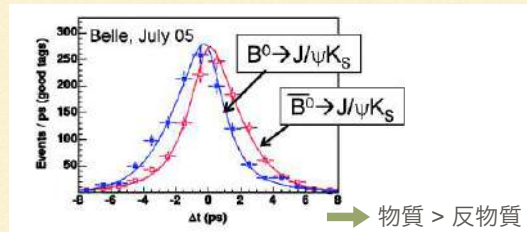
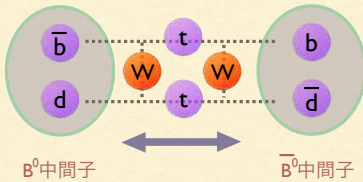
Belle 実験



電子-陽電子衝突 (8+3.5GeV)

B 中間子の量子振動

CP対称性の破れ



3

2. 弱測定と崩壊寿命の変化：CP 対称性の破れ

弱測定とは？

Standard formulation of quantum mechanics

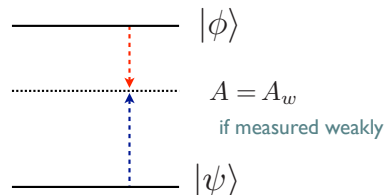


$$A = a_n \quad \text{固有値}$$

$$\langle A \rangle := \langle \psi | A | \psi \rangle \quad \text{期待値}$$

Time-symmetric formulation of quantum mechanics

Y. Aharonov, et al. (1964)

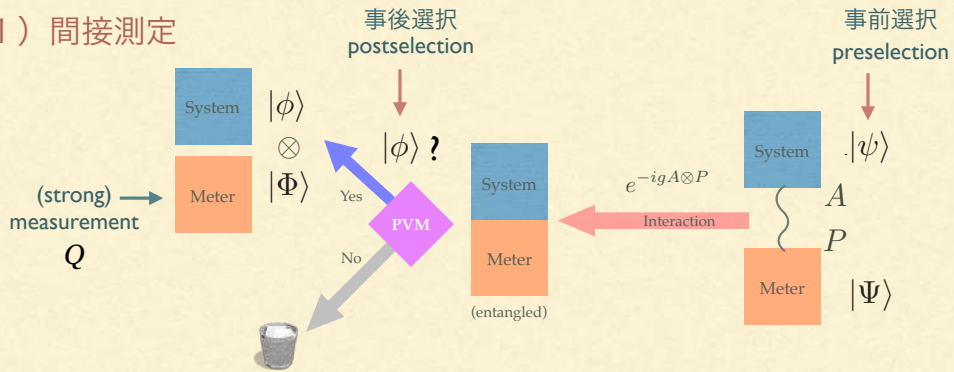


$$A_w := \frac{\langle \phi | A | \psi \rangle}{\langle \phi | \psi \rangle} \quad \text{弱値 weak value}$$

4

弱値 A_w の測定方法

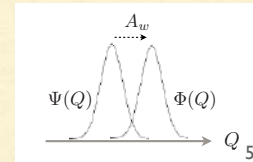
1) 間接測定



事後選択後の測定器の状態

$$\begin{aligned}
 |\Phi\rangle &= \langle\phi|e^{-igA \otimes P}|\psi\rangle|\Psi\rangle \simeq \langle\phi|[1 - igA \otimes P]|\psi\rangle|\Psi\rangle \\
 &= \langle\phi|\psi\rangle \left[1 - ig \frac{\langle\phi|A|\psi\rangle}{\langle\phi|\psi\rangle} P \right] |\Psi\rangle \\
 &= \langle\phi|\psi\rangle [1 - ig \underline{A_w} P] |\Psi\rangle \simeq \langle\phi|\psi\rangle e^{-igA_w P} |\Psi\rangle
 \end{aligned}$$

for $g|A_w| \ll 1$



2) 直接測定

遷移（確率）振幅

$$\begin{aligned}
 \langle\Phi|\Psi(t)\rangle &= \langle\Phi|e^{-it\hat{H}}|\Psi\rangle \\
 &\simeq \langle\Phi|(1 - it\hat{H})|\Psi\rangle \\
 &= \langle\Phi|\Psi\rangle (1 - itH_w) \\
 &\simeq \langle\Phi|\Psi\rangle e^{t \text{Im}[H_w] - it \text{Re}[H_w]}
 \end{aligned}$$

量子系が放射性粒子の場合：

$$\hat{H} = \underbrace{\left(M - \frac{i}{2}\Gamma \right)}_{\text{平均質量と崩壊幅}} \hat{1} + g\hat{A} \quad \text{と置く}$$

平均質量と崩壊幅

代入すると遷移振幅は

$$\langle \Phi | \Psi(t) \rangle = e^{-t\frac{\Gamma}{2}} e^{-itM} \langle \Phi | e^{-itg\hat{A}} | \Psi \rangle$$

遷移確率

$$|\langle \Phi | \Psi(t) \rangle|^2 = e^{-t\Gamma} |\langle \Phi | \Psi \rangle|^2 e^{2tg\text{Im}[A_w]}$$

$$A_w = \frac{\langle \Phi | \hat{A} | \Psi \rangle}{\langle \Phi | \Psi \rangle}$$

↑
標準的な指数崩壊因子

↑
弱値による付加因子

(事後選択の下での) 条件つき崩壊寿命

$$\tau(\Psi \rightarrow \Phi) := \frac{\int_0^\infty dt t |\langle \Phi | \Psi(t) \rangle|^2}{\int_0^\infty dt |\langle \Phi | \Psi(t) \rangle|^2} \simeq \frac{1}{\Gamma} + \frac{2g}{\Gamma^2} \text{Im}[A_w]$$

↑
寿命の変化 (延命効果)

7

例) 2状態系では:

$$\hat{H}|P_L\rangle = \left(M_L - \frac{i}{2}\Gamma_L \right) |P_L\rangle,$$

$$\hat{H}|P_H\rangle = \left(M_H - \frac{i}{2}\Gamma_H \right) |P_H\rangle, \quad (M_L \leq M_H)$$

平均質量と平均崩壊幅

$$M = \frac{M_L + M_H}{2} \quad \Gamma = \frac{\Gamma_L + \Gamma_H}{2}$$

→
$$\hat{H} = \left(M - \frac{i}{2}\Gamma \right) \hat{1} + g\hat{A}$$

with
$$g = \frac{\Delta M}{2} \quad \text{and} \quad \Delta M = M_H - M_L$$

8

崩壊寿命の変化

変化率

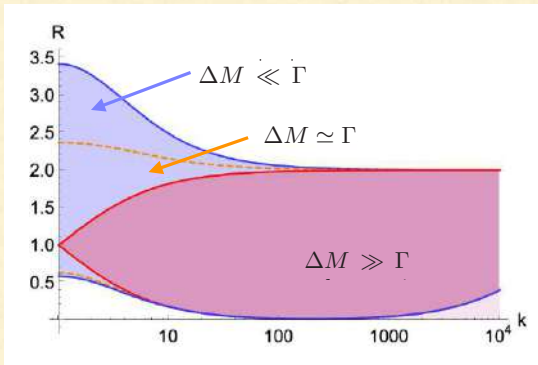
$$R = \frac{\tau(\Psi \rightarrow \Phi)}{\tau(\Psi)}$$

標準的な (条件なしの) 寿命

事前選択状態を固定： $|\Psi\rangle$

事後選択状態を任意に変化させる： $|\Phi\rangle$

3つの場合に分けて変化率を計算



i) $\Delta M \ll \Gamma$

ex.) D meson: $\Delta M/\Gamma \sim 10^{-3}$ and $k = 1$

ii) $\Delta M \simeq \Gamma$

ex.) B meson: $\Delta M/\Gamma = 0.77$ and $k = 1$

iii) $\Delta M \gg \Gamma$

ex.) B_s^0 meson: $\Delta M/\Gamma = 26.89 \pm 0.07$

$$k = \frac{\Gamma_H}{\Gamma_L}$$

Y. Mori and I.T., Phys. Rev. A.104 (2021) 032202 9

B 中間子系

$$\hat{H}|B_L\rangle = \left(m_L - \frac{i}{2}\Gamma_L\right)|B_L\rangle,$$

$$m_L < m_H$$

$$\hat{H}|B_H\rangle = \left(m_H - \frac{i}{2}\Gamma_H\right)|B_H\rangle,$$

エネルギー固有状態

$$|B_L\rangle = p|B^0\rangle + q|\bar{B}^0\rangle$$

$$\begin{matrix} p, q \\ \text{complex numbers} \end{matrix} \quad |p|^2 + |q|^2 = 1$$

$$|B_H\rangle = p|B^0\rangle - q|\bar{B}^0\rangle,$$

CP はHの厳密な対称性ではなく、上の固有状態は CP の固有状態ではない

CP の破れの情報は係数パラメータ p, q に含まれる

$\frac{p}{q} = \frac{|p|}{|q|} e^{i\varphi} \longrightarrow$ 相対位相 φ を精密に測定することで
CPの破れを精密測定

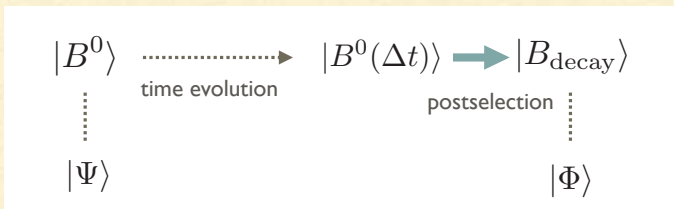
$|\Psi\rangle = |B^0\rangle$ の時間発展 対生成の相手の中間子の崩壊データからこちらの中間子の状態が決まる：量子もつれ

$$|B^0(\Delta t)\rangle = e^{-i\Delta t \hat{H}} |B^0\rangle.$$

事後選択状態が任意に選べるとすれば

$$|\Phi\rangle = |B_{\text{decay}}\rangle = r|B^0\rangle + s|\bar{B}^0\rangle$$

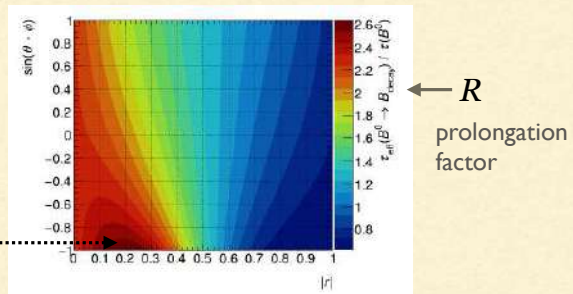
事後選択パラメータ r, s 規格化条件 $|r|^2 + |s|^2 = 1$



➡ ‘直接測定’の方法が適用可能

実際の Belle II 実験の場合

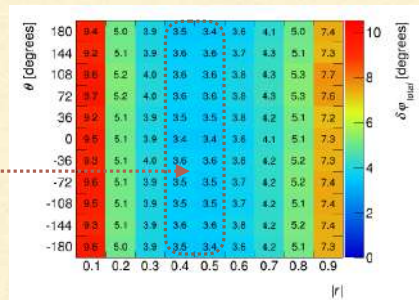
- ・ 寿命延長率



2.6 倍まで延長

- ・ 測定精度の向上 $(\delta\varphi_{\text{total}})$

位相 φ 測定の誤差は 20% 向上



3. B 中間子とBell 検証実験

Bell 検証実験 (Bell テスト)

J. Bell (1964)

局所实在論 (LRT)	隠れた変数 λ	確率分布 $\rho(\lambda)$
測定結果	$A(a, \lambda) = \pm 1$	$B(b, \lambda) = \pm 1$
相関	$C(a, b) = \int d\lambda \rho(\lambda) A(a, \lambda) B(b, \lambda)$	
	$ C(a, b) - C(a, b') + C(a', b) + C(a', b') \leq 2$	
		Bell (CHSH) 不等式

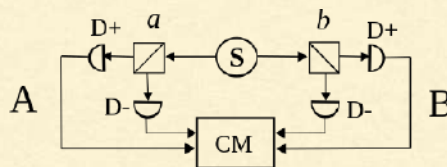
測定方向 a, b は自由に選択できると仮定

量子もつれ状態では不等式は破れる

13

標準的な Bell テスト

スピン単項状態 (量子もつれ状態) の下での相関の測定



量子相関

$$C(a, b) = \langle \psi | A(a) \otimes B(b) | \psi \rangle$$

$$A(a) = \vec{\sigma} \cdot \vec{a} \quad B(b) = \vec{\sigma} \cdot \vec{b} \quad |\vec{a}| = |\vec{b}| = 1$$

例)

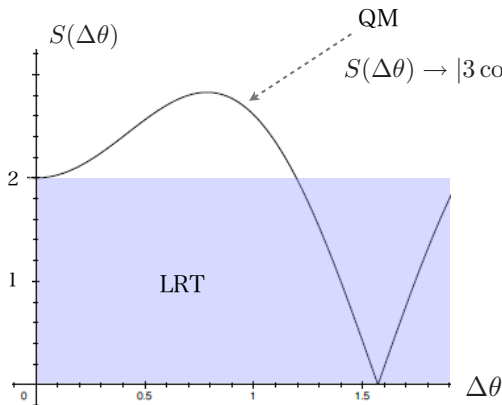
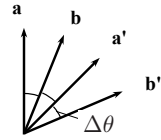
$$A(a) = \sigma_z \quad B(b) = \sigma_z \cos(\Delta\theta) + \sigma_x \sin(\Delta\theta)$$

→ $C(a, b) = -\cos(\Delta\theta)$ for $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle|-\rangle + |-\rangle|+\rangle)$

14

Bell不等式 (左辺) の相関

$$S(\Delta\theta) = |C(a, b) - C(a, b')| + |C(a', b') + C(a', b)|$$



局所实在論と量子力学との矛盾

LRT

QM

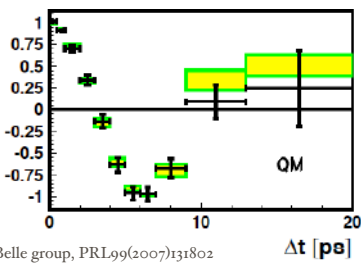


VS

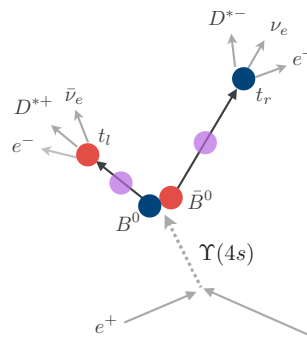


Belle 実験 (KEK・2007) : 素粒子実験でのBell テストの最初の試み

$$e^+ e^- \rightarrow \Upsilon(4s) \rightarrow \frac{|B^0\rangle|\bar{B}^0\rangle - |\bar{B}^0\rangle|B^0\rangle}{\sqrt{2}}$$

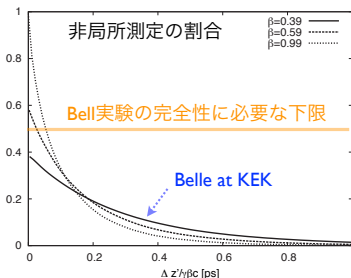
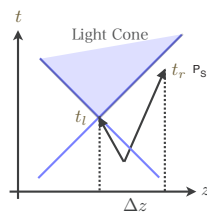


Belle group, PRL99(2007)131802

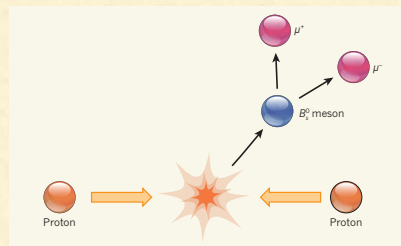


局所性の抜け道 (loophole) のため、Bell テストとして不完全

T. Ichikawa et al., PLA373(2008)39



ATLAS 実験 (CERN) : 完全なBell テストに向けて (予測)



Nature 522 (2015)

崩壊時間の選別により局所性の
抜け穴を塞ぐ

量子相関

$$C^Q(t_1, t_2) = -\cos(\Delta M \Delta t)$$

Bell不等式の量子相関

$$S^Q(\Delta t) = C^Q(t_1, t_2) + C^Q(t'_1, t_2) + C^Q(t_1, t'_2) - C^Q(t'_1, t'_2)$$

$$= -3 \cos(\Delta M \Delta t) + \cos(3\Delta M \Delta t)$$

$$\text{for } t_2 - t'_1 = t_1 - t_2 = t'_2 - t_1 = \Delta t$$

17

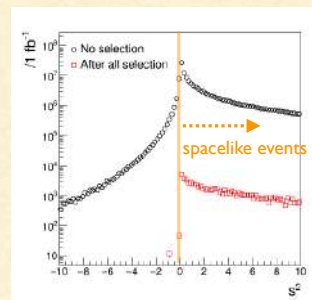
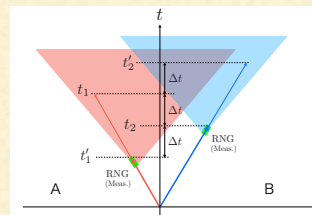
ATLAS 実験と Belle 実験との違い

崩壊距離・時間の測定

- Belle実験では2つのB中間子はz方向に進む
→ z方向のビームサイズによってB中間子の生成位置が測定できない。測定できるのは Δz と Δt
- ATLASは2つのB中間子は実験室系で全方向に出るので、個々のB中間子の生成位置と崩壊時間を測定できる

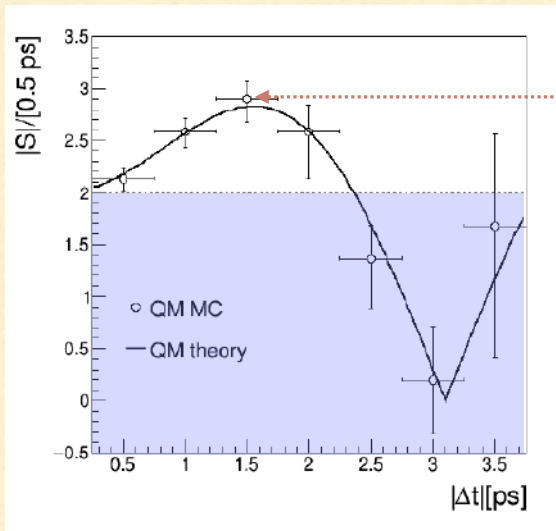
崩壊距離・時間分解能

- Belle実験: $\sigma(\Delta z) \sim 100 \mu\text{m}$, $\sigma(\Delta t) \sim 1.2 \text{ ps}$
- ATLAS実験: $\sigma(L = ct) \sim 34 \mu\text{m}$, $\sigma(t) = 0.11 \text{ ps}$



18

Bell不等式の相関 (MC)



$$\Delta t = \pi/4\Delta M \approx 1.55 \text{ ps}$$

($\Delta M = 3.334 \times 10^{-10} \text{ MeV}$)

Bell 不等式の最大の破れ



局所性の抜け穴を塞ぎ、
完全なBellテストが可能

Y. Takubo et al., Phys. Rev. D.104 (2021) 056004

19

まとめ

- 弱測定 (直接) により、崩壊粒子の寿命を延命 (短縮) 可能
- Belle 実験でのB中間子に適用すると、崩壊寿命は 2.6 倍まで延命可能。しかしCP 破れの精度は 20% の向上に留まる
- ATLAS 実験での B 中間子系を用いてBell テストにおいては、従来のBelle実験での局所性問題を解決し、素粒子実験での世界初の完全なBell テストが可能。(実施計画申請中)

量子力学の基礎
(weak value, Bell test, uncertainty,...)



素粒子物理
(entangled states, decays, oscillations,...)

20

光格子時計がもたらす新たな時間計測とその応用

Masao Takamoto

Quantum Metrology Laboratory, RIKEN, Japan

1. Introduction

Optical lattice clocks have been proposed as a next-generation time and frequency standard that combines high accuracy and stability [1] and has achieved a fractional uncertainty of 10^{-18} [2-4], which is two orders of magnitude better than the current cesium atomic clock that defines the second. Such accurate clocks are expected not only as a standard but also for various applications such as verification of fundamental physics and precision physical measurements. For example, precise measurement of gravitational redshift can be applied as a new geodetic technique to measure elevation using relativistic time delay. Since the excellent stability of optical lattice clocks can achieve an uncertainty of 10^{-18} in a short averaging time, relativistic geodesy, which measures 1 cm difference in elevation in real time, is expected to be a new geodetic technique. On the other hand, in order to use such clocks as a measurement device, the challenge is to develop a transportable system that can be operated outside the laboratory. In this paper, we describe the transportability of optical lattice clocks for relativistic geodetic applications and their future application to relativistic geodesy.

2. Transportability of Atomic Clocks

2.1 Definition of the Second with Microwave Clocks

The second, the unit of time, has been defined for more than 50 years by the cesium atomic clock based on microwave transitions ($\nu_0 \approx 9.2$ GHz) between the hyperfine structure of cesium atoms. During this period, technological advances, instead of the conventional thermal atomic beam, the atomic fountain clocks using laser-cooled atoms have improved the accuracy by an order of magnitude every decade, and now a fractional frequency uncertainty of $\delta\nu/\nu_0 \sim 10^{-16}$ has been achieved. With reference to such atomic clocks, time and frequency are the physical quantities that can be measured with the highest precision in the SI unit system. In addition, microwave atomic clocks are also undergoing technological development toward practical application through miniaturization, transportability, and power consumption, such as the development of the chip scale atomic clock (CSAC) [5]. Microwave clocks have become an indispensable fundamental technology for society, such as positioning and time synchronization by global navigation satellite system (GNSS) using atomic clocks mounted on satellites and synchronization of high-speed, large-capacity communication networks.

2.2 From Microwave Clocks to Optical Clocks

The pursuit of higher precision in atomic clocks has been accompanied by advances in laser coherent control technology, such as optical frequency comb [6, 7], narrow linewidth laser [8, 9], and optical frequency distribution using optical fiber [10, 11], and research on atomic clocks using the transitions in the optical frequency domain (optical clocks) has made drastic progress since around 2000. Since the accuracy and stability of clocks are proportional to the frequency of the referenced clock transition, an improvement of approximately five orders of magnitude is expected by shifting the

clock transition frequency from the microwaves to the optical frequency region. Uncertainties in the 10^{-18} level or lower have been achieved with single ion clocks [9, 10] and optical lattice clocks [2-4]. These optical clocks have already exceeded the accuracy of cesium clocks by more than two orders of magnitude, and discussions are underway to redefine the second using such optical clocks.

2.3 Performance of Frequency Dissemination

While optical clocks with 18-digit precision have been realized, it is not easy to confirm the integrity of optical clocks at the same level of precision on a global scale. One reason for this is the limitation of frequency dissemination. Microwave transfer via satellite, which has been used to deliver frequency reference signals for conventional microwave clocks, allows for global-scale links, but atmospheric disturbances limit the transfer instability to $\delta\nu/\nu_0 \sim 10^{-16}$ in averaging time per day, and the performance of optical clocks cannot be fully utilized. On the other hand, optical frequency transfer using optical fiber link can transfer $\delta\nu/\nu_0 \sim 10^{-18}$ per second, which is fine in terms of accuracy and stability, but the transfer distance is limited to ~ 1000 km, making intercontinental and global frequency dissemination difficult. In order to redefine the second, it is necessary to confirm whether clocks around the world are ticking with the same rate at the 18-digit level of precision, which can be realized by directly comparing frequencies using transportable optical atomic clocks.

2.4 Application to Relativistic Geodesy

On the ground, according to Einstein's general theory of relativity, time advances more slowly at lower elevations than at higher elevations due to the effect of gravity; the gravitational redshift $\Delta\nu = \nu_2 - \nu_1$ between the two clocks is $\Delta\nu/\nu_1 = g\Delta h/c^2$, where Δh is the height difference between the two clocks, c is the speed of light, and g is the gravitational acceleration. For a height difference of $\Delta h = 1$ cm, ticking rate of clocks changes by $\Delta\nu/\nu_1 = 1.1 \times 10^{-18}$ (1 second changes by 10^{18} seconds). On the other hand, for example, elevations in Europe diverge by more than 10 cm between borders in some places [14], making it difficult to share clock frequencies with an uncertainty of 10^{-18} . In addition, due to tidal effects, clock frequencies vary approximately $\Delta\nu/\nu_1 = 10^{-17}$ over a semidiurnal cycle, which must be accurately evaluated. To avoid these effects and verify clock integrity with an uncertainty of 10^{-18} , it is necessary to transport clocks and perform local clock comparisons in proximity, rather than remote clock comparisons by frequency link.

Using this effect in reverse, a high-precision clock would become a gravity potential sensor that precisely measures the difference in elevation: the difference in elevation between two points can be measured from the frequency difference between clocks at each location, with clocks ticking the same rate (frequency) at the same elevation on the equipotential surface. This measurement of elevation difference using clocks is called relativistic geodesy, and is expected to become a new geodetic method. In Europe, an optical fiber network over 2000 km has been constructed to connect optical lattice clocks developed by metrological institutes in various countries [15]. In addition to static measurements such as the construction of elevation systems, networked optical lattice clocks have the potential to be applied to the observation of dynamic behaviors such as crustal deformation and volcanic activities, taking advantage of the stability of the clocks that can reach an uncertainty of 10^{-18} in a short averaging time [16]. In particular, it is important to investigate slight temporal and spatial changes in the crust of the Japanese Islands, which are located at a plate boundary, because of their active seismic and volcanic activities [16]. If a transportable optical lattice clock is available, such measurements can be made with high temporal and spatial resolution.

2.5 Space Application of Optical Clocks

The development of compact and robust optical clocks to be taken to space has been proposed for the applications, such as high-precision synchronization of terrestrial clocks, verification of the Einstein Equivalence Principle (EEP) [17], dark matter (DM) searches, and gravitational wave (GW) detection [18]. For such applications, miniaturization of the size, reduction of power consumption, as well as addressing various technical issues such as radiation resistance, extended equipment life, and shock resistance will be important issues to be addressed in the future [19].

3. Development of Transportable Optical Clocks

3.1 Trends in the Development of Transportable Optical Clocks

High-precision optical clocks have been realized only in laboratory environments where temperature, vibration, and other factors are well controlled. In recent years, transportable optical clocks have been developed to enable stable operation in environments outside the laboratory for applications such as geodesy. A group at the Physikalisch-Technische Bundesanstalt (PTB) in Germany has developed a trailer-mounted optical lattice clock with an uncertainty of 7.4×10^{-17} [20]. The clock was transported into a tunnel in the middle of the Alps and compared via optical fiber to a group of clocks at the National Institute for Metrological Research (INRiM) in Italy to demonstrate relativistic geodesy [21]. The European Space Agency (ESA) is planning a space mission (I-SOC) to operate optical lattice clocks on the International Space Station (ISS), and an uncertainty of 2×10^{-17} was achieved with the developed demonstrator model [22]. In the field of ion clocks, a German group led by PTB, in collaboration with a company, has developed an ion clock using Yb^+ atoms mounted in two 19-inch racks and achieved an uncertainty of 2×10^{-17} [23].

3.2 Development of Transportable Optical Lattice Clocks

We have developed a transportable optical lattice clock with an uncertainty of 10^{-18} using strontium (Sr) atoms [19] (Fig. 1(a)). The clock system consists of a physics package (Fig. 1(b)) that includes a UHV chamber for clock transition spectroscopy, and two laser boxes that house a total of seven diode lasers used for laser cooling of atoms, optical lattice, and clock transition spectroscopy. The laser boxes are housed in a 19-inch rack, with the laser sources and related optics in the upper part and the control electronics in the lower part. ^{87}Sr atoms from the atomic oven are decelerated by a Zeeman slower, and magneto-optically trapped and cooled down to a few mK on the allowed transition $^1S_0 (F = 9/2) - ^1P_1 (F = 11/2)$ (Fig. 1(c)). Furthermore, atoms are cooled down to a few μK by the second stage magneto-optical trapping on the narrow-line spin-forbidden transition $^1S_0 (F = 9/2) - ^3P_1 (F = 7/2, 11/2)$ and loaded into a one-dimensional optical lattice formed by a standing wave of counterpropagating lasers tuned to the magic wavelength at around 813 nm for Sr (Fig. 1(d)). By slightly shifting the relative frequency of the lattice lasers, a moving optical lattice is realized to transport the atoms into the blackbody radiation shield, where the clock transition $^1S_0 (F = 9/2) - ^3P_0 (F = 9/2)$ is interrogated. The blackbody radiation shield is cooled, and temperature stabilized at 245 K by a Peltier cooler, reducing the uncertainty of the frequency shift due to blackbody radiation from the ambient environment. The excitation probabilities of the atoms are then measured from the fluorescence on the allowed transition $^1S_0 (F = 9/2) - ^1P_1 (F = 11/2)$, and the frequency of the clock laser is controlled to resonate with the clock transition according to the obtained excitation probabilities. The series of cycles (cycle time ~ 1.6 s) is repeated to average the statistical noise and achieve a fractional frequency stability of 10^{-18} .

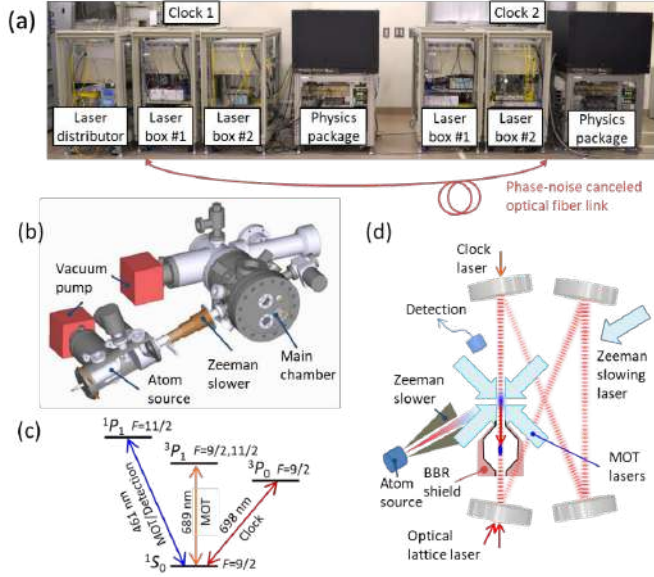


Fig. 1. Configuration of the transportable optical lattice clock. (a) Two transportable clocks connected by a phase-noise-cancelled optical fiber link. Each clock consists of a physics package and two laser boxes. The laser distribution box provides the reference lasers for the two clocks. (b) Exterior view of the UHV chamber installed inside a $75(\text{W})\times 55(\text{H})\times 70(\text{D})\text{ cm}^3$ magnetically shielded box. (c) Relevant energy diagram of ^{87}Sr atoms. (d) Schematic of the physics package inside the vacuum chamber. Magneto-optically trapped ultra-cold ^{87}Sr atoms are trapped in a 1D optical lattice formed in a bow-tie resonator. The atoms are transported by a moving lattice into the blackbody radiation shield for clock spectroscopy.

3.3 Test of Gravitational Redshift at Tokyo Skytree

A pair of optical lattice clocks were developed and transported to Tokyo Skytree, where one was installed on the ground floor at 0 m and the other on the tower's highest observation deck at 450 m, from Oct. 2018 to Apr. 2019. The two clocks were connected by a highly stable optical fiber link with a control system that suppresses phase noise caused by vibration and temperature changes. The spectra of the clock transitions obtained at 0 m and 450 m are shown in Fig. 2(b) and (c). A frequency shift of $\Delta\nu \sim 21\text{ Hz}$, corresponding to the gravitational redshift at a height difference of $\Delta h \sim 450\text{ m}$, was observed. Simultaneously, the height difference Δh was measured by GNSS surveying and laser ranging. From the obtained gravitational redshift $\Delta\nu$ and height difference Δh , we evaluated the α introduced in the gravitational redshift $\Delta\nu/\nu_1 = (1 + \alpha)g\Delta h/c^2$ by general relativity ($\alpha = 0$ if general relativity is valid). By evaluating the frequency difference between the two clocks with an uncertainty of $\delta\nu/\nu_0 = 4.3 \times 10^{-18}$, we obtained $\alpha = (1.4 \pm 9.1) \times 10^{-5}$. By using a highly precise clock, a verification uncertainty comparable to that of space-scale experiments with a height difference of tens of thousands of kilometers [24, 25] was achieved, even though the height difference is only a few hundred meters. The measurement uncertainty of the gravitational redshift gives an uncertainty of 4 cm at the equivalent height, indicating that optical lattice clocks are technically capable of relativistic geodesy with cm-level uncertainty.

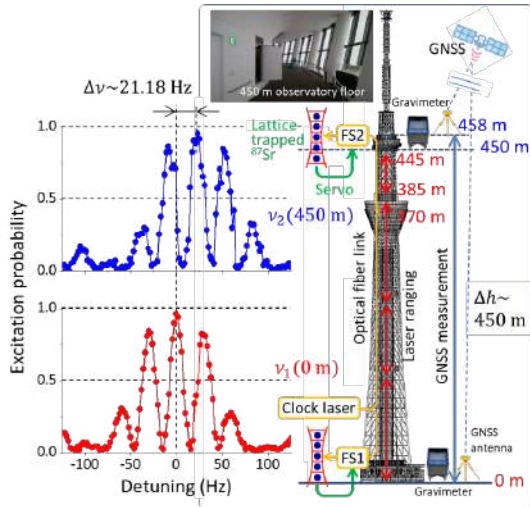


Fig. 2. Experimental setup for the test of gravitational redshift [26]. Two transportable optical lattice clocks located at 0 m and 450 m are connected by an optical fiber link. The spectra show a frequency shift of ~ 21 Hz corresponding to the gravitational redshift with a height difference of ~ 450 m, measured by GNSS and laser ranging.

4. Application to Relativistic Geodesy

Optical lattice clocks have the potential to measure short-time scale phenomena that could not be observed before with high precision due to their accurate and stable characteristics. Conventional level surveying requires several days to several months (2 km/day) to make survey measurements between remote locations (10~1000 km), and the cumulative error ($2.5\sqrt{S/\text{km}}$ mm, where S is the route length) depends on the measured distance [16]. In addition, positioning by global navigation satellite systems (GNSS) has a horizontal positioning accuracy of 2-3 mm, but only about 1 cm in the height direction, requiring an averaging time of about 1 day to reach this accuracy [16]. Relativistic geodetic surveying using optical lattice clocks can measure a 1 cm height difference with an averaging time of about 2 hours, if clocks in remote locations can be connected by a stable optical fiber link. This could capture dynamic changes in gravitational potential and elevation due to tidal effects, crustal deformation, volcanic activity, etc., which have been averaged out and unseen with conventional surveying. In the future, further speed-up of geodetic measurement is expected if high clock stability is achieved through no-deadtime clock operations such as longitudinal Ramsey spectroscopy [27].

5. Summary and Prospects

Optical lattice clocks are ideal devices for measuring gravitational potentials due to their high accuracy and stability. The high accuracy is useful as a reference for elevation, and the high stability is necessary for observing the dynamic behavior of the gravitational potential. We have developed a transportable Sr optical lattice clock for such relativistic geodetic applications and performed field experiments at Tokyo Skytree and confirmed that the clock operates as stably as in a laboratory environment with an uncertainty of 4×10^{-18} outside the laboratory. In the future, optical lattice clocks will be transported to measurement sites where changes in gravitational potential due to crustal deformation and tidal effects are predicted, connected to a reference clock by long-distance optical fiber, and applied to demonstration experiments for geophysical measurements. For practical application of optical lattice

clocks as a quantum sensing device, miniaturization, robustness, and longevity of the system are important issues. Further technological progress in the future is expected to make this technology indispensable for both the core technologies that support society and the precision measurement that pioneers new physics.

References

- [1] H. Katori, Proceedings of the 6th Symposium on Frequency Standards and Metrology, edited by P. Gill (World Scientific, Singapore, 2002), 323 (2002)
- [2] T.L. Nicholson, S.L. Campbell, R.B. Hutson, G.E. Marti, B.J. Bloom, R.L. McNally, W. Zhang, M.D. Barrett, M.S. Safronova, G.F. Strouse, W.L. Tew, and J. Ye, Systematic evaluation of an atomic clock at 2×10^{-18} total uncertainty, *Nat. Commun.* 6, 6896 (2015)
- [3] I. Ushijima, M. Takamoto, M. Das, T. Ohkubo, and H. Katori, Cryogenic optical lattice clocks, *Nat. Photon.* 9, 185-189 (2015)
- [4] W.F. McGrew, X. Zhang, R.J. Fasano, S.A. Schaffer, K. Beloy, D. Nicolodi, R.C. Brown, N. Hinkley, G. Milani, M. Schioppo, T.H. Yoon, and A.D. Ludlow, Atomic clock performance enabling geodesy below the centimetre level, *Nature* 564, 87-90 (2018)
- [5] S. Knappe, V. Shah, P.D.D. Schwindt, L. Hollberg, J. Kitching, L.-A. Liew, and J. Moreland, A microfabricated atomic clock, *App. Phys. Lett.* 85, 1460-1462 (2004)
- [6] T.W. Hänsch, Nobel Lecture: Passion for precision, *Rev. Mod. Phys.* 78, 1297-1309 (2006)
- [7] J.L. Hall, Nobel Lecture: Defining and measuring optical frequencies, *Rev. Mod. Phys.* 78, 1279-1295 (2006)
- [8] B.C. Young, F.C. Cruz, W.M. Itano, and J.C. Bergquist, Visible Lasers with Subhertz Linewidths, *Phys. Rev. Lett.* 82, 3799-3802 (1999)
- [9] D.G. Matei, T. Legero, S. Hafner, C. Grebing, R. Weyrich, W. Zhang, L. Sonderhouse, J.M. Robinson, J. Ye, F. Riehle, and U. Sterr, 1.5 μm Lasers with Sub-10 mHz Linewidth, *Phys. Rev. Lett.* 118, 263202 (2017)
- [10] L.-S. Ma, P. Jungner, J. Ye, and J.L. Hall, Delivering the same optical frequency at two places: accurate cancellation of phase noise introduced by an optical fiber or other time-varying path, *Opt. Lett.* 19, 1777-1779 (1994)
- [11] F. Riehle, Optical clock networks, *Nat. Photon.* 11, 25-31 (2017)
- [12] N. Huntemann, C. Sanner, B. Lipphardt, C. Tamm, and E. Peik, Single-Ion Atomic Clock with 3×10^{-18} Systematic Uncertainty, *Phys. Rev. Lett.* 116, 063001 (2016)
- [13] S.M. Brewer, J.S. Chen, A.M. Hankin, E.R. Clements, C.W. Chou, D.J. Wineland, D.B. Hume, and D.R. Leibbrandt, $^{27}\text{Al}^+$ Quantum-Logic Clock with a Systematic Uncertainty below 10^{-18} , *Phys. Rev. Lett.* 123, 033201 (2019)
- [14] T. Gruber, C. Gerlach, and R. Haagmans, Intercontinental height datum connection with GOCE and GPS-levelling data, *Journal of Geodetic Science* 2, 270-280 (2012)
- [15] M. Schioppo, J. Kronjager, A. Silva, R. Ilieva, J.W. Paterson, C.F.A. Baynham, W. Bowden, I.R. Hill, R. Hobson, A. Vianello, M. Dovale-Alvarez, R.A. Williams, G. Marra, H.S. Margolis, A. Amy-Klein, O. Lopez, E. Cantin, H. Alvarez-Martinez, R. Le Targat, P.E. Pottie, N. Quintin, T. Legero, S. Hafner, U. Sterr, R. Schwarz, S. Dorscher, C. Lisdat, S. Koke, A. Kuhl, T. Waterholter, E. Benkler, and G. Grosche, Comparing ultrastable lasers at 7×10^{-17} fractional frequency instability through a 2220 km optical fibre network, *Nat. Commun.* 13, 212 (2022)
- [16] Y. Tanaka, and H. Katori, Exploring potential applications of optical lattice clocks in a plate subduction zone, *Journal of Geodesy* 95, 93 (2021)
- [17] A. Derevianko, K. Gibble, L. Hollberg, N.R. Newbury, C. Oates, M.S. Safronova, L.C. Sinclair, and N. Yu, Fundamental physics with a state-of-the-art optical clock in space, *Quantum Science and Technology* 7, 044002 (2022)
- [18] S. Kolkowitz, I. Pikovski, N. Langellier, M.D. Lukin, R.L. Walsworth, and J. Ye, Gravitational wave detection with optical lattice atomic clocks, *Phys. Rev. D* 94, 124043 (2016)
- [19] N. Ohmae, M. Takamoto, Y. Takahashi, M. Kokubun, K. Araki, A. Hinton, I. Ushijima, T. Muramatsu, T. Furumiya, Y. Sakai, N. Moriya, N. Kamiya, K. Fujii, R. Muramatsu, T. Shiimado, and H. Katori, Transportable Strontium Optical Lattice Clocks Operated Outside Laboratory at the Level of 10^{-18} Uncertainty, *Advanced Quantum Technologies* 4, 2100015 (2021)
- [20] S.B. Koller, J. Grotti, S. Vogt, A. Al-Masoudi, S. Dorscher, S. Hafner, U. Sterr, and C. Lisdat, Transportable Optical Lattice Clock with 7×10^{-17} Uncertainty, *Phys. Rev. Lett.* 118, 073601 (2017)
- [21] J. Grotti, S. Koller, S. Vogt, S. Häfner, U. Sterr, C. Lisdat, H. Denker, C. Voigt, L. Timmen, A. Rolland, F.N. Baynes, H.S. Margolis, M. Zampaolo, P. Thoumany, M. Pizzocaro, B. Rauf, F. Bregolin, A. Tampellini, P. Barbieri, M. Zucco, G.A. Costanzo, C. Clivati, F. Levi, and D. Calonico, Geodesy and metrology with a transportable optical clock, *Nat. Phys.* 14, 437-441 (2018)

- [22] S. Origlia, M.S. Pramod, S. Schiller, Y. Singh, K. Bongs, R. Schwarz, A. Al-Masoudi, S. Dörscher, S. Herbers, S. Häfner, U. Sterr, and C. Lisdat, Towards an optical clock for space: Compact, high-performance optical lattice clock based on bosonic atoms, *Phys. Rev. A* 98, 053443 (2018)
- [23] J. Stuhler, M. Abdel Hafiz, B. Arar, A. Bawamia, K. Bergner, M. Biethahn, S. Brakhane, A. Didier, J. Fortágh, M. Halder, R. Holzwarth, N. Huntemann, M. Johanning, R. Jördens, W. Kaenders, F. Karlewski, F. Kienle, M. Krutzik, M. Lessing, T.E. Mehlstäubler, D. Meschede, E. Peik, A. Peters, P.O. Schmidt, H. Siebeneich, C. Tamm, E. Vogt, A. Wicht, C. Wunderlich, and J. Yu, Opticlock: Transportable and easy-to-operate optical single-ion clock, *Measurement: Sensors* 18, 100264 (2021)
- [24] S. Herrmann, F. Finke, M. Lulf, O. Kichakova, D. Puetzfeld, D. Knickmann, M. List, B. Rievers, G. Giorgi, C. Gunther, H. Dittus, R. Prieto-Cerdeira, F. Dilssner, F. Gonzalez, E. Schonemann, J. Ventura-Traveset, and C. Lammerzahl, Test of the Gravitational Redshift with Galileo Satellites in an Eccentric Orbit, *Phys. Rev. Lett.* 121, 231102 (2018)
- [25] P. Delva, N. Puchades, E. Schonemann, F. Dilssner, C. Courde, S. Bertone, F. Gonzalez, A. Hees, C. Le Poncin-Lafitte, F. Meynadier, R. Prieto-Cerdeira, B. Sohet, J. Ventura-Traveset, and P. Wolf, Gravitational Redshift Test Using Eccentric Galileo Satellites, *Phys. Rev. Lett.* 121, 231101 (2018)
- [26] M. Takamoto, I. Ushijima, N. Ohmae, T. Yahagi, K. Kokado, H. Shinkai, and H. Katori, Test of general relativity by a pair of transportable optical lattice clocks, *Nat. Photon.* 14, 411-415 (2020)
- [27] H. Katori, Longitudinal Ramsey spectroscopy of atoms for continuous operation of optical clocks, *APEX* 14, 072006 (2021)

C*-代数的量子論におけるシュレディンガー描像

Kazuya Okamura

Research Origin for Dressed Photon / Nagoya University

本稿は、C*-代数的量子論における Schrödinger 描像についての発表をまとめたものである。Schrödinger 描像では、(系とその環境の) ダイナミクスによって引き起こされる系の状態変化を扱う。Dirac の遷移確率は、この文脈で中心的な役割を果たす。「C*-確率構造」を対象とし遷移確率を射とする「状態遷移の圏」を定義する。これは Schrödinger 描像の圏論的定式化にあたる。さらに、遷移確率の理論を量子測定理論に結びつける。C*-代数的量子論における量子測定の公理的アプローチは、セクター理論と整合的であり、圏論の設定における遷移確率の良い例を与えるものである。

1. 導入

本稿では、C*-代数的量子論におけるシュレディンガー描像について議論を行う。その動機は、量子系におけるダイナミクスを柔軟に記述可能な枠組みの確立を目指すところにある。通常シュレディンガー描像と呼ばれる量子系の変化とは、量子系の状態遷移を意味する。状態は物理量代数上の期待値汎関数として定義され、その上で状態遷移とは状態を指定するごとに別の状態への対応をつけることである。本稿では、遷移確率およびインストルメントによる状態遷移を扱う。遷移確率は Dirac により、インストルメントは Davies-Lewis により定義された。どちらも系の状態の確率的な遷移を記述する概念であり、量子系のダイナミクスの特徴を捉える上で大きく貢献してきた。本稿ではそれらを C*-代数的量子論において扱う点で注意すべきことがある。C*-代数上の状態空間の全空間は一般にとっても大きいので、適切な部分空間を扱う必要がある。その空間を本稿では中心部分空間と呼ぶ。中心部分空間の活用によりセクター理論 [9, 10, 11, 12, 13, 20, 21, 23] と整合的な量子測定理論になり、更には圏論的な定式化へとつながっていくことをみていく。本稿の結果は [22, 24, 25, 27] の延長線上の成果にあたる。

C*-代数的量子論の出発点は、C*-確率空間による量子系の記述である。これは通常、以下のように公理としてまとめられている [22]。

公理 1 (C*-確率空間) .

ある物理的状況 (または実験設定) における物理系は C*-確率空間 (\mathcal{X}, ω) - C*-代数 \mathcal{X} とその上の状態 ω の組 - で記述される。

作用素代数の詳細については [4, 7, 8, 32, 35] などを参照のこと。集合 \mathcal{X} が C*-代数であるとは、*-代数かつ Banach 空間であって $\|X^*X\| = \|X\|^2$, $X \in \mathcal{X}$, を満たすときを言う。本稿では、C*-代数は単位的 (単位元を含む) であることを仮定する。 ω が \mathcal{X} 上の状態であるとは、 \mathcal{X} 上の規格化 ($\omega(1) = 1$) された正值 (任意の $X \in \mathcal{X}$ に対し $\omega(X^*X) \geq 0$) な線型汎関数であるときをいう。 \mathcal{X}^* で \mathcal{X} 上の線型汎関数の集合を、 $S_{\mathcal{X}}$ で \mathcal{X} 上の状態の集合を表す。任意の状態 ω に対し、Hilbert 空間 \mathcal{H}_{ω} , \mathcal{X} の \mathcal{H}_{ω} 上の表

現 π_ω および \mathcal{H}_ω の単位ベクトルで

$$(1) \quad \omega(X) = \langle \Omega_\omega | \pi_\omega(X) \Omega_\omega \rangle, \quad X \in \mathcal{X}$$

を満たす3つ組 $(\pi_\omega, \mathcal{H}_\omega, \Omega_\omega)$ が存在する。この3つ組を GNS 表現と呼ぶ。 \mathcal{X} の第二双対 $\mathcal{X}^{**} := (\mathcal{X}^*)^*$ は W^* -代数であり、 \mathcal{X} の第二双対 W^* -代数と呼ばれる。 \mathcal{X}^{**} は \mathcal{X} の普遍表現 $(\pi_u, \mathcal{H}_u) = \bigoplus_{\omega \in \mathcal{S}_\mathcal{X}} (\pi_\omega, \mathcal{H}_\omega)$ から生成される普遍包絡 von Neumann 代数 $\pi_u(\mathcal{X})''$ と同型であることが知られている。このとき、 \mathcal{X} から \mathcal{X}^{**} への等長埋め込み $\hat{\cdot} : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}^{**}$ が、任意の $\rho \in \mathcal{X}^*$ に対し、 $\langle \hat{X}, \rho \rangle = \rho(X)$ で定まる。

第二双対 W^* -代数と上の埋め込みを用いることにより、自己共役作用素のスペクトル分解ができて Born 統計公式を記述する準備が整った：

公理 2 (Born 統計公式) .

\mathcal{X} の物理量 A が状態 ω において正確に測定される時、 Δ に属する A のスペクトルが現れる確率 $\Pr\{A \in \Delta | \omega\}$ は次で与えられる：

$$(2) \quad \Pr\{A \in \Delta | \omega\} = \langle E^\Delta(A), \omega \rangle.$$

この公理は C^* -代数的量子論の標準的公理系で通常仮定されるが、本稿では歴史的経緯でのみ活用される。

2. 遷移確率

遷移確率を本章で定義する。状態空間の Borel 空間を定めるため、 C^* -代数 \mathcal{X} の双対空間 \mathcal{X}^* に対し弱*位相を採用する。弱*位相においては、 $\omega \in \mathcal{X}^*$ の近傍はつぎで与えられる： \mathcal{X} の有限個の元 X_1, \dots, X_n と $\varepsilon > 0$ に対し、

$$(3) \quad U_\omega(X_1, \dots, X_n, \varepsilon) = \{\varphi \in \mathcal{X}^* \mid |\varphi(X_j) - \omega(X_j)| < \varepsilon, j = 1, \dots, n\}.$$

$\mathcal{S}_\mathcal{X}$ の弱*位相を \mathcal{X}^* の弱*位相の $\mathcal{S}_\mathcal{X}$ への制限により定義する。 $\mathcal{S}_\mathcal{X}$ に対し、弱*位相の開集合族から生成される Borel 集合を採用する。 $\mathcal{B}(\mathcal{S}_\mathcal{X})$ で $\mathcal{S}_\mathcal{X}$ の Borel 集合族を表す。

C^* -代数 \mathcal{X} の状態空間 $\mathcal{S}_\mathcal{X}$ および双対空間 \mathcal{X}^* は、一般に大きすぎるため適切な部分空間に制限する必要がある。以下で定義する中心部分空間がその目的にかなう。任意の $A, B \in \mathcal{X}^{**}$ と $\omega \in \mathcal{X}^*$ に対し、 $A\omega, \omega A, A\omega B \in \mathcal{X}^*$ を

$$(4) \quad \langle M, A\omega \rangle = \langle MA, \omega \rangle,$$

$$(5) \quad \langle M, \omega A \rangle = \langle AM, \omega \rangle,$$

$$(6) \quad \langle M, A\omega B \rangle = \langle BMA, \omega \rangle, \quad M \in \mathcal{X}^{**}$$

で定義する。

定義 1 (中心部分空間 [27]). \mathcal{X}^* の線型部分空間 \mathcal{V} が中心的 (*central*) であるとは、 \mathcal{X}^{**} の中心射影 C で $\mathcal{V} = C\mathcal{X}^* = \{C\omega \mid \omega \in \mathcal{X}^*\}$ を満たすものが存在するときをいう。

\mathcal{X}^* の各中心部分空間 $\mathcal{V}(= C\mathcal{X}^*)$ に対し、双対空間 \mathcal{V}^* は $(C\mathcal{X}^{**})$ に同型な W^* -代数である。中心部分空間の例は表現により与えられる。

例 1. (1) $\mathcal{V}(\pi) : (\pi, \mathcal{H})$ を \mathcal{X} の表現とすると、 \mathcal{H} 上のトレースクラス作用素 ρ を用いて $\omega(X) = \text{Tr}[\pi(X)\rho]$ と表せる \mathcal{X} 上の線型汎関数の全体。 $\mathcal{X} = \mathbf{B}(\mathcal{H})$, (id, \mathcal{H}) のときが有限自由度量子系の場合。

(2) $\mathcal{M}_* : \text{Hilbert}$ 空間 \mathcal{K} 上の von Neumann 代数 \mathcal{M} 上の正規な線型汎関数の全体 ((1) で $\mathcal{X} = \mathcal{M}$, $\pi = \text{id}$, $\mathcal{H} = \mathcal{K}$ とした場合)。

中心部分空間を用いて C^* -確率構造を定義する。

定義 2 (C^* -確率構造). C^* -代数とその双対空間の中心部分空間の組 $a = (\mathcal{X}_a, \mathcal{V}_a)$ を C^* -確率構造 (C^* -probability structure) と呼ぶ。各 C^* -確率構造 $a = (\mathcal{X}_a, \mathcal{V}_a)$ に対し, $S_a = S_{\mathcal{X}_a} \cap \mathcal{V}_a$ とおく。

公理 1 を前提に, 次の公理を仮定する。

公理 3 (C^* -確率構造: 公理 1 の続き)

C^* -確率構造 $a = (\mathcal{X}_a, \mathcal{V}_a)$ によって, 特定の範囲に収まる物理的状況 (または実験設定) における物理系が統計的に規定される。

公理 3 は S_a に属する様々な状態が実現する状況を C^* -確率構造により包括的に与えるという宣言に他ならない。

定義 3 (遷移確率). $a, b \in C^*$ -PS とする。写像 $P(\cdot \leftarrow \cdot) : \mathcal{B}(S_{\mathcal{X}_b}) \times S_a \rightarrow [0, 1]$ は, 以下の条件を満たすとき, (a, b) に対する遷移確率と呼ばれる:

- (i) 各 $\omega \in S_a$ に対し, $P(\cdot \leftarrow \omega)$ は $S_{\mathcal{X}_b}$ 上の確率測度である。
- (ii) $\Delta \in \mathcal{B}(S_{\mathcal{X}_b})$ と $\omega \in S_a$ で $P(\Delta \leftarrow \omega) \neq 0$ となるとき $\omega_{(P, \Delta)} \in S_b$ 。ここで, $P(\Delta \leftarrow \omega) \neq 0$ のとき,

$$(7) \quad \omega_{(P, \Delta)}(X) = \int_{\Delta} \rho(X) \frac{dP(\rho \leftarrow \omega)}{P(\Delta \leftarrow \omega)}, \quad X \in \mathcal{X}_b$$

と定める。 $\Delta = S_{\mathcal{X}_b}$ のとき, $\omega_P := \omega_{(P, S_{\mathcal{X}_b})}$ と表す。

$a = b$ のとき, (a, b) に対する遷移確率を a に対する遷移確率と呼ぶ。各一点集合 $\{\varphi\}$ に対し, $P(\{\varphi\} \leftarrow \omega)$ を $P(\varphi \leftarrow \omega)$ と表す。

定義より, 遷移確率とは $a \in C^*$ -PS における各状態にたいし $b \in C^*$ -PS での状態空間上の確率測度が定まり, かつそれは b での中心部分空間に属する状態が実現するようなものである, ということである。

例 2 (決定論的遷移). (i) α を C^* -代数 \mathcal{X} の $*$ -同型とする。 $a_{\mathcal{X}} = (\mathcal{X}, \mathcal{X}^*)$ に対する遷移確率 $P^{(\alpha)}$ を $P^{(\alpha)}(\Delta \leftarrow \omega) = \delta_{\omega \circ \alpha}(\Delta)$ で定める。

(ii) $a, b \in C^*$ -PS, 単位的正值線型写像 $T : \mathcal{V}_a \rightarrow \mathcal{V}_b$ とする。 (a, b) に対する遷移確率 $P^{(T)}$ を $P^{(T)}(\Delta \leftarrow \omega) = \delta_{T\omega}(\Delta)$ で定める。

定義 4 (離散的). $a, b \in C^*$ -PS とし, P を (a, b) に対する遷移確率とする。 P が離散的であるとは, 各 $\omega \in S_a$ での $P(\cdot \leftarrow \omega)$ の台が高々可算であるときをいう。

P が離散的であるとき, 各 $\omega \in S_a$ で $S_{P, \omega} := \text{supp } P(\cdot \leftarrow \omega) \subset S_b$ を満たす。

3. 歴史的経緯と注意

公理 2 を仮定し, \mathcal{H} を可分 Hilbert 空間とする。 \mathcal{H} 上の密度作用素 ρ と $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ 上の正規状態 $\tilde{\rho}$ を以下で定める同型写像 $\tilde{\cdot} : \mathbf{T}(\mathcal{H}) \rightarrow \mathbf{B}(\mathcal{H})_*$ のもとで区別しない:

$$(8) \quad \tilde{\rho}(X) = \text{Tr}[\rho X], \quad X \in \mathbf{B}(\mathcal{H}).$$

このとき, $a_{\mathcal{H}} = (\mathbf{B}(\mathcal{H}), \mathbf{T}(\mathcal{H})) \in C^*$ -PS である。遷移確率を考える契機は Born 統計公式と関わることにあり, 測定後の状態が定まる規則を取り入れる試みに他ならない。それは以下のようにまとめられる。

仮説 1.

$A = \sum_{a \in \mathbb{R}} a E^A(\{a\})$ を $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ の離散物理量とする。密度作用素 ρ において A が正確に測定される時、各 $a \in Sp(A; \rho) = \{a \in \mathbb{R} \mid \text{Tr}[E^A(\{a\})\rho] > 0\}$ に対し測定後の状態 $\rho_{\{A=a\}}$ が一意に定まり、 $a_{\mathcal{H}}$ に対する遷移確率は

$$(9) \quad \begin{aligned} \Pr(\Delta \leftarrow \rho) &= \sum_{a \in Sp(A; \rho)} \text{Tr}[E^A(\{a\})\rho] \delta_{\rho_{\{A=a\}}}(\Delta), \\ \Pr(\rho_{\{A=a\}} \leftarrow \rho) &= \text{Tr}[E^A(\{a\})\rho]. \end{aligned}$$

すなわち、準備された状態において、物理量の正確な測定により得られる値ごとに測定後の状態が定まる規則が遷移確率として与えられるという仮説である。(9) 式の表示は兎に角、連続スペクトルをもつ物理量の場合においてもこの仮説は妥当であると考えられるのは自然であろう。というも、Bayes 流の条件付き確率と考え方が酷似しているからである（ここでは詳細を述べない）。具体的に測定後の状態を考察した先駆者は Heisenberg であったり Dirac であったり von Neumann である。特に、離散物理量の場合には射影仮説として知られている。

仮説 2 (von Neumann-Lüders 射影仮説) .

密度作用素 ρ において A が正確に測定される時、 $\text{Tr}[E^A(\{a\})\rho] > 0$ ならば、

$$(10) \quad \rho_{\{A=a\}} = \frac{E^A(\{a\})\rho E^A(\{a\})}{\text{Tr}[\rho E^A(\{a\})]}$$

更には、 $\Delta \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ に属さない A の値を無視する状況での、測定後の状態 $\rho_{\{A \in \Delta\}}$ は次で与えられる：

$$(11) \quad \frac{\sum_{a \in \Delta} \text{Tr}[\rho E^A(\{a\})] \rho_{\{A=a\}}}{\text{Tr}[\rho E^A(\Delta)]} = \frac{(\sum_{a \in \mathbb{R}} E^A(\{a\})\rho E^A(\{a\})) \cdot E^A(\Delta)}{\text{Tr}[\rho E^A(\Delta)]}.$$

仮説 1,2 をあわせると離散物理量が非退化な場合に Dirac の遷移確率 [6] を含んでいる。von Neumann [19] は非退化な場合に仮説 2 を考え、Lüders [17] は退化した場合に一般化した。また、von Neumann [19] は反復可能性仮説を次の仮説から導出した：

仮説 3 (反復可能性仮説) .

対象系の物理量 A を続けて二度測定したら、一度に同じ値を得る。

この仮説は von Neumann らが研究していた当時、前提とされていたことは [31] に解説されている。

遷移確率の観点それ自体重要であるが、作用素代数・量子確率論 [16] の観点は現在の量子測定理論につながる点で非常に重要な貢献をしてきた。中村と梅垣は [18] において、von Neumann-Lüders 射影仮説に登場する、写像

$$\rho \mapsto \sum_{a \in \mathbb{R}} E^A(\{a\})\rho E^A(\{a\})$$

が $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ から von Neumann 部分代数 $\{A\}' = \{B \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) \mid AB = BA\}$ への条件付き期待値（の前双対写像）[37] に他ならないことを指摘し、連続スペクトルをもつ物理量に対しても同様の議論が成り立つと予想した。Arveson [3] は連続的な場合、そのような条件付き期待値は存在しないことを示した。これらの先行研究に続き、Davies と Lewis [5] は反復可能性仮説（仮説 3）を放棄し、測定により生じる一般の状態変化を記述するインストルメントの概念を導入した。小澤 [28] は完全正值インストルメントを

導入し, $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ 上の完全正值インストルメントは測定過程で定義されることを示した。[24]では一般の von Neumann 代数上での完全正值インストルメントが測定過程で定義されるための必要十分条件を見出した。[27]では C^* -代数的量子論の場合にインストルメントを定義し解析した。

4. 遷移確率：続き

Q と P それぞれ (b, c) , (a, b) に対する遷移確率とする。

定義 5 (合成). (i) P が離散的であるとき, Q と P の逐次遷移確率 $Q * P$ とは, 各 $\omega \in \mathcal{S}_a$ に対し,

$$(12) \quad (Q * P)(\Gamma \times \Delta | \omega) = \sum_{\rho \in \mathcal{S}_{P, \omega} \cap \Delta} Q(\Gamma \leftarrow \rho) P(\rho \leftarrow \omega)$$

により定まる $\mathcal{S}_{\mathcal{X}_c} \times \mathcal{S}_{\mathcal{X}_b}$ 上の確率測度のことである。

(a, c) に対する遷移確率 $Q \triangleleft P$ を

$$(13) \quad (Q \triangleleft P)(\Gamma \leftarrow \omega) = (Q * P)(\Gamma \times \mathcal{S}_{\mathcal{X}_b} | \omega)$$

で定める。この遷移確率を Q と P の合成と呼ぶ。

Riesz-Markov-Kakutani の定理から, コンパクト空間 S 上の確率測度と連続関数のなす C^* -代数 $C(S)$ 上の状態を同一視する:

$$(14) \quad P(f) = \int_S f(s) dP(s), \quad f \in C(S).$$

定義 6 (定義 5 の続き). (ii) Q と P が合成可能であるとは, $(C(\mathcal{S}_{\mathcal{X}_a})$ 上の状態として) P に収束する (a, b) に対する離散的遷移確率のネット $\{P_\alpha\}_{\alpha \in A}$ で $\omega_P = \omega_{P_\alpha}$ を満たすものに対し, $f \mapsto \lim_\alpha (Q * P_\alpha)(f | \omega)$ が $\{P_\alpha\}_{\alpha \in A}$ の選択によらない $C(\mathcal{S}_{\mathcal{X}_c} \times \mathcal{S}_{\mathcal{X}_b})$ 上の状態になるとき, $Q * P := \lim_\alpha Q * P_\alpha$ を Q と P の逐次遷移確率 $Q * P$ と呼ぶ。

Q と P が合成可能なとき, (a, c) に対する遷移確率 $Q \triangleleft P$ を

$$(15) \quad (Q \triangleleft P)(\Gamma \leftarrow \omega) = (Q * P)(\Gamma \times \mathcal{S}_{\mathcal{X}_b} | \omega).$$

で定める。この遷移確率を Q と P の合成と呼ぶ。

この合成を用いて, **状態遷移の圏** を定義する。

定義 7 (状態遷移の圏). 状態遷移の圏は次で与えられる:

対象: C^* -確率構造 $a = (\mathcal{X}_a, \mathcal{V}_a)$

射: $b \leftarrow a : f$ は (a, b) に対する遷移確率 P_f

射の合成: 遷移確率の合成

恒等射: 各対象 a に対する恒等射 $a \leftarrow a : 1_a$ の遷移確率は $P_{1_a}(\Delta \leftarrow \omega) = \delta_\omega(\Delta)$, $\Delta \in \mathcal{B}(\mathcal{S}_{\mathcal{X}_a})$, $\omega \in \mathcal{S}_a$

5. 測定理論

量子測定理論が立脚している, インストルメントの定義と基本的性質についてこの章で解説する。作用素代数と測度論が交差する題材であり, 数学的にも興味深い性質や困難が多くある。 $a, b \in C^*$ -PS とし, $P(\mathcal{V}_a, \mathcal{V}_b)$ を \mathcal{V}_a から \mathcal{V}_b への正值線型写像の集合とする。

定義 8 (インストルメント). (S, \mathcal{F}) を可測集合とする. \mathcal{I} が (a, b, S) に対するインストルメントであるとは, 以下の 3 条件を満たすときを言う:

(i) \mathcal{I} は \mathcal{F} から $P(\mathcal{V}_a, \mathcal{V}_b)$ への写像である.

(ii) すべての $\rho \in \mathcal{V}_a$ に対し, $\langle 1, \mathcal{I}(S)\rho \rangle = \langle 1, \rho \rangle$.

(iii) 各 $\rho \in \mathcal{V}_a$, $M \in \mathcal{V}_b^*$ および \mathcal{F} の互いに素な列 $\{\Delta_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ に対して,

$$(16) \quad \langle M, \mathcal{I}(\cup_j \Delta_j)\rho \rangle = \sum_{j=1}^{\infty} \langle M, \mathcal{I}(\Delta_j)\rho \rangle.$$

$a = b$ のとき, (a, b, S) に対するインストルメント \mathcal{I} を (a, S) に対するインストルメントと呼ぶ. 更には, \mathcal{M} を W^* -代数とし, $a = b = (\mathcal{M}, \mathcal{M}_*)$ のとき, (a, S) に対するインストルメント \mathcal{I} を (\mathcal{M}, S) に対するインストルメントと呼ぶ. $\|\mathcal{I}\varphi\|(\Delta) = \|\mathcal{I}(\Delta)\varphi\|$: (a, b, S) に対するインストルメント \mathcal{I} と $\varphi \in \mathcal{S}_a$ に対し定義される (S, \mathcal{F}) 上の確率測度 (a, b, S) に対するインストルメント \mathcal{I} と $\varphi \in \mathcal{S}_a$ に対し, \mathcal{I} の双対写像 $\mathcal{I}^*: \mathcal{V}_b^* \times \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{V}_a^*$ を, $\rho \in \mathcal{V}_a$, $M \in \mathcal{V}_b^*$, $\Delta \in \mathcal{F}$ に対し,

$$(17) \quad \langle M, \mathcal{I}(\Delta)\rho \rangle = \langle \mathcal{I}^*(M, \Delta), \rho \rangle,$$

で定義する. 双対写像自体の特徴づけがある (参照).

対象系 \mathbf{S} が $a = (\mathcal{X}_a, \mathcal{V}_a) \in \mathbf{C}^*\text{-PS}$ で記述されるときを考える.

Davies-Lewis の提唱 (修正版)

対象系 \mathbf{S} を測定する, 可測空間 (S, \mathcal{F}) に値をとる出力変数 \mathbf{x} をもつ測定装置 $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ ごとに, $b \in \mathbf{C}^*\text{-PS}$ および (a, b, S) に対するインストルメント \mathcal{I} が以下の意味でただ一つ存在する: $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ で測定後の系 \mathbf{S} は $b \in \mathbf{C}^*\text{-PS}$ で記述される. \mathbf{S} の各始状態 $\rho \in \mathcal{S}_a$ に対し, ρ における \mathbf{x} の出力に関する確率測度 $\Pr\{\mathbf{x} \in \Delta \mid \rho\}$ は

$$(18) \quad \Pr\{\mathbf{x} \in \Delta \mid \rho\} = \|\mathcal{I}(\Delta)\rho\|, \quad \Delta \in \mathcal{F},$$

で与えられる. そして, 始状態 ρ が準備され, $\Delta \in \mathcal{F}$ に属さない出力変数 \mathbf{x} の値は無視する状況での測定後の系の状態 $\rho_{\{\mathbf{x} \in \Delta\}} \in \mathcal{S}_b$ は, $\Pr\{\mathbf{x} \in \Delta \mid \rho\} > 0$ のとき,

$$(19) \quad \rho_{\{\mathbf{x} \in \Delta\}} = \frac{\mathcal{I}(\Delta)\rho}{\|\mathcal{I}(\Delta)\rho\|}$$

である. ただし, $\Pr\{\mathbf{x} \in \Delta \mid \rho\} = 0$ のときは $\rho_{\{\mathbf{x} \in \Delta\}}$ は不定である.

これまでは出力値の集まりである可測集合 $\Delta \in \mathcal{F}$ ごとにインストルメントを用いたときの測定後の状態を考えてきた. 実はインストルメントが与えられているとき出力値ごとの測定後の状態を考察可能になる [24, 29, 30]. それが以下で定義する被積分である.

定義 9 (被積分). $a, b \in \mathbf{C}^*\text{-PS}$ とする. \mathcal{I} を (a, b, S) に対するインストルメントとし $\rho \in \mathcal{S}_a$ とする. \mathcal{X}_b 上の状態の族 $\{\rho_s\}_{s \in S}$ が (\mathcal{I}, ρ) に対する被積分であるとは, 以下の条件を満たすときを言う:

(i) 写像 $s \mapsto \rho_s$ は弱* $\|\mathcal{I}\rho\|$ -可測である.

すなわち, すべての $X \in \mathcal{X}$ に対し, $s \mapsto \rho_s(X)$ は $\|\mathcal{I}\rho\|$ -可測である.

(ii) 各 $X \in \mathcal{X}$ と $\Delta \in \mathcal{F}$ に対し,

$$(20) \quad [\mathcal{I}(\Delta)\rho](X) = \int_{\Delta} \rho_s(X) d\|\mathcal{I}\rho\|(s).$$

定理 1. (a, b, S) に対するインストルメント \mathcal{I} と $\rho \in \mathcal{V}_a$ に対し, (\mathcal{I}, ρ) に対する被積分 $\{\rho_s\}_{s \in S}$ が常に存在する.

すなわち, 被積分の存在は保証されている.

定義 10. (a, b, S) に対するインストルメント \mathcal{I} が条件 (S) を満たすとは、各 $\rho \in \mathcal{V}_a$ に対し、写像 $s \mapsto \rho_s$ が強可測であるときをいう。

定義 11. (a, b, S) に対するインストルメント \mathcal{I} が条件 (C) を満たすとは、単位的正規正值線型写像 $\Psi: \mathcal{V}_b^* \otimes L^\infty(S, \mathcal{I}) \rightarrow \mathcal{V}_a^*$ で

$$(21) \quad \mathcal{I}^*(M, \Delta) = \Psi(M \otimes [\chi_\Delta]), \quad M \in \mathcal{V}_b^*, \Delta \in \mathcal{F}$$

を満たすものが存在するときをいう。

定義 12 (事後状態の族). \mathcal{I} を (a, b, S) に対するインストルメント, $\rho \in \mathcal{S}_a$ とする。 \mathcal{X}_a 上の状態の族 $\{\rho_s\}_{s \in S}$ が (\mathcal{I}, ρ) に対する事後状態の族であるとは、以下の条件を満たすときをいう：

- (i) 各 $s \in S$ に対し, $\rho_s \in \mathcal{S}_b$.
- (ii) 写像 $s \mapsto \rho_s$ は弱 $\|\mathcal{I}\rho\|$ -可測である。
- (iii) 各 $M \in \mathcal{V}_b^*$ と $\Delta \in \mathcal{F}$ に対し,

$$(22) \quad \langle M, \mathcal{I}(\Delta)\rho \rangle = \int_{\Delta} \langle M, \rho_s \rangle d\|\mathcal{I}\rho\|(s).$$

定理 2. 条件 (C) を満たす (a, b, S) に対するインストルメント \mathcal{I} と $\rho \in \mathcal{V}_a$ に対し、 (\mathcal{I}, ρ) に対する強可測な事後状態の族 $\{\rho_s\}_{s \in S}$ が存在する。すなわち、条件 (C) を満たす (a, b, S) に対するインストルメント \mathcal{I} は条件 (S) を満たす。

6. 状態遷移の圏の例

状態遷移の圏の具体例を挙げるまえに、インストルメントの圏を定義しよう。

$a, b \in \mathbf{C}^*\text{-PS}$ とし、 T を \mathcal{V}_a から \mathcal{V}_b への単位的正值線型写像とする。 $(a, b, \{*\})$ に対するインストルメント \mathcal{I}_T を次で定める：

$$(23) \quad \mathcal{I}_T(\{*\}) = T$$

これにより単位的正值線型写像とインストルメントを同一視する。

定義 13 (インストルメントの圏). インストルメントの圏とは次からなる：

対象: \mathbf{C}^* -確率構造 $a = (\mathcal{X}_a, \mathcal{V}_a)$

射: $b \leftarrow a$: \mathcal{I} は (a, b, S) に対するインストルメント \mathcal{I} ((S, \mathcal{F}) は可測空間, $S = \mathbb{R}^d$ ($d = 0, 1, 2, \dots$) を想定)

射の合成: インストルメントの合成

恒等射: 各対象 a に対する恒等射 $a \leftarrow a$: 1_a とは、 $(a, \{*\})$ に対するインストルメント $1_a(\{*\})\rho = \rho$, $\rho \in \mathcal{V}_a$, のこと。

上のインストルメントの合成とは次のように定義される：

定義 14 ([5, 36]). $\mathcal{I}', \mathcal{I}$ を (b, c, S') , (a, b, S) に対するインストルメントとする。 \mathcal{I}' と \mathcal{I} が合成可能であるとは、 $(a, c, S' \times S)$ に対するインストルメント \mathcal{I}'' で

$$(24) \quad \mathcal{I}''(\Gamma \times \Delta) = \mathcal{I}'(\Gamma)\mathcal{I}(\Delta)$$

を満たすものが存在するときをいう。この \mathcal{I}'' を \mathcal{I}' と \mathcal{I} の合成という。

合成可能でない例も知られている [36]。

定義 15 (インストルメントから誘導される遷移確率). (a, b) に対する遷移確率 P が (a, b, S) に対するインストルメント \mathcal{I} に誘導されるとは、 \mathcal{I} が条件 (S) を満たし、かつ

$$(25) \quad P(\Delta \leftarrow \omega) = \|\mathcal{I}\omega\|(\{s \in S \mid \omega_s \in \Delta\})$$

が任意の $\omega \in \mathcal{S}_a$ および $\Delta \in \mathcal{B}(\mathcal{S}_b)$ に対し成り立つときを言う。

例 3. 圏 $\mathcal{C}^{\mathcal{H}}$

ただ 1 つの対象: $a_{\mathcal{H}} = (B(\mathcal{H}), T(\mathcal{H}))$

射: インストルメントに誘導される遷移確率をもつ射

例 4. 圏 $\mathcal{C}^{\mathcal{M}}$

ただ 1 つの対象: $a_{\mathcal{M}} = (\mathcal{M}, \mathcal{M}_*)$

射: 条件 (C) を満たすインストルメントに誘導される遷移確率をもつ射

公理 3 のご利益は圏論的枠組みで最大限にいかされる。ここでの議論を公理としてまとめると、シュレディンガー描像のもつ積極的意味合いが明確な形で、以下のようになる。

公理 4 (シュレディンガー描像) .

C*-確率構造を対象とし、射がその間の遷移を記述する圏によって系を定める。射による状態の変化をシュレディンガー描像と呼ぶ。

この公理に至って、系の同一性が圏により規定されることになる。特徴として、物理量のなす C*-代数が変化する状況をも含む記述が可能である。本稿の議論は、モビリティの圏の研究 [33] から着想を得たものである。ただし、モビリティの圏とは「対象」についての考え方が少しだけ異なる。将来的には、量子場 [2, 14, 15, 34]、局所状態 [23]、圏代数、Schrödinger 描像以外の描像 [1, 26] とも結びつけたい。

REFERENCES

- [1] L. Accardi, A. Frigerio and J.T. Lewis, Quantum stochastic processes, Publ. Res. Inst. Math. Sci. **18** (1982), 97–133.
- [2] H. Araki, *Mathematical theory of quantum fields*, (Oxford UP, Oxford, 1999).
- [3] W. Arveson, Analyticity in operator algebras, Amer. J. Math. **89** (1967), 578–642.
- [4] O. Bratteli and D.W. Robinson, *Operator Algebras and Quantum Statistical Mechanics Vol.1* (2nd printing of 2nd ed.), (Springer, 2002).
- [5] E.B. Davies and J.T. Lewis, An operational approach to quantum probability, Commun. Math. Phys. **17** (1970), 239–260.
- [6] P.A.M. Dirac, *The Principles of Quantum Mechanics*, Fourth Edition, (Oxford UP, Oxford, 1958).
- [7] J. Dixmier, *C*-Algebras*, (North-Holland, Amsterdam, 1977).
- [8] J. Dixmier, *Von Neumann Algebras*, (North-Holland, Amsterdam, 1981).
- [9] S. Doplicher, R. Haag and J.E. Roberts, Fields, observables and gauge transformations I & II, Comm. Math. Phys. **13** (1969), 1–23; *ibid.* **15** (1969), 173–200.
- [10] S. Doplicher, R. Haag and J.E. Roberts, Local observables and particle statistics, I & II, Comm. Math. Phys. **23** (1971), 199–230; *ibid.* **35** (1974), 49–85.
- [11] S. Doplicher and J.E. Roberts, Endomorphism of C*-algebras, cross products and duality for compact groups, Ann. of Math. **130** (1989), 75–119.
- [12] S. Doplicher and J.E. Roberts, A new duality theory for compact groups, Invent. Math. **98** (1989), 157–218.
- [13] S. Doplicher and J.E. Roberts, Why there is a field algebra with a compact gauge group describing the superselection structure in particle physics, Comm. Math. Phys. **131** (1990), 51–107.
- [14] G.G. Emch, *Algebraic methods in statistical mechanics and quantum field theory*, (Wiley-Interscience, New York, 1972).
- [15] R. Haag, *Local quantum physics: Fields, Particles, Algebras*, 2nd ed., (Springer, Berlin, 2012).
- [16] A. Hora and N. Obata, *Quantum probability and spectral analysis of graphs*, (Springer, Berlin, 2007).
- [17] G. Lüders, Über die Zustandsänderung durch den Meßprozeß, Ann. Phys. (Leipzig) **8** (1951), 322–328.
- [18] M. Nakamura and H. Umegaki, On von Neumann’s theory of measurements in quantum statistics, Math. Japon. **7** (1962), 151–157.

- [19] J. von Neumann, *Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik*, (Springer, Berlin, 1932); *Mathematical Foundations of Quantum Mechanics*, (Princeton UP, Princeton, 1955).
- [20] I. Ojima, A unified scheme for generalized sectors based on selection criteria –Order parameters of symmetries and of thermality and physical meanings of adjunctions–, *Open Sys. Inform. Dyn.* **10** (2003), 235–279.
- [21] I. Ojima, “Micro-Macro Duality in Quantum Physics,” pp.143–161 in *Proc. Intern. Conf. on Stochastic Analysis, Classical and Quantum*, (World Scientific, 2005), arXiv:math-ph/0502038.
- [22] I. Ojima, K. Okamura and H. Saigo, Derivation of Born Rule from Algebraic and Statistical Axioms, *Open Sys. Inform. Dyn.* **21** (2014), 1450005.
- [23] I. Ojima, K. Okamura and H. Saigo, Local state and sector theory in local quantum physics, *Lett. Math. Phys.* **106** (2016), 741–763.
- [24] K. Okamura and M. Ozawa, Measurement theory in local quantum physics, *J. Math. Phys.* **57** (2016), 015209.
- [25] K. Okamura, Quantum theory starting from transition probability, *RIMS kokyuroku* **2010**, (2016) 69–77. <http://hdl.handle.net/2433/231579>
- [26] K. Okamura, Measuring processes and the Heisenberg picture. In: *Nagoya Winter Workshop: Reality and Measurement in Algebraic Quantum Theory*, edited by M. Ozawa et. al., (Springer, Singapore, 2018), pp.361–396.
- [27] K. Okamura, Towards a Measurement Theory for Off-Shell Quantum Fields, *Symmetry* **13**, (2021) 1183. <https://doi.org/10.3390/sym13071183>
- [28] M. Ozawa, Quantum measuring processes of continuous observables, *J. Math. Phys.* **25** (1984), 79–87.
- [29] M. Ozawa, Conditional probability and a posteriori states in quantum mechanics, *Publ. RIMS* **21** (1985), 279–295.
- [30] M. Ozawa, Concepts of conditional expectations in quantum theory, *J. Math. Phys.* **26** (1985), 1948–1955.
- [31] M. Ozawa, Heisenberg’s original derivation of the uncertainty principle and its universally valid reformulations, *Current Science* **109**, 2006–2016, (2015), arXiv:1507.02010.
- [32] V. Paulsen, *Completely bounded maps and operator algebras*, (Cambridge UP, Cambridge, 2002).
- [33] H. Saigo, M. Naruse, K. Okamura, H. Hori, and I. Ojima, Analysis of Soft Robotics Based on the Concept of Category of Mobility, *Complexity* **2019** (2019), 1490541. <https://doi.org/10.1155/2019/1490541>
- [34] R.F. Streater and A.S. Wightman, *PCT, spin and statistics, and all that*, (Princeton UP, Princeton, 2000).
- [35] M. Takesaki, *Theory of Operator Algebras I*, (Springer, Berlin, 1979).
- [36] J.D.M. Wright, Products of positive vector measures, *Quart. J. Math. Oxford* (2), **24** (1973), 189–206.
- [37] H. Umegaki, Conditional expectation in an operator algebra, *Tohoku Math. J.* **6**(2) (1954), 177–181.

量子平衡系の時間対称性の破れの非存在に関する厳密な結果の紹介 A review on some rigorous results of nonexistence of spontaneous symmetry breakdown of time-translation symmetry

Moriya Hajime

Kanazawa University, Japan

時間・量子測定・準古典近似の理論と実験～古典論と量子論の境界

1. ABSTRACT

This note is essentially based on my work [1]. I thank participants of this conference for useful communication.

The time invariance of equilibrium states has been known in the math-physics literature, where an infinite-volume Heisenberg time evolution is given by C^* -dynamics. The time-invariance of any equilibrium state implies impossibility of spontaneous breakdown of time-translation symmetry in general quantum models. In particular, any non-trivial order, such as periodic, quasi-periodic, and chaotic order cannot appear in the time direction of equilibrium states for general quantum models.

2. SETUP AND BASIC FACTS

This section describes our mathematical setup based on the C^* -algebraic quantum statistical mechanics. We refer to [2] as our basic reference.

Let Γ denote an infinite space such as \mathbb{R}^μ and \mathbb{Z}^μ ($\mu \in \mathbb{N}$). Γ has a natural additive group structure: $\xi_x(y) := y + x \in \Gamma$ for $x, y \in \Gamma$. Let \mathfrak{F} be a set of all subsets of Γ . If $\Lambda \in \mathfrak{F}$ has finite volume $|\Lambda| < \infty$, then we denote ' $\Lambda \Subset \Gamma$ '. Let $\mathfrak{F}_{\text{loc}}$ denote the set of all finite subsets (or the set of sufficiently many finite subsets of a certain shape) of Γ . Let \mathcal{A} denote a quasi-local C^* -system on Γ describing the infinite quantum system under consideration. The total system \mathcal{A} includes subsystems denoted by a family of its C^* -subalgebras $\{\mathcal{A}_\Lambda; \Lambda \in \mathfrak{F}\}$ indexed by \mathfrak{F} . The local algebra defined by $\mathcal{A}_{\text{loc}} := \bigcup_{\Lambda \in \mathfrak{F}_{\text{loc}}} \mathcal{A}_\Lambda$ is a norm dense subalgebra of \mathcal{A} . The local commutativity condition is assumed. Namely, for any two disjoint subsets Λ and Λ' the following commutation relations are satisfied:

$$[A, B] \equiv AB - BA = 0 \quad \forall A \in \mathcal{A}_\Lambda, \forall B \in \mathcal{A}_{\Lambda'}.$$

Let $\{\tau_x \in \text{Aut}(\mathcal{A}), x \in \Gamma\}$ denote the group of space-translation automorphisms on \mathcal{A} . Then $\tau_x(\mathcal{A}_\Lambda) = \mathcal{A}_{\Lambda+x}$ for any $\Lambda \in \mathfrak{F}$ and $x \in \Gamma$.

A state on \mathcal{A} is defined by a normalized positive linear functional on \mathcal{A} . We denote the set of all states on \mathcal{A} by $S(\mathcal{A})$. It is an affine space with the affine combination of states. For each $\omega \in S(\mathcal{A})$ the triplet $(\mathcal{H}_\omega, \pi_\omega, \Omega_\omega)$ denotes the Gelfand-Naimark-Segal (GNS) representation associated with ω . The GNS representation generates the von Neumann algebra $\mathfrak{M}_\omega := \pi_\omega(\mathcal{A})''$ on the GNS Hilbert space \mathcal{H}_ω . The commutant of \mathfrak{M}_ω is given by $\mathfrak{M}'_\omega := \{X \in \mathfrak{B}(\mathcal{H}_\omega); [X, Y] = 0 \forall Y \in \mathfrak{M}_\omega\}$, and the center of \mathfrak{M}_ω is given by $\mathfrak{Z}_\omega := \mathfrak{M}_\omega \cap \mathfrak{M}'_\omega$. The center \mathfrak{Z}_ω contains all macroscopic observables with respect to ω , and thereby \mathfrak{Z}_ω provides macroscopic (or thermodynamical) information

about ω . In general, any order parameter that distinguishes different phases has its corresponding element in the center. For example, the energy density and the magnetization per unit volume for any space translation invariant state, and the staggered magnetization per unit cell for any space-periodic state belong to the center.

A state $\omega \in S(\mathcal{A})$ is called a factor state if its center is trivial $\mathfrak{Z}_\omega = \mathbb{C}I$, where I is the identity operator on \mathcal{H}_ω . The set of all factor states on \mathcal{A} is denoted by $S_{\text{factor}}(\mathcal{A})$. Any $\omega \in S_{\text{factor}}(\mathcal{A})$ is known to satisfy the uniform cluster property with respect $\{\tau_x \in \text{Aut}(\mathcal{A}), x \in \Gamma\}$. Hence factor states are sometimes identified with pure phases. Each $\omega \in S(\mathcal{A})$ has its factorial (central) decomposition:

$$(1) \quad \omega = \int d\mu(\omega_\lambda)\omega_\lambda, \quad \omega_\lambda \in S_{\text{factor}}(\mathcal{A}),$$

where μ denotes the unique probability measure on $S_{\text{factor}}(\mathcal{A})$ determined by ω . Note that the above $\omega \in S(\mathcal{A})$ is not necessarily translation invariant.

Assume that our stationary Heisenberg-type quantum time evolution is given by a one-parameter group of automorphisms $\{\alpha_t \in \text{Aut}(\mathcal{A}), t \in \mathbb{R}\}$ on the quasi-local C^* -algebra \mathcal{A} . We need continuity for $\{\alpha_t \in \text{Aut}(\mathcal{A}), t \in \mathbb{R}\}$ with respect to $t \in \mathbb{R}$. We assume the strong continuity:

$$(2) \quad \lim_{t \rightarrow 0} \alpha_t(A) = A \text{ in norm for each fixed } A \in \mathcal{A}.$$

It is known that any short-range quantum spin lattice model generates a strongly continuous time evolution $\{\alpha_t \in \text{Aut}(\mathcal{A}), t \in \mathbb{R}\}$.

We define equilibrium states for infinite quantum systems by the Kubo-Martin-Schwinger (KMS) condition, which is given in terms of certain temporal correlation (Green's) functions. Let $\beta \geq 0$ denote an inverse temperature. Define $D_\beta := \left\{ z \in \mathbb{C}; 0 \leq \text{Im}z \leq \beta \right\}$ and let \mathring{D}_β denote its interior region, i.e. the open strip $\left\{ z \in \mathbb{C}; 0 < \text{Im}z < \beta \right\}$. A state φ on \mathcal{A} is called a β -KMS state for the time evolution $\{\alpha_t \in \text{Aut}(\mathcal{A}), t \in \mathbb{R}\}$ if for every $A, B \in \mathcal{A}$, there exists a complex function $F_{A,B}(z)$ of $z \in D_\beta$ such that $F_{A,B}(z)$ is analytic in \mathring{D}_β , and for all $t \in \mathbb{R}$

$$(3) \quad F_{A,B}(t) = \varphi(A\alpha_t(B)), \quad F_{A,B}(t + i\beta) = \varphi(\alpha_t(B)A).$$

The set of β -KMS states is denoted by $S_{\alpha_t, \beta}(\mathcal{A})$. Ground states are straightforwardly given by the KMS condition at $\beta = \infty$. The set of ground states is denoted by $S_{\alpha_t, \infty}(\mathcal{A})$.

We denote the set of all equilibrium states by $S_{\text{equil}}^{\alpha_t}(\mathcal{A})$, namely the set of all KMS states $\bigcup_{\beta \geq 0} S_{\alpha_t, \beta}(\mathcal{A}) \cup S_{\alpha_t, \infty}(\mathcal{A})$ for the same time evolution $\{\alpha_t \in \text{Aut}(\mathcal{A}), t \in \mathbb{R}\}$ over all inverse temperatures β .

To discuss temporal properties of equilibrium states, the KMS condition has obvious merits over the so called ‘‘Gibbs Ansatz’’ that is based on local Gibbs ensembles on finite boxes, because the KMS condition is directly given by the time evolution as stated above. In fact, the formula (3) of the KMS condition immediately implies that every $\varphi \in S_{\text{equil}}^{\alpha_t}(\mathcal{A})$ is invariant under $\{\alpha_t \in \text{Aut}(\mathcal{A}), t \in \mathbb{R}\}$: For any $t \in \mathbb{R}$

$$(4) \quad \varphi(\alpha_t(A)) = \varphi(A) \quad \text{for all } A \in \mathcal{A}$$

regardless of whether $\varphi \in S_{\text{equil}}^{\alpha_t}(\mathcal{A})$ is a factor state or not.

Next we address the structure of the space of equilibrium states. For any finite $\beta \geq 0$, the affine space $S_{\alpha_t, \beta}(\mathcal{A})$ is a Choquet simplex. Precisely, the set of extremal points $S_{\alpha_t, \beta}^{\text{ext}}(\mathcal{A})$ in $S_{\alpha_t, \beta}(\mathcal{A})$ coincides with $S_{\alpha_t, \beta}(\mathcal{A}) \cap S_{\text{factor}}(\mathcal{A})$. Hence each $\varphi \in S_{\alpha_t, \beta}(\mathcal{A})$ is uniquely written as an affine sum of $S_{\alpha_t, \beta}^{\text{ext}}(\mathcal{A})$ that coincides with the factorial decomposition as in (1):

$$(5) \quad \varphi = \int d\mu(\varphi_\lambda) \varphi_\lambda, \quad \varphi_\lambda \in S_{\alpha_t, \beta}^{\text{ext}}(\mathcal{A}) = S_{\alpha_t, \beta}(\mathcal{A}) \cap S_{\text{factor}}(\mathcal{A}),$$

where μ is a unique probability measure determined by φ . Any factor state φ_λ appearing in the factorial decomposition (5) is a KMS state, and therefore it is obviously time-invariant. The above general structure of KMS states follows from the fact that the center \mathfrak{Z}_φ of any $\varphi \in S_{\alpha_t, \beta}(\mathcal{A})$ is pointwise fixed under the time evolution.

For $\beta = \infty$, a similar statement holds by the stronger reason as follows. The affine space $S_{\alpha_t, \infty}(\mathcal{A})$ is face in $S(\mathcal{A})$. Namely, for any $\varphi \in S_{\alpha_t, \infty}(\mathcal{A})$, consider its state-decomposition $\varphi = \int d\mu(\varphi_\lambda) \varphi_\lambda$, $\varphi_\lambda \in S(\mathcal{A})$. Then each φ_λ belongs to $S_{\alpha_t, \infty}(\mathcal{A})$, and thus it is obviously invariant under the time evolution. The above general structure of ground states follows from the fact that the commutant \mathfrak{M}'_φ (and therefore \mathfrak{Z}_φ) of any $\varphi \in S_{\alpha_t, \infty}(\mathcal{A})$ is pointwise fixed under the time evolution.

3. NONEXISTENCE OF TIME-TRANSLATION SYMMETRY BREAKDOWN

We obtain the following general properties of equilibrium states.

Proposition 1. *All equilibrium states characterized by the KMS condition are invariant under the time evolution. Any macroscopic observable in the center is fixed under the time evolution, irrespective of whether the equilibrium state is factorial or non-factorial.*

Proposition 1 shows the frozen property of the center of any equilibrium state. The impossibility of spontaneous breakdown for time-translation symmetry in general quantum systems immediately follows from Proposition 1.

Theorem 2. *Suppose that a quantum time evolution is given as C^* -dynamics, and equilibrium states are given by the KMS condition with respect to the quantum time evolution. Then there is no spontaneous breakdown of time-translation symmetry, and therefore no temporal order exists in equilibrium states. In particular, periodic, quasi-periodic, and chaotic orders in the time direction are forbidden in equilibrium states.*

In the above theorem the one-parameter group of automorphisms $\{\alpha_t \in \text{Aut}(\mathcal{A}), t \in \mathbb{R}\}$ plays two roles. First, it describes a quantum time evolution that determines the model. Second, it describes a specific dynamical symmetry $(G, \theta) = (\mathbb{R}, \alpha)$ of the model due to the following obvious relation:

$$\alpha_t \circ \alpha_s = \alpha_s \circ \alpha_t = \alpha_{t+s} \in \text{Aut}(\mathcal{A}) \quad \text{for all } t \in \mathbb{R}, s \in \mathbb{R}.$$

Theorem 2 assumes existence of an infinite-volume time evolution as C^* -dynamics. Some examples are short-range quantum spin models [2].

4. ABSENCE OF LONG-RANGE TEMPORAL ORDER

Proposition 1 and Theorem 2 require no particular assumption on the spatial structure. Next we consider the special case where states and time evolution are homogeneous in space.

Each local observable gives a macroscopic observable on the GNS Hilbert space for any homogeneous state by its Cesàro sum under space translations. We introduce the following notations on infinite-volume limits. Suppose that a net $\{\Lambda; \Lambda \Subset \Gamma\}$ of finite subsets of Γ eventually includes any $I \Subset \Gamma$. Then, we denote $\{\Lambda \uparrow \Gamma; \Lambda \Subset \Gamma\}$ or simply $\{\Lambda \uparrow \Gamma\}$. Similarly, if a net $\{\Lambda; \Lambda \Subset \Delta\}$ eventually includes any $I \Subset \Delta$, then we denote $\{\Lambda \uparrow \Delta; \Lambda \Subset \Delta\}$ or simply $\{\Lambda \uparrow \Delta\}$.

Take any $A \in \mathcal{A}$. For any finite subset $\Lambda \Subset \Gamma$ (or $\Lambda \Subset \Delta$) we take the following averaged sum under space translations:

$$(6) \quad m_\Lambda(A) := \frac{1}{|\Lambda|} \sum_{x \in \Lambda} \tau_x(A) \in \mathcal{A}.$$

For $\omega \in S(\mathcal{A})$ let $m_\Lambda^\omega(A) := \pi_\omega(m_\Lambda(A)) \in \mathfrak{M}_\omega$. For any $\omega \in S_{\text{inv}}^{\tau, \Gamma}(\mathcal{A})$ and any $\{\Lambda \uparrow \Gamma; \Lambda \Subset \Gamma\}$, the net of uniformly bounded operators $\{m_\Lambda^\omega(A) \in \mathfrak{M}_\omega; \Lambda \uparrow \Gamma; \Lambda \Subset \Gamma\}$ has a(n) accumulation point(s) in the center \mathfrak{Z}_ω . Precisely, there exists a subnet of this net that converges to some element of the center in the weak-operator topology. We denote any such accumulation point by $\widehat{A}_\infty^\omega$. Heuristically, we write

$$(7) \quad \widehat{A}_\infty^\omega \equiv \lim_{\substack{\bar{\Lambda} \uparrow \Gamma; \\ \bar{\Lambda} \Subset \Gamma}} m_{\bar{\Lambda}}^\omega(A) \in \mathfrak{Z}_\omega,$$

where $\{\bar{\Lambda} \uparrow \Gamma; \bar{\Lambda} \Subset \Gamma\}$ is a subnet of $\{\Lambda \uparrow \Gamma; \Lambda \Subset \Gamma\}$ having a unique limit. When ω is a non-factor state, there can be multiple accumulation points that may depend on chosen subnets. Similarly, we consider $\omega \in S_{\text{inv}}^{\tau, \Delta}(\mathcal{A})$. Then every accumulation point of $\{m_{\bar{\Lambda}}^\omega(A) \in \mathfrak{M}_\omega; \bar{\Lambda} \uparrow \Delta; \bar{\Lambda} \Subset \Delta\}$ in the weak-operator topology belongs to \mathfrak{Z}_ω . If $\omega \in S_{\text{homo}}^\tau(\mathcal{A})$ is a factor state, these macroscopic observables are sharply determined with no dispersion; for each $A \in \mathcal{A}$ the above accumulation point is uniquely given by the scalar $\omega(A)\mathbb{I}$.

We give a general formulation of long-range order (LRO) in the C^* -algebraic setup. Take $\omega \in S_{\text{homo}}^\tau(\mathcal{A})$ and $A, B \in \mathcal{A}$. Denote their densities by $\widehat{A}_\infty^\omega \in \mathfrak{Z}_\omega$ and $\widehat{B}_\infty^\omega \in \mathfrak{Z}_\omega$ for a net $\{\Lambda \uparrow \Gamma; \Lambda \Subset \Gamma\}$ or $\{\Lambda \uparrow \Delta; \Lambda \Subset \Delta\}$ as in (7). Define the following two-point correlation function with respect to ω

$$(8) \quad f_{A,B}^\omega \equiv \left(\Omega_\omega, \widehat{A}_\infty^\omega \widehat{B}_\infty^\omega \Omega_\omega \right),$$

where the GNS representation of ω is used. If $f_{A,B}^\omega$ is non-zero, then ω is said to exhibit LRO for $A, B \in \mathcal{A}$. If $f_{A,A}^\omega$ is non-zero for some $A \in \mathcal{A}$, then ω is said to exhibit LRO and $A \in \mathcal{A}$ is called a local order parameter.

Now we consider the group action (G, θ) . For $A \in \mathcal{A}$ and $g \in G$, we define $\widehat{A}_\infty^\omega(g) := \widehat{\theta_g(A)}_\infty^\omega \in \mathfrak{Z}_\omega$, where $\theta_g(A)$ is substituted for A in (7). Consider the following two-point correlation function with respect to $\omega \in S_{\text{homo}}^\tau(\mathcal{A})$:

$$(9) \quad f_{A,B}^\omega(g) \equiv \left(\Omega_\omega, \widehat{A}_\infty^\omega(g) \widehat{B}_\infty^\omega \Omega_\omega \right), \quad g \in G.$$

If $f_{A,B}^\omega(g)$ is a non-constant function of $g \in G$, then ω is said to exhibit G -dependent LRO for $A, B \in \mathcal{A}$. If $f_{A,A}^\omega(g)$ is a non-constant function of $g \in G$ for some $A \in \mathcal{A}$, then ω is said to exhibit G -dependent LRO, and $A \in \mathcal{A}$ is called a local order parameter with respect to (G, θ) -symmetry.

Next we consider the quantum time evolution. Let $\varphi \in S_{\text{equil}}^{\alpha_t}(\mathcal{A}) \cap S_{\text{homo}}^\tau(\mathcal{A})$, i.e. an arbitrary homogeneous equilibrium state for $\{\alpha_t \in \text{Aut}(\mathcal{A}), t \in \mathbb{R}\}$. Substituting φ for $\omega \in S_{\text{homo}}^\tau(\mathcal{A})$, (\mathbb{R}, α) for (G, θ) , and $t \in \mathbb{R}$ for $g \in G$ of $\widehat{A}_\infty^\omega(g)$ defined above, we

get $\widehat{A}_\infty^\varphi(t) \in \mathfrak{Z}_\varphi$. Let $A, B \in \mathcal{A}$, and define the following two-point temporal correlation function with respect to φ :

$$(10) \quad f_{A,B}^\varphi(t) \equiv \left(\Omega_\varphi, \widehat{A}_\infty^\varphi(t) \widehat{B}_\infty^\varphi \Omega_\varphi \right), \quad t \in \mathbb{R}.$$

By the pointwise invariance of the center \mathfrak{Z}_φ under the time evolution $\{\alpha_t \in \text{Aut}(\mathcal{A}), t \in \mathbb{R}\}$ as stated in Proposition 1 we have

$$(11) \quad \widehat{A}_\infty^\varphi(t) = \widehat{A}_\infty^\varphi, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Therefore, by (11) the temporal correlation function is always t -invariant:

$$(12) \quad f_{A,B}^\varphi(t) = f_{A,B}^\varphi(0) \quad \text{for all } t \in \mathbb{R}.$$

We thus obtain the following absence of non-trivial temporal LRO.

Corollary 3. *Assume the same assumption of Theorem 2. Assume further that the time evolution is homogeneous in space. Then for any homogeneous equilibrium state there exists no non-trivial temporal LRO.*

5. DISCUSSION

We compare the general results given so far with the well-known no-go statement of quantum time crystals shown by [4], and see that ours are more general and thorough than that of [4].

First, LRO has different formulations. The C^* -algebraic formalism of LRO is based on states on a quasi-local C^* -algebra, while the Griffiths's formalism of LRO is based on local Gibbs states on finite regions. We employ the former, whereas [4] utilizes a Griffiths-type LRO. The existence of non-trivial C^* -algebraic LRO is *equivalent* to the existence of certain SSB. On the other hand, only a one-sided implication is known in Griffiths-type LRO: If Griffiths-type LRO manifests in a spin lattice model, then a corresponding spontaneous symmetry breakdown exists, but in general, it is impossible to conclude the absence of symmetry breakdown from the absence of Griffiths-type LRO. Second we address Lieb-Robinson bound on which the work [4] put particular emphasis. We, however, do not use the Lieb-Robinson bound estimate anywhere in our statements.

Let us recall the history of quantum time crystals [3]. Wilczek first conceptualized quantum time crystals as self-organized temporal periodic structures Non of *equilibrium* states. These are called *genuine* quantum time crystals [6] to distinguish them from nonequilibrium time crystalline phenomena, which have been observed experimentally.

On the ground of our no-go statements that cover rather general quantum systems, we consider that the concept of genuine quantum crystals is an imaginary one. Its adjective “genuine” seems even misleading. It looks that the physics community has been ignorant of rigorous results on equilibrium states established in [2]. Those immediately negates this concept as we have seen.

Finally we address a remarkable work [5]. It gives a metastable quantum time crystal. It is not in equilibrium, but the Hamiltonian is time independent unlike “Floquet time crystals” and other quantum time crystal models [3]. The breakdown of time translation symmetry is induced by decoherence; it exploits a quantum mechanical effect rather than the usual mechanism of SSB. The model has similarity with the Wilczek's quantum time crystal model. Hence it will be deserved to be called a *genuine* quantum time crystal rather than the artificial long range model [6].

REFERENCES

- [1] H. Moriya, Nonexistence of spontaneous symmetry breakdown of time-translation symmetry: a review, arXiv:2201.06051
- [2] O. Bratteli and D. W. Robinson, *Operator Algebras and Quantum Statistical Mechanics 1. 2nd Edition* (Springer-Verlag, 1987), *ibid 2. 2nd Edition* (Springer-Verlag, 1997).
- [3] V. Khemani, R. Moessner and S. L. Sondhi, A brief history of time crystals, arXiv:1910.10745.
- [4] H. Watanabe., M., Oshikawa M. and T. Koma, Proof of the absence of long-range temporal orders in Gibbs states, J. Stat. Phys. **178**, 926-935 (2020).
- [5] K. Nakatsugawa, T. Fujii and S. Tanda, Quantum time crystal by decoherence: Proposal with an incommensurate charge density wave ring. Phys. Rev. B **96**, 094308 (2017)
- [6] V. K. Kozin and O. Kyriienko, Quantum time crystals from Hamiltonians with long-range interactions, Phys. Rev. Lett. **123**, 210602 (2019).

量子ウォークの時間作用素について

佐々木 格

信州大学

(joint work with D. Funakawa, Y. Matsuzawa, A. Suzuki, N. Teranishi)

1. 時間作用素の導入

量子系の状態のヒルベルト空間を \mathcal{H} , ハミルトニアンを H で表す。 \mathcal{H} は自己共役でなければならないので $H = H^*$ である。このとき、量子系の状態の時間発展は $\psi(t) := e^{-itH}\psi(0)$ で与えられる。

\mathcal{H} 上の対称作用素 T (つまり $T \subset T^*$) が時間作用素であることの定義を紹介する。定義はいくつかあり、そのうち代表的なものを挙げる。

- (a) $[T, H] = i$ が適当な部分空間 $D \subset D(TH) \cap D(HT)$ で成立。
 (b) (弱 Weyl 関係式, 強時間作用素) $\forall \psi \in D(T), \forall t \in \mathbb{R}, e^{-itH}\psi \in D(T)$ かつ

$$Te^{-itH}\psi = e^{-itH}(T+t)\psi$$

- (c) (Weyl 関係式) T は自己共役で, $e^{isT}e^{itH} = e^{-ist}e^{itH}e^{isT}$ 。

ここで, (b) は以下の作用素の等式と同値である:

$$(1) \quad e^{itH}Te^{-itH} = T + t, \quad t \in \mathbb{R}$$

ここで (1) は $D(T)$ が e^{-itH} の作用によって不変であることも含むことを注意しておく。(1) から (b) の時間作用素 T は非有界作用素であることが直ちに導かれる。(c) はもっとも強い条件であり, これを満たす T, H は $x, -id/dx$ の直和と同型になることが知られている (von Neumann)。

1.1. 量子ウォークに対する時間作用素. 次に量子ウォークに対する時間作用素を定義する。量子ウォークはハミルトニアンの代わりに単位時間の時間発展 U が定義された量子模型である。つまり, 状態のヒルベルト空間 \mathcal{H} 上のユニタリ作用素 U が定義されていて, 状態 ψ の n 時間後の状態は $U^n\psi$ で与えられる。

Sambou, Tiedra de Aldecoa は論文 [2](2020) で次のように時間作用素を定義した。 \mathcal{H} 上のエルミート作用素 T が時間作用素であるとは, 適当な部分空間 $D \subset \mathcal{H}$ 上で $TU - UT = U$ となることである。

一方, 我々は (1) のアナロジーから強時間作用素 T を

$$(2) \quad U^*TU = T + 1$$

によって定義する。

時間作用素に関する基本的な問題は次のとおりである。

- 与えられたユニタリ作用素 U に対して (2) を満たす T は存在するか。
- そのときの T の性質 (自己共役性, スペクトル) を調べよ。
- U と T の関係を調べよ。

1.2. 時間作用素の基本的な性質 1. $\mathbb{T} := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ とする。

Proposition 1. T は U の強時間作用素であるとする。このとき

- (1) T の閉包 \bar{T} も U の強時間作用素である。
- (2) $[T, U] = U$ が $D(T)$ 上で成立する。つまり, T は時間作用素である。しかし, 逆は一般には成り立たない。
- (3) $\sigma(T) = \sigma(T+1)$, 特に T は非有界であり, $D(T) \neq \mathcal{H}$.
- (4) T が本質的に自己共役なら $\sigma(U) = \mathbb{T}$.

Proof. 証明はどれも易しい。ここでは (4) の証明を紹介する。仮定から $e^{it\bar{T}}$ が定義され, 任意の $t \in \mathbb{R}$ に対して

$$U^* e^{it\bar{T}} U = e^{itU^*\bar{T}U} = e^{it(\bar{T}+t)} \quad (\text{ユニタリ共変性})$$

したがって, $e^{it\bar{T}} U e^{-it\bar{T}} = e^{itU}$ であり, $\sigma(U) = \sigma(e^{itU}) = e^{it}\sigma(U)$ 。故に $\sigma(U)$ は \mathbb{T} 全体である。□

1.3. 時間作用素の基本的な性質 2. Miyamoto による論文 [1] によって, ハミルトニアンに対する時間作用素の議論が一般的な枠組みで行われた。次の結果は Miyamoto によって得られていた結果を量子ウォークの場合に示したものである。

Theorem 2 ([3]). U が強時間作用素 T を持つとする。このとき, U は固有値を持たない。

Theorem 3 ([3]). U が強時間作用素 T を持つとする。このとき, 任意の $n \in \mathbb{N}$, $\psi \in D(T^n)$, $\phi \in D((T^*)^n)$ に対して, ある定数 $C_n(\psi, \phi) > 0$ が存在して,

$$|\langle \phi, U^t \psi \rangle| \leq \frac{C_n(\psi, \phi)}{|t|^n}, \quad t \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$$

1.4. 例. 量子ウォークにおける時間作用素の例を紹介する。 $\mathcal{H} = \ell^2(\mathbb{Z})$ とする。左シフト作用素

$$D(L) := \mathcal{H}, \quad (L\psi)(x) := \psi(x+1), \quad \psi \in \mathcal{H}, x \in \mathbb{Z}$$

はユニタリである。位置作用素 X を

$$D(X) := \left\{ \psi \in \mathcal{H} \mid \sum_{x \in \mathbb{Z}} |x\psi(x)|^2 < \infty \right\}$$

$$(X\psi)(x) = x\psi(x), \quad \psi \in D(X), x \in \mathbb{Z}$$

で定める。このとき, $L^*(-X)L = -X + 1$ なので, $-X$ は L の強時間作用素である。したがって, Proposition 1 より $\sigma(L) = \mathbb{T}$ である。明らかに, 強時間作用素 $-X$ は自己共役かつ

$$\sigma(-X) = \sigma_p(-X) = \mathbb{Z}$$

である。これは時間作用素 X のスペクトルは量子化されることを意味している。反対に, ハミルトニアン系 (連続時間) の強時間作用素は固有値を持たない事が示されている (Miyamoto [1])。

2. ユニタリ掛け算作用素の時間作用素

周期 2π の連続な写像 $\lambda: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{T}$ は, 整数 m と周期 2π の連続関数 θ を用いて

$$\lambda(k) = e^{i(mk + \theta(k))}, \quad k \in \mathbb{R}$$

と表すことができる (m は winding number と呼ばれる)。 $\mathcal{K}_1 := L^2([0, 2\pi], dk/2\pi)$ 上の $\lambda(k)$ による掛け算作用素はユニタリである。 \mathcal{K}_1 上の運動量演算子を

$$\begin{aligned} D(P) &:= \{f \in AC[0, 2\pi] \mid f' \in \mathcal{K}_1, f(0) = f(2\pi)\}, \\ Pf &= -if' \end{aligned}$$

で定義する。このとき, P は自己共役である。

Theorem 4 ([3]). λ は 2 回連続微分可能で, λ' は $[0, 2\pi)$ に高々有限個の零点を持つとする。このとき

$$(3) \quad T := \frac{1}{2} \left(\frac{1}{m + \theta'(k)} P + P \frac{1}{m + \theta'(k)} \right)$$

は $\lambda(k)$ の強時間作用素である。

ここで, 次の関係式に注意する。

$$\begin{aligned} \lambda'(k) = 0 &\Leftrightarrow m + \theta'(k) = 0 \\ 1/(m + \theta'(k)) &= i\lambda(k)/\lambda'(k) \end{aligned}$$

2.1. 例 2. $I = [a, b]$ とする。 $L^2([a, b], dE)$ 上の次で定義される微分作用素

$$\begin{aligned} D(P_I) &:= \{f \in AC[a, b] \mid f' \in L^2([a, b]), f(a) = f(b) = 0\} \\ P_I f &:= -if' \end{aligned}$$

を考える ($E \in [a, b]$ は変数)。このとき, P_I はユニタリ作用素 e^{iE} の強時間作用素である:

$$e^{-iE} P_I e^{iE} = P_I + 1$$

また, $\ker(P_I^* \mp i)$ は $e^{\pm ik}$ で張られる 1 次元部分空間であり, 不足指数 $\dim \ker(P_I^* \pm i) = 1$ を持つ。特に, P_I は対称だが非自己共役であり $\sigma(P_I) = \mathbb{C}$ 。

2.2. 時間作用素の分解. Theorem 4 の時間作用素を考える:

$$T = \frac{i}{2} \left(\frac{\lambda}{\lambda'} P + P \frac{\lambda}{\lambda'} \right).$$

$g(k) = m + \theta'(k)$ とする。このとき, Theorem 4 と同じ条件の元で次が成り立つ。

Theorem 5. (1) λ' が零点を持つ場合, 零点を $0 \leq a_1 < a_2 < \dots < a_n < 2\pi(a_{n+1} = 2\pi + a_1)$ とし $I_j = (a_j, a_{j+1})$ とおく。このとき, ユニタリ作用素 $V: \mathcal{K}_1 \rightarrow \bigoplus_{j=1}^n L^2(g(\bar{I}_j), dE)$ が存在して

$$V \bar{T} V^{-1} = \bigoplus_{j=1}^n P_{I_j}, \quad V \lambda(k) V^{-1} = \bigoplus_{j=1}^n e^{iE}$$

- (2) λ' が零点を持たないとき, $m \neq 0$ かつ T は自己共役である。さらに, ユニタリ作用素 $V: \mathcal{H}_1 \rightarrow \bigoplus_{j=0}^{|m|-1} \mathcal{H}_1$ が存在して

$$VTV^{-1} = \bigoplus_{j=0}^{|m|-1} \left(P + \frac{j}{|m|} \right), \quad V\lambda(k)V^{-1} = \bigoplus_{j=0}^{|m|-1} e^{iE}.$$

- (3) T の不足指数 $d_{\pm}(T)$ は λ' の $[0, 2\pi)$ における零点の個数に等しい。特に, T は自己共役拡大を持つ。

Corollary 6. λ, m, T を Theorem 4, 5 と同じものとする。このとき

- (1) λ' が零点を持てば, $\sigma(T) = \mathbb{C}$
(2) λ' が零点を持たなければ, $\sigma(T) = \{s/m \mid s \in \mathbb{Z}\}$.

(\because) (1) は不足指数に関する一般論から従う。(2) は $\sigma(P) = \mathbb{Z}$ から

$$\sigma(T) = \bigcup_{j=0}^{|m|-1} \sigma\left(P + \frac{j}{|m|}\right) = \left\{ \frac{s}{m} \mid s \in \mathbb{Z} \right\}.$$

3. 量子ウォークの時間作用素

以降, 1 次元の同次 (homogeneous) 量子ウォークを考える。

3.1. 時間作用素の一般的構成. 状態のヒルベルト空間は $\mathcal{H} := \ell^2(\mathbb{Z}; \mathbb{C}^2) = \ell^2(\mathbb{Z}) \oplus \ell^2(\mathbb{Z})$ である。量子ウォークの時間発展 U は 2 つのユニタリ作用素 (シフト作用素 S とコイン作用素 C)

$$S = \begin{pmatrix} L & 0 \\ 0 & L^* \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

を用いて次で定義される。

$$U = SC = \begin{pmatrix} La & Lb \\ L^*c & L^*d \end{pmatrix}$$

これは Fourier 変換 $\mathcal{F}: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H} := L^2([0, 2\pi], dk/2\pi; \mathbb{C}^2) = \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_1$ によって

$$\mathcal{F}U\mathcal{F}^* = \hat{U}(k) := \begin{pmatrix} e^{ik}a & e^{ik}b \\ e^{-ik}c & e^{-ik}d \end{pmatrix}$$

と掛け算型のユニタリ行列に変換できる。さらに行列 $\hat{U}(k)$ の固有値を $\lambda_1(k), \lambda_2(k) \in \mathbb{T}$, 対応する固有ベクトルを $v_1(k), v_2(k) \in \mathbb{C}^2$ とする。このとき, ユニタリ行列 $W(k) := (v_1(k), v_2(k))$ によって次の変換を得る:

$$W(k)^{-1}\hat{U}(k)W(k) = \begin{pmatrix} \lambda_1(k) & 0 \\ 0 & \lambda_2(k) \end{pmatrix}$$

\mathcal{H}_1 上のユニタリ掛算 $\lambda_j(k)$ に対する時間作用素を Theorem 4 で作る:

$$\hat{T}_j := \frac{i}{2} \begin{pmatrix} \lambda_j(k) & \\ & \lambda_j'(k) \end{pmatrix} P + P \frac{\lambda_j(k)}{\lambda_j'(k)}, \quad j = 1, 2.$$

ここから

$$T := \mathcal{F}^{-1}W(k) \begin{pmatrix} \hat{T}_1 & 0 \\ 0 & \hat{T}_2 \end{pmatrix} W(k)^{-1}\mathcal{F}$$

によって U の強時間作用素の一つを作ることができる。

3.2. 1ステップ量子ウォークの時間作用素 T の解析. コイン作用素を

$$C = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |a|e^{i\alpha} & b \\ -b e^{i\delta} & |a|e^{i(\delta-\alpha)} \end{pmatrix}$$

と表す ($\alpha, \delta \in [0, 2\pi)$)。このとき, $\lambda_1(k), \lambda_2(k)$ は次のようにかける。

Lemma 7. (1) $a = 0$ のとき, $\lambda_1(k) = e^{i(\pi+\delta)/2}, \lambda_2(k) = e^{i(-\pi+\delta)/2}$ (定数) .

(2) $0 < |a| < 1$ のとき, $\tau(k) := |a| \cos(k + \alpha - \delta/2)$ を使って,

$$\lambda_j(k) = e^{i\delta/2} \{ \tau(k) + i(-1)^{j-1} \sqrt{1 - \tau(k)^2} \}, j = 1, 2$$

(3) $|a| = 1$ なら, $\lambda_1(k) = e^{i(k+\alpha)}, \lambda_2(k) = e^{i(-k+\delta-\alpha)}$.

直ちに次のことがわかる, (1) の場合, λ_1, λ_2 は定数なので明らかに強時間作用素は構成できない。(2) の場合は, $\sigma(U) \neq \mathbb{T}$ なので, Proposition 1 から U は強時間作用素を持つことはできない。

$\lambda_j(k) = e^{i(m_j k + \theta_j(k))}$ と表すとき, 次が成り立つ。

Lemma 8. (1) $a = 0$ なら, $m_1 = m_2 = 0$ かつ $\theta'_1 = \theta'_2 = 0$.

(2) $0 < |a| < 1$ なら $m_1 = m_2 = 0$ かつ

$$\theta'_1(k) = \frac{d \arccos \tau(k)}{dk}, \theta'_2(k) = -\theta'_1(k).$$

(3) $|a| = 1$ のとき, $m_1 = 1, m_2 = -1$ かつ $\theta'_1 = \theta'_2 = 0$.

3.3. 1ステップ量子ウォークの時間作用素 T の性質.

Theorem 9. $j = 1, 2$ について, \hat{T}_j を Theorem 4 で作られた $\lambda_j(k)$ の強時間作用素とすると,

(2) $0 < |a| < 1$ の場合,

$$\hat{T}_1 = \frac{-1}{2} \left(\tau'(k) \sqrt{1 - \tau(k)^2} P + P \tau'(k) \sqrt{1 - \tau(k)^2} \right), \hat{T}_2 = -\hat{T}_1$$

さらに, T の不足指数は $d_{\pm}(T) = 2 + 2 = 4$, $\sigma(T) = \mathbb{C}$ である。したがって, T は自己共役拡大を持つが, それらが強時間作用素にはならない。

(3) $|a| = 1$ の場合, $\hat{T}_1 = P, \hat{T}_2 = -P$ となるので, T は自己共役な強時間作用素で, $\sigma(T) = \mathbb{Z}$ 。

4. 3ステップ量子ウォーク

1ステップの量子ウォークの例では $m_j = 0, \pm 1$ であり, ± 1 の場合は自明なダイナミクスであった。以下では, 非自明なワインディングナンバー m_j を持つ非自明な量子ウォークを構成する。これは3ステップ量子ウォークによって実現される。2ステップでそのようなものを構成する事は難しい (不可能かもしれない)。

$\mathcal{H} = \ell^2(\mathbb{Z}; \mathbb{C}^2)$ 上のユニタリ作用素

$$U_3 := SC_1SC_2SC_3$$

を考える。 S は以前のシフト作用素と同じであり, 3つのコイン作用素は

$$C_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, C_2 = \begin{pmatrix} b & a \\ -a & b \end{pmatrix}, C_3 = \begin{pmatrix} b & -a \\ a & b \end{pmatrix}$$

で定義する ($a, b \in \mathbb{R}$, $a^2 + b^2 = 1$)。 $b = 1$ は自明な場合なので $b^2 < 1$ の場合を考える。 U_3 を Fourier 変換すると

$$\hat{U}_3(k) = \begin{pmatrix} a^2 e^{ik} + b^2 e^{i3k} & abe^{ik} - abe^{i3k} \\ -abe^{-ik} + abe^{-i3k} & a^2 e^{-ik} + b^2 e^{-i3k} \end{pmatrix}$$

となる。

$\hat{U}_3(k)$ の固有値を計算すると、

$$\begin{aligned} \lambda_1(k) &= \cos k(1 - 4b^2 \sin^2 k) + i \sin k \sqrt{1 + (8b^2 - 16b^4) \cos^2 k + 16b^4 \cos^4 k} \\ \lambda_2(k) &= \overline{\lambda_1(k)} \end{aligned}$$

Theorem 4 にしたがって $\lambda_j(k)$ の強時間作用素

$$\hat{T}_j := \frac{i}{2} \left(\frac{\lambda_j(k)}{\lambda_j'(k)} P + P \frac{\lambda_j(k)}{\lambda_j'(k)} \right),$$

を定義することができ、

$$T := \mathcal{F}^{-1} W (\hat{T}_1 \oplus \hat{T}_2) W^{-1} \mathcal{F}$$

が U_3 の一つの強時間作用素を与える。

Theorem 5 によれば、 $\lambda_j(k)$ の零点の個数が \hat{T}_j の重要な情報を与える。具体的に計算すれば

$$|\lambda_1'(k)| \propto |1 + 8b^2 - 12b^2 \sin^2 k|$$

となり、これから

$$(\lambda_1 \text{ の零点の個数}) = \begin{cases} 0, & 0 \leq b^2 < 1/4 \\ 2, & b^2 = 1/4 \\ 4, & 1/4 < b^2 < 1 \end{cases}$$

がわかる。いずれの場合でも、 winding number m_j は

$$m_1 = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{\lambda_1'(k)}{\lambda_1(k)} dk = 1, \quad m_2 = -m_1 = -1$$

である。

Theorem 10. $0 \leq b^2 < 1$ とする。上で構成した U_3 の強時間作用素 T について以下が成立する。

- (1) $0 \leq b^2 < 1/4$ のとき、 T は自己共役で $\sigma(T) = \mathbb{Z}$ 。さらに、ユニタリ作用素 $V: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{X}_1 \oplus \mathcal{X}_1$ が存在して、

$$VTV^{-1} = P \oplus P, \quad VU_3V^{-1} = e^{ik} \oplus e^{ik}$$

- (2) $b^2 = 1/4$ のとき、不足指数は $d_{\pm}(T) = 4$, $\sigma(T) = \mathbb{C}$ 。
(3) $1/4 < b^2 < 1$ のとき、 $d_{\pm}(T) = 8$, $\sigma(T) = \mathbb{C}$ 。

5. まとめ

- ユニタリ作用素 U に対する強時間作用素 T は $U^*TU = T + 1$ で定義される。
- U, T に対して一般的な性質が成り立つ。これは Miyamoto[1] と類似の結果である。
- ユニタリな掛け算作用素に対する時間作用素を構成し、そのスペクトルを分類した。
- 1ステップ同次量子ウォークに対する時間作用素を構成した。
- 非自明な3ステップ同次量子ウォークでゼロでない winding number を持つものを見つけた。

6. 謝辞

本研究は科研費 (課題番号:20K03628) の助成を受けたものである。

REFERENCES

- [1] M. Miyamoto, A generalized Weyl relation approach to the time operator and its connection to the survival probability, *J. Math. Phys.* **42** (2001)
- [2] D. Sambou and R. Tiedra de Aldecoa, Quantum time delay for unitary operators: General theory, *Rev. Math. Phys.* **32** (2019)
- [3] D. Funakawa, Y. Matsuzawa, I. Sasaki, A. Suzuki and Noriaki Teranishi, Time operators for quantum walks, *Lett. Math. Phys.*, **110** (2020)

MI レクチャーノートシリーズ刊行にあたり

本レクチャーノートシリーズは、文部科学省 21 世紀 COE プログラム「機能数学の構築と展開」(H15-19 年度)において作成した COE Lecture Notes の続刊であり、文部科学省大学院教育改革支援プログラム「産業界が求める数学博士と新修士養成」(H19-21 年度)および、同グローバル COE プログラム「マス・フォア・インダストリ教育研究拠点」(H20-24 年度)において行われた講義の講義録として出版されてきた。平成 23 年 4 月のマス・フォア・インダストリ研究所 (IMI) 設立と平成 25 年 4 月の IMI の文部科学省共同利用・共同研究拠点として「産業数学の先進的・基礎的共同研究拠点」の認定を受け、今後、レクチャーノートは、マス・フォア・インダストリに関わる国内外の研究者による講義の講義録、会議録等として出版し、マス・フォア・インダストリの本格的な展開に資するものとする。

2022 年 10 月

マス・フォア・インダストリ研究所
所長 梶原 健司

2022年度採択分 九州大学マス・フォア・インダストリ研究所 共同利用研究集会

時間・量子測定・準古典近似の理論と実験 ～古典論と量子論の境界～

発行 2023年1月6日
編集 丹田 聡, 三宮 俊, 廣島文生
発行 九州大学マス・フォア・インダストリ研究所
九州大学大学院数理学府
〒819-0395 福岡市西区元岡744
九州大学数理・IMI 事務室
TEL 092-802-4402 FAX 092-802-4405
URL <https://www.imi.kyushu-u.ac.jp/>

印刷 城島印刷株式会社
〒810-0012 福岡市中央区白金2丁目9番6号
TEL 092-531-7102 FAX 092-524-4411

シリーズ既刊

Issue	Author/Editor	Title	Published
COE Lecture Note	Mitsuhiro T. NAKAO Kazuhiro YOKOYAMA	Computer Assisted Proofs - Numeric and Symbolic Approaches - 199pages	August 22, 2006
COE Lecture Note	M.J.Shai HARAN	Arithmetical Investigations - Representation theory, Orthogonal polynomials and Quantum interpolations- 174pages	August 22, 2006
COE Lecture Note Vol.3	Michal BENES Masato KIMURA Tatsuyuki NAKAKI	Proceedings of Czech-Japanese Seminar in Applied Mathematics 2005 155pages	October 13, 2006
COE Lecture Note Vol.4	宮田 健治	辺要素有限要素法による磁界解析 - 機能数理学特別講義 21pages	May 15, 2007
COE Lecture Note Vol.5	Francois APERY	Univariate Elimination Subresultants - Bezout formula, Laurent series and vanishing conditions - 89pages	September 25, 2007
COE Lecture Note Vol.6	Michal BENES Masato KIMURA Tatsuyuki NAKAKI	Proceedings of Czech-Japanese Seminar in Applied Mathematics 2006 209pages	October 12, 2007
COE Lecture Note Vol.7	若山 正人 中尾 充宏	九州大学産業技術数理研究センター キックオフミーティング 138pages	October 15, 2007
COE Lecture Note Vol.8	Alberto PARMEGGIANI	Introduction to the Spectral Theory of Non-Commutative Harmonic Oscillators 233pages	January 31, 2008
COE Lecture Note Vol.9	Michael I. TRIBELSKY	Introduction to Mathematical modeling 23pages	February 15, 2008
COE Lecture Note Vol.10	Jacques FARAUT	Infinite Dimensional Spherical Analysis 74pages	March 14, 2008
COE Lecture Note Vol.11	Gerrit van DIJK	Gelfand Pairs And Beyond 60pages	August 25, 2008
COE Lecture Note Vol.12	Faculty of Mathematics, Kyushu University	Consortium "MATH for INDUSTRY" First Forum 87pages	September 16, 2008
COE Lecture Note Vol.13	九州大学大学院 数理学研究院	プロシーディング「損保数理に現れる確率モデル」 — 日新火災・九州大学 共同研究2008年11月 研究会 — 82pages	February 6, 2009

シリーズ既刊

Issue	Author/Editor	Title	Published
COE Lecture Note Vol.14	Michal Beneš, Tohru Tsujikawa Shigetoshi Yazaki	Proceedings of Czech-Japanese Seminar in Applied Mathematics 2008 77pages	February 12, 2009
COE Lecture Note Vol.15	Faculty of Mathematics, Kyushu University	International Workshop on Verified Computations and Related Topics 129pages	February 23, 2009
COE Lecture Note Vol.16	Alexander Samokhin	Volume Integral Equation Method in Problems of Mathematical Physics 50pages	February 24, 2009
COE Lecture Note Vol.17	矢嶋 徹 及川 正行 梶原 健司 辻 英一 福本 康秀	非線形波動の数理と物理 66pages	February 27, 2009
COE Lecture Note Vol.18	Tim Hoffmann	Discrete Differential Geometry of Curves and Surfaces 75pages	April 21, 2009
COE Lecture Note Vol.19	Ichiro Suzuki	The Pattern Formation Problem for Autonomous Mobile Robots —Special Lecture in Functional Mathematics— 23pages	April 30, 2009
COE Lecture Note Vol.20	Yasuhide Fukumoto Yasunori Maekawa	Math-for-Industry Tutorial: Spectral theories of non-Hermitian operators and their application 184pages	June 19, 2009
COE Lecture Note Vol.21	Faculty of Mathematics, Kyushu University	Forum "Math-for-Industry" Casimir Force, Casimir Operators and the Riemann Hypothesis 95pages	November 9, 2009
COE Lecture Note Vol.22	Masakazu Suzuki Hoon Hong Hirokazu Anai Chee Yap Yousuke Sato Hiroshi Yoshida	The Joint Conference of ASCM 2009 and MACIS 2009: Asian Symposium on Computer Mathematics Mathematical Aspects of Computer and Information Sciences 436pages	December 14, 2009
COE Lecture Note Vol.23	荒川 恒男 金子 昌信	多重ゼータ値入門 111pages	February 15, 2010
COE Lecture Note Vol.24	Fulton B.Gonzalez	Notes on Integral Geometry and Harmonic Analysis 125pages	March 12, 2010
COE Lecture Note Vol.25	Wayne Rossman	Discrete Constant Mean Curvature Surfaces via Conserved Quantities 130pages	May 31, 2010
COE Lecture Note Vol.26	Mihai Ciucu	Perfect Matchings and Applications 66pages	July 2, 2010

シリーズ既刊

Issue	Author/Editor	Title	Published
COE Lecture Note Vol.27	九州大学大学院 数理学研究院	Forum “Math-for-Industry” and Study Group Workshop Information security, visualization, and inverse problems, on the basis of optimization techniques 100pages	October 21, 2010
COE Lecture Note Vol.28	ANDREAS LANGER	MODULAR FORMS, ELLIPTIC AND MODULAR CURVES LECTURES AT KYUSHU UNIVERSITY 2010 62pages	November 26, 2010
COE Lecture Note Vol.29	木田 雅成 原田 昌晃 横山 俊一	Magma で広がる数学の世界 157pages	December 27, 2010
COE Lecture Note Vol.30	原 隆 松井 卓 廣島 文生	Mathematical Quantum Field Theory and Renormalization Theory 201pages	January 31, 2011
COE Lecture Note Vol.31	若山 正人 福本 康秀 高木 剛 山本 昌宏	Study Group Workshop 2010 Lecture & Report 128pages	February 8, 2011
COE Lecture Note Vol.32	Institute of Mathematics for Industry, Kyushu University	Forum “Math-for-Industry” 2011 “TSUNAMI-Mathematical Modelling” Using Mathematics for Natural Disaster Prediction, Recovery and Provision for the Future 90pages	September 30, 2011
COE Lecture Note Vol.33	若山 正人 福本 康秀 高木 剛 山本 昌宏	Study Group Workshop 2011 Lecture & Report 140pages	October 27, 2011
COE Lecture Note Vol.34	Adrian Muntean Vladimír Chalupecký	Homogenization Method and Multiscale Modeling 72pages	October 28, 2011
COE Lecture Note Vol.35	横山 俊一 夫 紀恵 林 卓也	計算機代数システムの進展 210pages	November 30, 2011
COE Lecture Note Vol.36	Michal Beneš Masato Kimura Shigetoshi Yazaki	Proceedings of Czech-Japanese Seminar in Applied Mathematics 2010 107pages	January 27, 2012
COE Lecture Note Vol.37	若山 正人 高木 剛 Kirill Morozov 平岡 裕章 木村 正人 白井 朋之 西井 龍映 柴 伸一郎 穴井 宏和 福本 康秀	平成23年度 数学・数理科学と諸科学・産業との連携研究ワーク ショップ 拡がっていく数学 ～期待される“見えない力”～ 154pages	February 20, 2012

シリーズ既刊

Issue	Author/Editor	Title	Published
COE Lecture Note Vol.38	Fumio Hiroshima Itaru Sasaki Herbert Spohn Akito Suzuki	Enhanced Binding in Quantum Field Theory 204pages	March 12, 2012
COE Lecture Note Vol.39	Institute of Mathematics for Industry, Kyushu University	Multiscale Mathematics: Hierarchy of collective phenomena and interrelations between hierarchical structures 180pages	March 13, 2012
COE Lecture Note Vol.40	井ノ口順一 太田 泰広 寛 三郎 梶原 健司 松浦 望	離散可積分系・離散微分幾何チュートリアル2012 152pages	March 15, 2012
COE Lecture Note Vol.41	Institute of Mathematics for Industry, Kyushu University	Forum “Math-for-Industry” 2012 “Information Recovery and Discovery” 91pages	October 22, 2012
COE Lecture Note Vol.42	佐伯 修 若山 正人 山本 昌宏	Study Group Workshop 2012 Abstract, Lecture & Report 178pages	November 19, 2012
COE Lecture Note Vol.43	Institute of Mathematics for Industry, Kyushu University	Combinatorics and Numerical Analysis Joint Workshop 103pages	December 27, 2012
COE Lecture Note Vol.44	萩原 学	モダン符号理論からポストモダン符号理論への展望 107pages	January 30, 2013
COE Lecture Note Vol.45	金山 寛	Joint Research Workshop of Institute of Mathematics for Industry (IMI), Kyushu University “Propagation of Ultra-large-scale Computation by the Domain-decomposition-method for Industrial Problems (PUCDIP 2012)” 121pages	February 19, 2013
COE Lecture Note Vol.46	西井 龍映 栄 伸一郎 岡田 勘三 落合 啓之 小磯 深幸 斎藤 新悟 白井 朋之	科学・技術の研究課題への数学アプローチ —数学モデリングの基礎と展開— 325pages	February 28, 2013
COE Lecture Note Vol.47	SOO TECK LEE	BRANCHING RULES AND BRANCHING ALGEBRAS FOR THE COMPLEX CLASSICAL GROUPS 40pages	March 8, 2013
COE Lecture Note Vol.48	溝口 佳寛 脇 隼人 平坂 貢 谷口 哲至 鳥袋 修	博多ワークショップ「組み合わせとその応用」 124pages	March 28, 2013

シリーズ既刊

Issue	Author/Editor	Title	Published
COE Lecture Note Vol.49	照井 章 小原 功任 濱田 龍義 横山 俊一 穴井 宏和 横田 博史	マス・フォア・インダストリ研究所 共同利用研究集会 II 数式処理研究と産学連携の新たな発展 137pages	August 9, 2013
MI Lecture Note Vol.50	Ken Anjyo Hiroyuki Ochiai Yoshinori Dobashi Yoshihiro Mizoguchi Shizuo Kaji	Symposium MEIS2013: Mathematical Progress in Expressive Image Synthesis 154pages	October 21, 2013
MI Lecture Note Vol.51	Institute of Mathematics for Industry, Kyushu University	Forum “Math-for-Industry” 2013 “The Impact of Applications on Mathematics” 97pages	October 30, 2013
MI Lecture Note Vol.52	佐伯 修 岡田 勘三 高木 剛 若山 正人 山本 昌宏	Study Group Workshop 2013 Abstract, Lecture & Report 142pages	November 15, 2013
MI Lecture Note Vol.53	四方 義啓 櫻井 幸一 安田 貴徳 Xavier Dahan	平成25年度 九州大学マス・フォア・インダストリ研究所 共同利用研究集会 安全・安心社会基盤構築のための代数構造 ～サイバー社会の信頼性確保のための数理学～ 158pages	December 26, 2013
MI Lecture Note Vol.54	Takashi Takiguchi Hiroshi Fujiwara	Inverse problems for practice, the present and the future 93pages	January 30, 2014
MI Lecture Note Vol.55	栄 伸一郎 溝口 佳寛 脇 隼人 洪田 敬史	Study Group Workshop 2013 数学協働プログラム Lecture & Report 98pages	February 10, 2014
MI Lecture Note Vol.56	Yoshihiro Mizoguchi Hayato Waki Takafumi Shibuta Tetsuji Taniguchi Osamu Shimabukuro Makoto Tagami Hirotake Kurihara Shuya Chiba	Hakata Workshop 2014 ~ Discrete Mathematics and its Applications ~ 141pages	March 28, 2014
MI Lecture Note Vol.57	Institute of Mathematics for Industry, Kyushu University	Forum “Math-for-Industry” 2014: “Applications + Practical Conceptualization + Mathematics = fruitful Innovation” 93pages	October 23, 2014
MI Lecture Note Vol.58	安生健一 落合啓之	Symposium MEIS2014: Mathematical Progress in Expressive Image Synthesis 135pages	November 12, 2014

シリーズ既刊

Issue	Author/Editor	Title	Published
MI Lecture Note Vol.59	西井 龍映 岡田 勘三 梶原 健司 高木 剛 若山 正人 脇 隼人 山本 昌宏	Study Group Workshop 2014 数学協働プログラム Abstract, Lecture & Report 196pages	November 14, 2014
MI Lecture Note Vol.60	西浦 博	平成26年度九州大学 IMI 共同利用研究・研究集会 (I) 感染症数理モデルの実用化と産業及び政策での活用のための新たな展開 120pages	November 28, 2014
MI Lecture Note Vol.61	溝口 佳寛 Jacques Garrigue 萩原 学 Reynald Affeldt	研究集会 高信頼な理論と実装のための定理証明および定理証明器 Theorem proving and provers for reliable theory and implementations (TPP2014) 138pages	February 26, 2015
MI Lecture Note Vol.62	白井 朋之	Workshop on “ β -transformation and related topics” 59pages	March 10, 2015
MI Lecture Note Vol.63	白井 朋之	Workshop on “Probabilistic models with determinantal structure” 107pages	August 20, 2015
MI Lecture Note Vol.64	落合 啓之 土橋 宜典	Symposium MEIS2015: Mathematical Progress in Expressive Image Synthesis 124pages	September 18, 2015
MI Lecture Note Vol.65	Institute of Mathematics for Industry, Kyushu University	Forum “Math-for-Industry” 2015 “The Role and Importance of Mathematics in Innovation” 74pages	October 23, 2015
MI Lecture Note Vol.66	岡田 勘三 藤澤 克己 白井 朋之 若山 正人 脇 隼人 Philip Broadbridge 山本 昌宏	Study Group Workshop 2015 Abstract, Lecture & Report 156pages	November 5, 2015
MI Lecture Note Vol.67	Institute of Mathematics for Industry, Kyushu University	IMI-La Trobe Joint Conference “Mathematics for Materials Science and Processing” 66pages	February 5, 2016
MI Lecture Note Vol.68	古庄 英和 小谷 久寿 新甫 洋史	結び目と Grothendieck-Teichmüller 群 116pages	February 22, 2016
MI Lecture Note Vol.69	土橋 宜典 鍛冶 静雄	Symposium MEIS2016: Mathematical Progress in Expressive Image Synthesis 82pages	October 24, 2016
MI Lecture Note Vol.70	Institute of Mathematics for Industry, Kyushu University	Forum “Math-for-Industry” 2016 “Agriculture as a metaphor for creativity in all human endeavors” 98pages	November 2, 2016
MI Lecture Note Vol.71	小磯 深幸 二宮 嘉行 山本 昌宏	Study Group Workshop 2016 Abstract, Lecture & Report 143pages	November 21, 2016

シリーズ既刊

Issue	Author/Editor	Title	Published
MI Lecture Note Vol.72	新井 朝雄 小嶋 泉 廣島 文生	Mathematical quantum field theory and related topics 133pages	January 27, 2017
MI Lecture Note Vol.73	穴田 啓晃 Kirill Morozov 須賀 祐治 奥村 伸也 櫻井 幸一	Secret Sharing for Dependability, Usability and Security of Network Storage and Its Mathematical Modeling 211pages	March 15, 2017
MI Lecture Note Vol.74	QUISPEL, G. Reinout W. BADER, Philipp MCLAREN, David I. TAGAMI, Daisuke	IMI-La Trobe Joint Conference Geometric Numerical Integration and its Applications 71pages	March 31, 2017
MI Lecture Note Vol.75	手塚 集 田上 大助 山本 昌宏	Study Group Workshop 2017 Abstract, Lecture & Report 118pages	October 20, 2017
MI Lecture Note Vol.76	宇田川誠一	Tzitzéica 方程式の有限間隙解に付随した極小曲面の構成理論 —Tzitzéica 方程式の楕円関数解を出発点として— 68pages	August 4, 2017
MI Lecture Note Vol.77	松谷 茂樹 佐伯 修 中川 淳一 田上 大助 上坂 正晃 Pierluigi Cesana 濱田 裕康	平成29年度 九州大学マス・フォア・インダストリ研究所 共同利用研究会 (I) 結晶の界面, 転位, 構造の数理 148pages	December 20, 2017
MI Lecture Note Vol.78	瀧澤 重志 小林 和博 佐藤憲一郎 斎藤 努 清水 正明 間瀬 正啓 藤澤 克樹 神山 直之	平成29年度 九州大学マス・フォア・インダストリ研究所 プロジェクト研究 研究会 (I) 防災・避難計画の数理モデルの高度化と社会実装へ向けて 136pages	February 26, 2018
MI Lecture Note Vol.79	神山 直之 畔上 秀幸	平成29年度 AIMaP チュートリアル 最適化理論の基礎と応用 96pages	February 28, 2018
MI Lecture Note Vol.80	Kirill Morozov Hiroaki Anada Yuji Suga	IMI Workshop of the Joint Research Projects Cryptographic Technologies for Securing Network Storage and Their Mathematical Modeling 116pages	March 30, 2018
MI Lecture Note Vol.81	Tsuyoshi Takagi Masato Wakayama Keisuke Tanaka Noboru Kunihiro Kazufumi Kimoto Yasuhiko Ikematsu	IMI Workshop of the Joint Research Projects International Symposium on Mathematics, Quantum Theory, and Cryptography 246pages	September 25, 2019
MI Lecture Note Vol.82	池森 俊文	令和2年度 AIMaP チュートリアル 新型コロナウイルス感染症にかかわる諸問題の数理 145pages	March 22, 2021

シリーズ既刊

Issue	Author/Editor	Title	Published
MI Lecture Note Vol.83	早川健太郎 軸丸 芳揮 横須賀洋平 可香谷 隆 林 和希 堺 雄亮	シェル理論・膜理論への微分幾何学からのアプローチと その建築曲面設計への応用 49pages	July 28, 2021
MI Lecture Note Vol.84	Taketoshi Kawabe Yoshihiro Mizoguchi Junichi Kako Masakazu Mukai Yuji Yasui	SICE-JSAE-AIMaP Tutorial Advanced Automotive Control and Mathematics 110pages	December 27, 2021
MI Lecture Note Vol.85	Hiroaki Anada Yasuhiko Ikematsu Koji Nuida Satsuya Ohata Yuntao Wang	IMI Workshop of the Joint Usage Research Projects Exploring Mathematical and Practical Principles of Secure Computation and Secret Sharing 114pages	February 9, 2022
MI Lecture Note Vol.86	濱田 直希 穴井 宏和 梅田 裕平 千葉 一永 佐藤 寛之 能島 裕介 加藤田雄太朗 一木 俊助 早野 健太 佐伯 修	2020年度採択分 九州大学マス・フォア・インダストリ研究所 共同利用研究集会 進化計算の数理 135pages	February 22, 2022
MI Lecture Note Vol.87	Osamu Saeki, Ho Tu Bao, Shizuo Kaji, Kenji Kajiwara, Nguyen Ha Nam, Ta Hai Tung, Melanie Roberts, Masato Wakayama, Le Minh Ha, Philip Broadbridge	Proceedings of Forum “Math-for-Industry” 2021 -Mathematics for Digital Economy- 122pages	March 28, 2022
MI Lecture Note Vol.88	Daniel PACKWOOD Pierluigi CESANA, Shigenori FUJIKAWA, Yasuhide FUKUMOTO, Petros SOFRONIS, Alex STAYKOV	Perspectives on Artificial Intelligence and Machine Learning in Materials Science, February 4-6, 2022 74pages	November 8, 2022

MI Lecture Note Vol.89	松谷 茂樹 落合 啓之 井上 和俊 小磯 深幸 佐伯 修 白井 朋之 垂水 竜一 内藤 久資 中川 淳一 濱田 裕康 松江 要 加葉田雄太朗	2020年度採択分 九州大学マス・フォア・インダストリ研究所 共同利用研究集会 材料科学における幾何と代数 III 356pages	December 7, 2022
MI Lecture Note Vol.90	中山 尚子 谷川 拓司 品野 勇治 近藤 正章 石原 亨 鍛冶 静雄 藤澤 克樹	2022年度採択分 九州大学マス・フォア・インダストリ研究所 共同利用研究集会 データ格付けサービス実現のための数理基盤の構築 58pages	December 12, 2022
MI Lecture Note Vol.91	Katsuki Fujisawa Shizuo Kaji Toru Ishihara Masaaki Kondo Yuji Shinano Takuji Tanigawa Naoko Nakayama	IMI Workshop of the Joint Usage Research Projects Construction of Mathematical Basis for Realizing Data Rating Service 610pages	December 27, 2022



Institute of Mathematics for Industry
Kyushu University

九州大学マス・フォア・インダストリ研究所
九州大学大学院 数理学府

〒819-0395 福岡市西区元岡744 TEL 092-802-4402 FAX 092-802-4405
URL <http://www.imi.kyushu-u.ac.jp/>