

2024 年度採択分 九州大学マス・フォア・インダストリ研究所 共同利用研究集会

# 自動車性能の飛躍的向上を目指す Data-Driven 設計

編集：中澤嵩

九州大学マス・フォア・インダストリ研究所

2024年度採択分 九州大学マス・フォア・インダストリ研究所 共同利用研究集会

# 自動車性能の飛躍的向上を目指す Data-Driven 設計

編集：中澤嵩

## About MI Lecture Note Series

The Math-for-Industry (MI) Lecture Note Series is the successor to the COE Lecture Notes, which were published for the 21st COE Program “Development of Dynamic Mathematics with High Functionality,” sponsored by Japan’s Ministry of Education, Culture, Sports, Science and Technology (MEXT) from 2003 to 2007. The MI Lecture Note Series has published the notes of lectures organized under the following two programs: “Training Program for Ph.D. and New Master’s Degree in Mathematics as Required by Industry,” adopted as a Support Program for Improving Graduate School Education by MEXT from 2007 to 2009; and “Education-and-Research Hub for Mathematics-for-Industry,” adopted as a Global COE Program by MEXT from 2008 to 2012.

In accordance with the establishment of the Institute of Mathematics for Industry (IMI) in April 2011 and the authorization of IMI’s Joint Research Center for Advanced and Fundamental Mathematics-for-Industry as a MEXT Joint Usage / Research Center in April 2013, hereafter the MI Lecture Notes Series will publish lecture notes and proceedings by worldwide researchers of MI to contribute to the development of MI.

October 2022

Kenji Kajiwara

Director, Institute of Mathematics for Industry

## Data-Driven Design toward to dramatic improvement automotive performance

MI Lecture Note Vol.98, Institute of Mathematics for Industry, Kyushu University

ISSN 2188-1200

Date of issue: February 24, 2025

Editor: Takashi Nakazawa

Publisher:

Institute of Mathematics for Industry, Kyushu University

Graduate School of Mathematics, Kyushu University

Motooka 744, Nishi-ku, Fukuoka, 819-0395, JAPAN

Tel +81-(0)92-802-4402, Fax +81-(0)92-802-4405

URL <https://www.imi.kyushu-u.ac.jp/>

## はじめに

高速流体機器を扱う産業界において、流れ場の予測と設計は必要不可欠な技術であることは言うまでもない。具体的には、AI によって流れ場を高速に予測することが可能となれば、デザイナーや設計者、実験者が会議の場でリアルタイムに議論することが可能となり、結果的に開発期間の短縮や他性能との最適化がクイックに実現できる。また、最新の Data-Driven アプローチを導入することで、過去に例を見ない新しい発想での設計・制御技術を構築することにつながり、性能の飛躍的向上を目指す。

このように、数値流体計算 (Computational Fluid Dynamics: CFD) に変わる流体予測モデルの構築や、サロゲートモデルによる 3D 形状設計が、今後ますます必要不可欠となる。そこで、2024 年 10 月 7 日(月) ~ 2024 年 10 月 8 日(火)に一般研究-研究集会 (I)「自動車性能の飛躍的向上を目指す Data-Driven 設計」を開催した。当該研究集会では、マツダ株式会社技術研究所次世代人間中心システム研究部門から中村優佑氏と瀬尾晃平氏、更にはマツダ株式会社と産学連携を推進している中島卓司 (広島大学大学院先進理工系科学研究科) を御招きし、特に自動車産業における「流れ場の予測と設計」に焦点を当てて、上記の科学的な課題について活発な議論が交わされた。更には、生成 AI を積極的に採用することが出来れば、これらの予測・設計が超高速に実現し得るだけでなく、どのような産業課題が解決できそうかについても議論が広がった。

本研究集会は、中村優佑氏 (マツダ株式会社技術研究所次世代人間中心システム研究部門) と中島卓司氏 (広島大学大学院先進理工系科学研究科)、更には三坂孝志氏 (産業技術総合研究所) が講演した 2023 年度随時募集枠「流体数値・データ科学による乱流場の計測・予測・制御・設計」を開催した後に発展した議論をもとに企画している。なお、本研究集会は金沢大学数値・データサイエンス・AI 教育センター及び金沢大学学術メディア創成センターが後援となっている。

研究代表者 中澤嵩  
金沢大学学術メディア創成センター  
2024 年 12 月

開催場所：九州大学 伊都キャンパス ウェスト 1号館 D棟 4階 IMI オーディオトリウム  
(W1-D-413) 及び JR 博多シティ 9階会議室 2

主催：九州大学マス・フォア・インダストリ研究所

後援：金沢大学数理・データサイエンス・AI教育センター

種別・種目：一般研究-研究集会（I）

研究計画題目：自動車性能の飛躍的向上を目指す Data-Drive 設計

研究代表者：中澤 嵩（金沢大学・学術メディア創成センター・准教授）

研究実施期間：2024年10月7日（月）～ 2024年10月8日（火）

公開期間：2024年10月7日（月）～ 2024年10月8日（火）

研究計画詳細：[https://joint2.imi.kyushu-u.ac.jp/research\\_chooses/view/2024a001](https://joint2.imi.kyushu-u.ac.jp/research_chooses/view/2024a001)

### 10月7日（月） IMI オーディオトリウム

9:00-10:00

中村 優佑（マツダ株式会社技術研究所次世代人間中心システム研究部門）  
「データ分析技術を応用した自動車周りの流れ場の可視化」

10:00-11:00

瀬尾晃平（マツダ株式会社技術研究所次世代人間中心システム研究部門）  
「自動車の空力開発におけるデータ分析技術の応用」

11:00-12:00

中澤嵩（金沢大学・学術メディア創成センター）  
「新規圧縮性流体ソルバーの開発」

13:00-14:00

山崎渉（長岡技術科学大学大学院工学研究科）  
「サロゲートモデルを活用した大域的トポロジー最適設計の試み」

14:00-15:00

矢地謙太郎（大阪大学大学院工学研究科）  
「機械学習を利用した進化型トポロジー最適化」

15:00-16:00

本木慎吾（大阪大学大学院基礎工学研究科）  
「不変解に基づく乱流熱伝達予測と制御」

### 10月8日（火） JR 博多シティ 9階会議室

9:00-10:00

三坂孝志（産業技術総合研究所）  
「PINNs を活用した流体データ同化」

10:00-11:00

中島卓司（広島大学大学院先進理工系科学研究科）

「多数の空力解析結果のデータ解析による車両周り流れの特徴抽出」

11:00-12:00

大谷智仁（大阪大学大学院基礎工学研究科）

「医工学分野における流体データ同化の課題」

2024年度九州大学マス・フォア・インダストリ研究所 共同利用・共同研究 一般研究-研究集会(I)

# 自動車性能の 飛躍的向上を目指す Data-Driven設計

2024 10.7(火)→8(火)  
九州大学伊都キャンパス オーデトリウム &  
JR博多シティ 9階会議室2

▶ 講演者

**中村 俊佑** マツダ株式会社技術研究所次世代人間中心システム研究部門  
— データ分析技術を活用した自動車周りの流れ場の可視化

**瀬尾 晃平** マツダ株式会社技術研究所次世代人間中心システム開発部門  
— 自動車の空力開発におけるデータ分析技術の応用

**中澤 嵩** 九州大学第メディア創成センター  
— 新規圧縮性流体ソルバーの開発

**山崎 渉** 長岡技術科学大学大学院工学研究科  
— サロゲートモデルを活用した大域的トポロジー最適設計の試み

**矢地 謙太郎** 大阪大学大学院工学研究科  
— 機械学習を利用した進化した型トポロジー最適化

**本木 慎吾** 大阪大学大学院基礎工学研究科  
— 不変解に基づく乱流熱伝達の予測と制御

**三坂 孝志** 産業技術総合研究所  
— PINNsを活用した流体データ同化

**中島 卓司** 広島大学大学院先進理工系科学研究科  
— 多数の空力解析結果のデータ解析による車両周り流れの特徴抽出

**大谷 智仁** 大阪大学大学院基礎工学研究科  
— 医工学分野における流体データ同化の課題

▶ 運営責任者・組織委員  
【研究代表者】 中澤 嵩（九州大学）  
【組織委員】 中澤 嵩（九州大学）

▶ 主催 九州大学マス・フォア・インダストリ研究所

**参加  
無料**  
事前申込制

ハイブリッド開催

E-mail: imikyoten@imim.kyushu-u.ac.jp  
URL: <https://joint.imi.kyushu-u.ac.jp/post-14904/>



Joint Research Center for Advanced and  
Fundamental Mathematics-for-Industry  
文部科学省認定（産業科学の発展の基盤的共通研究拠点）  
九州大学マスコア・フォア・インダストリ研究所

## 目次

中澤嵩（金沢大学学術メディア創成センター） 「新規圧縮性流体ソルバーの開発」	1
山崎渉（長岡技術科学大学大学院工学研究科） 「サロゲートモデルを活用した大域的トポロジー最適設計の試み」	25
矢地謙太郎（大阪大学大学院工学研究科） 「機械学習を利用した進化的トポロジー最適化」	35
本木慎吾（大阪大学大学院基礎工学研究科） 「不変解に基づく乱流熱伝達の予測と制御」	43
三坂孝志（産業技術総合研究所） 「PINNs を活用した流体データ同化」	59
中島卓司（広島大学大学院先進理工系科学研究科） 「多数の空力解析結果のデータ解析による車両周り流れの特徴抽出」	77
大谷智仁（大阪大学大学院基礎工学研究科） 「医工学分野における流体データ同化の課題」	85

## 新規圧縮性流体ソルバーの開発

中澤嵩（金沢大学学術メディア創成センター）

航空工学や自動車工学では非定常・圧縮性(高レイノルズ数)流体を扱う必要があるため、圧縮性 Navier-Stokes 方程式が支配方程式として多く利用されるが、時間方向・空間方向の高精度な離散化を担保する必要があるため計算コストが膨大となる。そこで、最適設計を行う際には、圧縮性 Navier-Stokes 方程式と比較して計算コストを抑制することが可能な、式(1)に記述している保存系圧縮性 Euler 方程の利用が一般的である。

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0, \quad (1-a)$$

$$\frac{\partial \rho \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) + \nabla p = 0, \quad (1-b)$$

$$\frac{\partial \rho E}{\partial t} + \nabla \cdot \{(\rho E + p) \mathbf{u}\} = 0. \quad (1-c)$$

この圧縮性流体を扱う際、非圧縮性流体と比較して、時空間に複雑な応力分布が発生し、局所的に密度が集中する衝撃波が発生する。このような場合には、衝撃波を高精度に捕捉する必要があるため、界面を高精度に解像することが可能な有限体積法や不連続ガラーキソ法等を用いた空間離散化が行われるが、形状最適化を行う際には順問題だけでなく逆問題を解く必要があるためアルゴリズムが非常に煩雑となることが予想される。

近年、Multi Fidelity 設計を考慮したアプローチが注目を集めつつある。ここで、圧縮性 Navier-Stokes 方程式を用いた設計を High-Fidelity 設計とする。一方、圧縮性 Euler 方程式に対して何らかの数学的な操作を行った際に得られる簡易な数理モデルを用いた設計を Low-Fidelity 設計とすることで（厳密に圧縮性 Euler 方程式を解いていないが）、膨大な計算コストを緩和しつつ妥当な最適形状が得られると考えられる。ここでは、Low-Fidelity 設計を行う際の支配方程式として式(2)に記述している F. De Vuyst が提案している数理モデルを活用する。便宜上、本原稿では FDV 方程式と呼ぶこととする。

$$\frac{D a_\rho}{Dt} + \nabla \cdot \mathbf{u} = 0, a_\rho = \log(\rho), \quad (2-a)$$

$$\frac{D \mathbf{u}}{Dt} + \frac{p}{\rho} \nabla a_p = 0, \quad (2-b)$$

$$\frac{D a_p}{Dt} + \gamma \nabla \cdot \mathbf{u} = 0, a_p = \log(p). \quad (2-c)$$

当該数理モデルでは、ガラーキソ法で離散化が可能であり、更に移流項については直接法で演算が可能な特性曲線法を用いることで、計算コストを大幅に抑制することが可能となる。

## 新規圧縮性流体ソルバーの開発

中澤 嵩  
金沢大学 学術メディア創成センター 准教授

1

## Previous Study

- Shape optimization problem to suppress the time fluctuation parts in the incompressible flow

*T. Nakazawa, Shape Optimal Problem based on the sensitivity evaluated by the Generalized J Integral considering RANS and Snapshot POD, JFST (Recent Advances in Fluid Dynamics 2018), Vol. 14, Issue 3, pp. JFST0015, 2019*

*T. Nakazawa, T. Misaka and C. Poignard, Shape Optimization for Suppressing Coherent Structure of Two-dimensional Open Cavity Flow, JFST (Recent Advances in Fluid Dynamics 2019), Vol. 16, No. 1, pp. JFST0002, 2021*

*T. Nakazawa, Shape Optimization Problem for Transient Non-Newtonian Fluid in Hybridized Discontinuous Galerkin Method, JFST (Recent Advances in Fluid Dynamics 2020), Vol. 16, No. 3, pp. JFST0019, 2021*

*T. Nakazawa, T. Misaka, Y. Hasegawa, Optimal Design for suppressing time fluctuation part of two-dimensional jet in crossflow, IJCFD, GCFD 2051496.*



# Previous Study

- Shape optimization problem to suppress the time fluctuation parts in the incompressible flow

*T. Nakazawa, Shape Optimal Problem based on the sensitivity evaluated by the Generalized J Integral considering RANS and Snapshot POD, JFST (Recent Advances in Fluid Dynamics 2018), Vol. 14, Issue 3, pp. JFST0015, 2019*

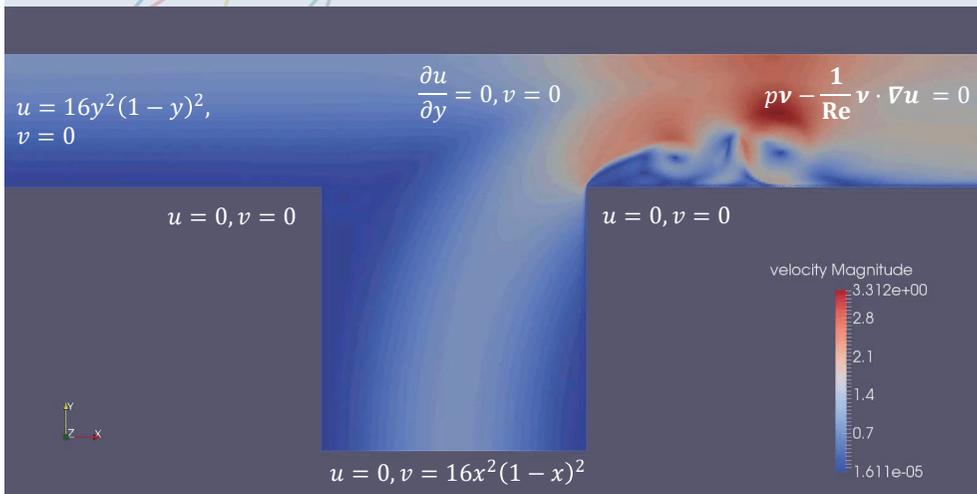
*T. Nakazawa, T. Misaka and C. Poignard, Shape Optimization for Suppressing Coherent Structure of Two-dimensional Open Cavity Flow, JFST (Recent Advances in Fluid Dynamics 2019), Vol. 16, No. 1, pp. JFST0002, 2021*

*T. Nakazawa, Shape Optimization Problem for Transient Non -Newtonian Fluid in Hybridized Discontinuous Galerkin Method, JFST (Recent Advances in Fluid Dynamics 2020), Vol. 16, No. 3, pp. JFST0019, 2021*

*T. Nakazawa, T. Misaka, Y. Hasegawa, Optimal Design for suppressing time fluctuation part of twodimensional jet in crossflow, IJCFD, GCFD 2051496.*



## the two-dimensional jet-in-cross flow at Re=2500



# Optimal Shape

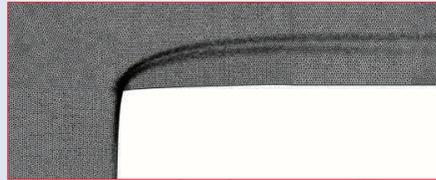
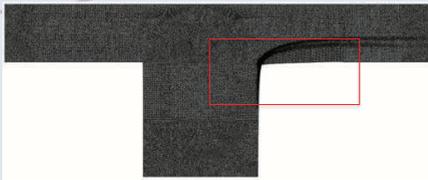


金沢大学  
KANAZAWA  
UNIVERSITY

Re=2500

Wide View

Zoom View



# Stream function

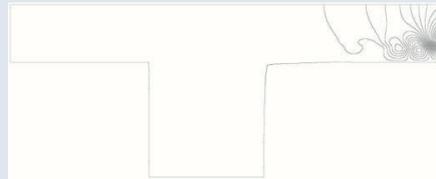
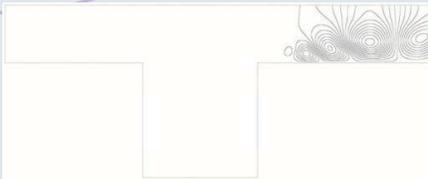


金沢大学  
KANAZAWA  
UNIVERSITY

the 2<sup>nd</sup> primary component

Initial domain

Optimal domain

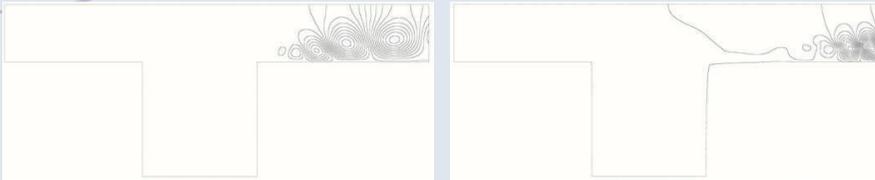


Stream function  金沢大学  
KANAZAWA UNIVERSITY

the 3<sup>rd</sup> primary component

Initial domain

Optimal domain

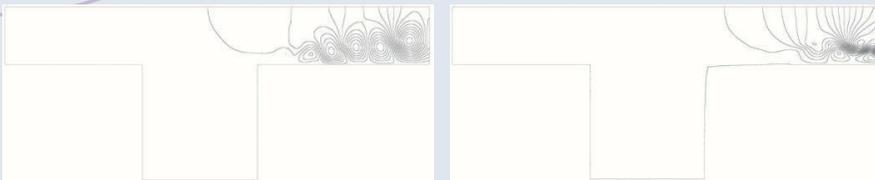


Stream function  金沢大学  
KANAZAWA UNIVERSITY

the 4<sup>th</sup> primary component

Initial domain

Optimal domain

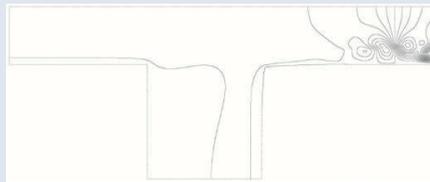


# Stream function 金沢大学 KANAZAWA UNIVERSITY

## the 5<sup>th</sup> primary component

Initial domain

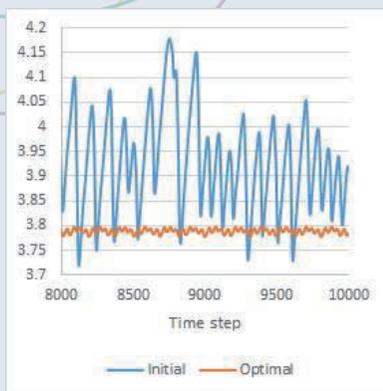
Optimal domain



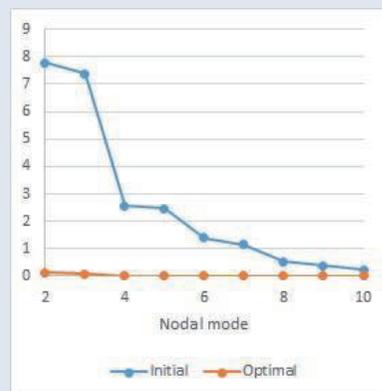
# Calculation results 金沢大学 KANAZAWA UNIVERSITY

Re=2500

Kinetic Energy



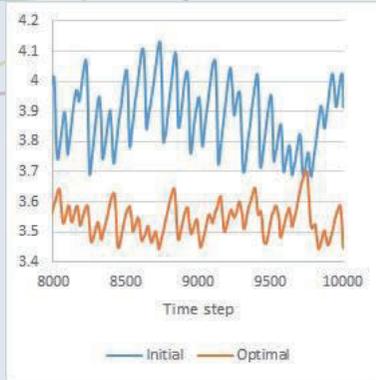
Eigenvalues



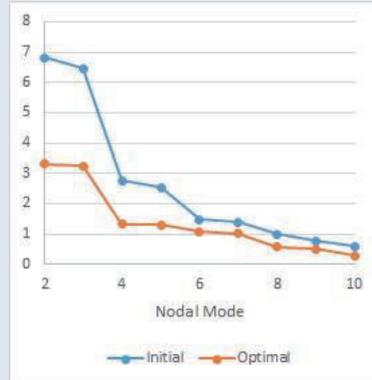
# Calculation results 金沢大学 KANAZAWA UNIVERSITY

## Re=5000

### Kinetic Energy



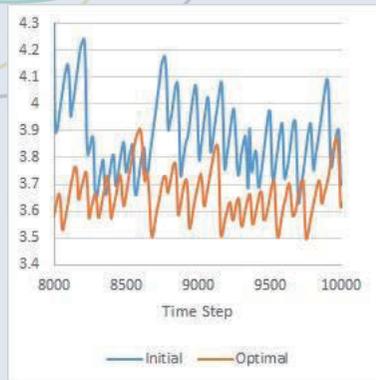
### Eigenvalues



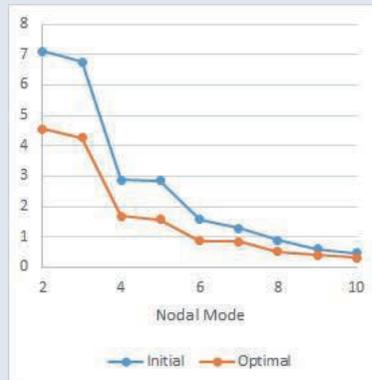
# Calculation results 金沢大学 KANAZAWA UNIVERSITY

## Re=7500

### Kinetic Energy



### Eigenvalues



## Motivation

- Toward to compressible flows
  - Compressible Euler equation
    - Shock wave
  - Compressible Navier-Stokes equation
    - Turbulence and Shock wave

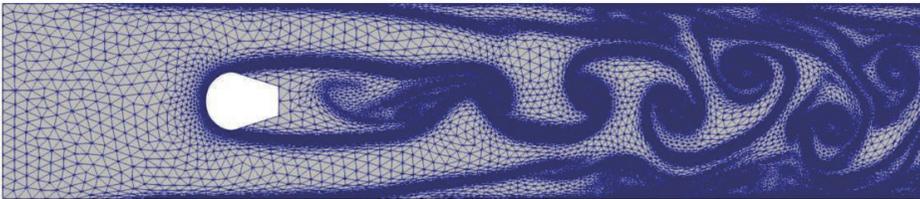
## Numerical Scheme

- Adaptive Mesh Refinement
- Semi-Lagrange Method
- Logarithm Conformation representation

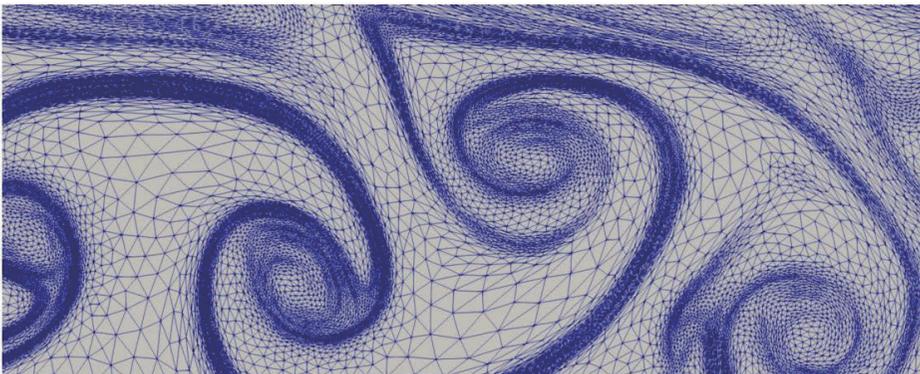
# Numerical Scheme

- Adaptive Mesh Refinement
- Semi-Lagrange Method
- Logarithm Conformation representation

Mesh adaptation during a fluid simulation



Zoom on the adapted mesh



# Numerical Scheme

- Adaptive Mesh Refinement
- Semi-Lagrange Method
- Logarithm Conformation Representation



## The characteristic finite element scheme

- Let  $\Delta t$  be a time increment,  $N = T/\Delta t$  be a total number of time steps,  $t^n = n\Delta t$  for  $n \in \{0, \dots, N\}$ .
- Then we can consider a first order approximation of the material derivative at  $(t, \mathbf{x})$  as follows.

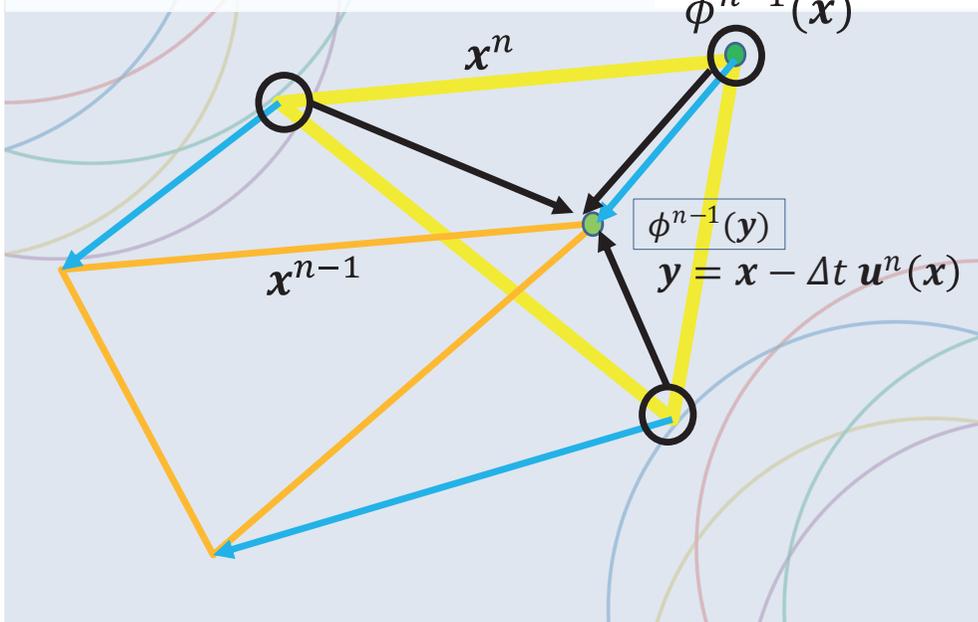
– The first order : (1<sup>st</sup> order backward Euler method)

$$\frac{D\phi}{Dt}(\mathbf{x}, t^n) = \frac{\phi^n(\mathbf{x}) - \phi^{n-1}(\mathbf{y})}{\Delta t} + o(\Delta t),$$

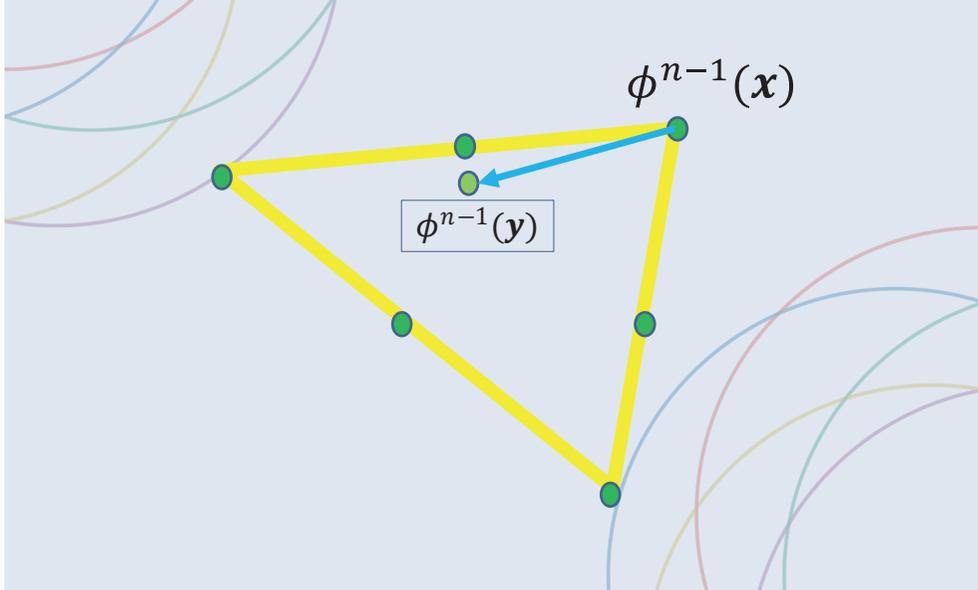
$$\mathbf{y} = \mathbf{x} - \Delta t \mathbf{k}$$

$$\mathbf{k} \approx \mathbf{u}^{n-1} + \Delta t \frac{\partial \mathbf{u}^{n-1}}{\partial t} = \mathbf{u}^{n-1} + \Delta t \frac{\mathbf{u}^{n-1} - \mathbf{u}^{n-2}}{\Delta t} = 2\mathbf{u}^{n-1} - \mathbf{u}^{n-2}$$

The characteristic finite element scheme  金沢大学  
KANAZAWA UNIVERSITY



The characteristic finite element scheme together with AMR  金沢大学  
KANAZAWA UNIVERSITY



# Numerical Scheme

- Adaptive Mesh Refinement
- Semi-Lagrange Method
- **Logarithm Conformation Representation**

## Compressible Euler equation



### Conservation<sup>1)</sup>

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0 \quad (1a),$$

$$\frac{\partial \rho \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) + \nabla p = 0 \quad (2a),$$

$$\frac{\partial \rho E}{\partial t} + \nabla \cdot \{(\rho E + p)\mathbf{u}\} = 0 \quad (3a)$$

### F. De Vuyst's model

$$\frac{Da_\rho}{Dt} + \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (1b),$$

$$\frac{D\mathbf{u}}{Dt} + \frac{p}{\rho} \nabla a_p = 0 \quad (2b),$$

$$\frac{Da_p}{Dt} + \gamma \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (3b),$$

$$a_\rho = \log \rho, a_p = \log p$$

On the interface of shock wave, the jump of  $\rho$  and  $p$  is suppressed.

$$\rho = e^{a_\rho}, p = e^{a_p}$$

The positivity of  $\rho$  and  $p$  is guaranteed mathematically.

1) <http://www.caero.mech.tohoku.ac.jp/publicData/Daiguji/Chapter16.pdf>

## Computational Model

- Set functional for the density  $\rho$  in the domain  $\Omega(x)$  at  $t = n\Delta t$  as follows,

$$L(x, t) = \int_{\Omega(x)} \rho^n(x) dx$$

- Derive the material variation as follows,

$$\frac{L(x, t) - L(y, t - \Delta t)}{\Delta t} = \frac{\int_{\Omega(x)} \rho^n(x) dx - \int_{\Omega(y)} \rho^{n-1}(y) dy}{\Delta t} = 0$$

,where the time increment  $\Delta t$  is defined as

$$\Delta t = q \frac{\Delta x}{U + c}$$

$q$ : the Courant number,  $\Delta x$ : the minimum edge length in the shock wave,  
 $U$ : the max speed in the shock wave,  $c$ : the sound in the shock wave

## Computational Model

- Taylor expansion for  $\rho^{n-1}(y)$  is leading to

$$\begin{aligned} \rho^{n-1}(y) &= \rho^{n-1}(x) - \Delta t \mathbf{k} \cdot \nabla \rho^{n-1}(x) + o(\Delta t^2) \\ &\approx \rho^{n-1}(x) - \Delta t \mathbf{k} \cdot \nabla \rho^{n-1}(x) + o(\Delta t^2) \end{aligned}$$

- By taking coordinate transformation between  $n - 1$  and  $n$  time steps,

$$dy = (1 - \Delta t \nabla \cdot \mathbf{k} + o(\Delta t^2)) dx$$

- By taking integral for  $\rho^{n-1}(y)$  over  $\Omega(y)$ ,

$$\begin{aligned} &\int_{\Omega(y)} \rho^{n-1}(y) dy \\ &= \int_{\Omega(x)} [\rho^{n-1}(x) - \Delta t \mathbf{k} \cdot \nabla \rho^{n-1} + o(\Delta t^2)] (1 - \Delta t \nabla \cdot \mathbf{k} + o(\Delta t^2)) dx \\ &= \int_{\Omega(x)} [\rho^{n-1}(x) - \Delta t \{\mathbf{k} \cdot \nabla \rho^{n-1} + (\nabla \cdot \mathbf{k}) \rho^{n-1}\} + o(\Delta t^2)] dx \end{aligned}$$



## Computational Model

- Finally, a value of integral for the density is constant like

$$\frac{L(x, t) - L(y, t - \Delta t)}{\Delta t} = \frac{\int_{\Omega(x)} \rho^n(x) dx - \int_{\Omega(y)} \rho^{n-1}(y) dy}{\Delta t} = 0$$

- Finally, we have

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \frac{1}{\Delta t} \int_{\Omega(x)} [\rho^n(x) - \rho^{n-1}(x) + \Delta t \{ \mathbf{k} \cdot \nabla \rho^{n-1} + (\nabla \cdot \mathbf{k}) \rho^{n-1} \} + o(\Delta t^2)] dx = 0 \\ &\Rightarrow \frac{\rho^n(x) - \rho^{n-1}(x)}{\Delta t} + \mathbf{k} \cdot \nabla \rho^{n-1} + (\nabla \cdot \mathbf{k}) \rho^{n-1} = 0 \\ &\Rightarrow \frac{\rho^n(x) - \rho^{n-1}(x)}{\Delta t} + \rho^{n-1} \mathbf{k} \cdot \nabla a_p^{n-1} + \rho^{n-1} (\nabla \cdot \mathbf{k}) = 0 \end{aligned}$$



## Computational Model

- Finally, a value of integral for the density is constant like

$$\frac{L(x, t) - L(y, t - \Delta t)}{\Delta t} = \frac{\int_{\Omega(x)} \rho^n(x) dx - \int_{\Omega(y)} \rho^{n-1}(y) dy}{\Delta t} = 0$$

- Finally, we have

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \frac{1}{\Delta t} \int_{\Omega(x)} [\rho^n(x) - \rho^{n-1}(x) + \Delta t \{ \mathbf{k} \cdot \nabla \rho^{n-1} + (\nabla \cdot \mathbf{k}) \rho^{n-1} \} + o(\Delta t^2)] dx = 0 \\ &\Rightarrow \frac{\rho^n(x) - \rho^{n-1}(x)}{\Delta t} + \mathbf{k} \cdot \nabla \rho^{n-1} + (\nabla \cdot \mathbf{k}) \rho^{n-1} = 0 \\ &\Rightarrow \frac{\rho^n(x) - \rho^{n-1}(x)}{\Delta t} + \rho^{n-1} \mathbf{k} \cdot \nabla a_p^{n-1} + \rho^{n-1} (\nabla \cdot \mathbf{k}) = 0 \\ &\Rightarrow \rho^{n-1} \frac{a_p^n(x) - a_p^{n-1}(x)}{\Delta t} + \rho^{n-1} \mathbf{k} \cdot \nabla a_p^{n-1} + \rho^{n-1} (\nabla \cdot \mathbf{k}) = 0 \\ &\Rightarrow \rho^{n-1} \frac{a_p^n(x) - a_p^{n-1}(y)}{\Delta t} + \rho^{n-1} (\nabla \cdot \mathbf{k}) = 0 \end{aligned}$$

- Finally, we have

$$\rho^{n-1} \frac{a_p^n(x) - a_p^{n-1}(y)}{\Delta t} + \gamma \rho^{n-1} (\nabla \cdot \mathbf{k}) = 0$$

## Computational Model

- Velocity

$$\rho^{n-1} \frac{\mathbf{u}^n - \mathbf{u}^{n-1}}{\Delta t} + \rho^{n-1} \mathbf{k} \cdot \nabla \mathbf{u}^{n-1} + \nabla p^{n-\frac{1}{2}} = 0$$

- Based on the estimation point  $\mathbf{x}^{n-\frac{1}{2}}$ ,

$$\nabla p^{n-\frac{1}{2}}(\mathbf{x}^{n-\frac{1}{2}}) = \left[ \nabla p^{n-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} \Delta t \mathbf{k} \cdot \nabla (\nabla p^{n-\frac{1}{2}}) + o(\Delta t^2) \right](\mathbf{x}^n),$$

$$d\mathbf{x}^{n-\frac{1}{2}} = \left( 1 - \frac{1}{2} \Delta t \nabla \cdot \mathbf{k} + o(\Delta t^2) \right) d\mathbf{x}^n$$

- By taking integral for  $\rho^{n-1}(\mathbf{y})$  over  $\Omega(\mathbf{y})$ ,

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega(\mathbf{x}^{n-\frac{1}{2}})} \nabla p^{n-\frac{1}{2}} d\mathbf{x}^{n-\frac{1}{2}} \\ &= \int_{\Omega(\mathbf{x}^n)} \left[ \nabla p^{n-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} \Delta t \mathbf{k} \cdot \nabla (\nabla p^{n-\frac{1}{2}}) + o(\Delta t^2) \right] \left( 1 - \frac{1}{2} \Delta t \nabla \cdot \mathbf{k} + o(\Delta t^2) \right) d\mathbf{x}^n \\ &= \int_{\Omega(\mathbf{x}^n)} \left[ \nabla p^{n-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} \Delta t \nabla \cdot \{ (\nabla p^{n-\frac{1}{2}}) \mathbf{k}^T \} + o(\Delta t^2) \right] d\mathbf{x}^n \\ &= \int_{\Omega(\mathbf{x}^n)} \left[ \left( \nabla p^n - \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial \nabla p^n}{\partial t} \right) - \frac{\Delta t}{2} \nabla \cdot \left\{ \left( \nabla p^n - \Delta t \frac{\partial \nabla p^n}{\partial t} \right) \mathbf{k}^T \right\} + o(\Delta t^2) \right] d\mathbf{x}^n \\ &= \int_{\Omega(\mathbf{x}^n)} \left[ p^n \nabla a_p^n - \frac{\Delta t}{2} \nabla \cdot \{ (p^n \nabla a_p^n) \mathbf{k}^T \} - \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial \nabla p^n}{\partial t} + o(\Delta t^2) \right] d\mathbf{x}^n \end{aligned}$$

## Computational Model

- Finally, we need to solve,

$$\begin{aligned} & \rho^{n-1} \frac{D\mathbf{u}^{n-1}(\mathbf{x})}{Dt} + p^n \nabla a_p^n - \frac{\Delta t}{2} \nabla \cdot \{ (p^n \nabla a_p^n) \mathbf{k}^T \} - \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial \nabla p^n}{\partial t} = 0 \\ \Rightarrow & \rho^{n-1} \frac{D\mathbf{u}^{n-1}(\mathbf{x})}{Dt} + p^n \nabla a_p^n - \frac{\Delta t}{2} \nabla \cdot \{ (p^n \nabla a_p^n) \mathbf{k}^T \} = 0 \end{aligned}$$

Where

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \nabla p^n}{\partial t} + \nabla(\mathbf{u} \cdot \nabla p^n) + \gamma \nabla \{ p^n \nabla \cdot \mathbf{u}^n \} = 0 \\ \Rightarrow & \int_{\Omega^n} \frac{\partial \nabla p^n}{\partial t} d\mathbf{x} + \int_{\Omega^n} \nabla(\mathbf{u} \cdot \nabla p^n) d\mathbf{x} + \int_{\Omega^n} \gamma \nabla \{ p^n \nabla \cdot \mathbf{u}^n \} d\mathbf{x} = 0 \\ \Rightarrow & \int_{\Omega^n} \frac{\partial \nabla p^n}{\partial t} d\mathbf{x} + \int_{\partial \Omega^n} (\mathbf{u} \cdot \nabla p^n) \cdot \mathbf{n} d\gamma + \int_{\partial \Omega^n} \int_{\Omega^n} \gamma \{ p^n \nabla \cdot \mathbf{u}^n \} \cdot \mathbf{n} d\gamma = 0 \\ \Rightarrow & \int_{\Omega^n} \frac{\partial \nabla p^n}{\partial t} d\mathbf{x} = 0 \end{aligned}$$

- Finally, we need to solve,

$$\rho^{n-1} \frac{D\mathbf{u}^{n-1}(\mathbf{x})}{Dt} + p^n \nabla a_p^n - \frac{\Delta t}{2} \nabla \cdot \{ (p^n \nabla a_p^n) \mathbf{k}^T \} = 0$$

## Computational Model

- Substitute the above expression;

$$\begin{aligned}
 \rho^{n-1} \frac{D\mathbf{u}^{n-1}(\mathbf{x})}{Dt} &= \left( \rho^n - \Delta t \frac{\partial \rho^{n-1}}{\partial t} \right) \frac{D\mathbf{u}^{n-1}(\mathbf{x})}{Dt} \\
 &= \rho^n \frac{D\mathbf{u}^{n-1}(\mathbf{x})}{Dt} - \Delta t \frac{\partial a_p^{n-1}}{\partial t} \rho^{n-1} \frac{D\mathbf{u}^{n-1}(\mathbf{x})}{Dt} \\
 &= \rho^n \frac{D\mathbf{u}^{n-1}(\mathbf{x})}{Dt} - \Delta t \frac{\partial a_p^{n-1}}{\partial t} \left( -\nabla p^{n-\frac{1}{2}} \right) \\
 &= \rho^n \frac{D\mathbf{u}^{n-1}(\mathbf{x})}{Dt} + \Delta t \frac{\partial a_p^{n-1}}{\partial t} \left( \nabla p^n - \frac{\Delta t}{2} \nabla \cdot \{ (\nabla p^n) \mathbf{k}^T \} \right) \\
 &= \rho^n \frac{D\mathbf{u}^{n-1}(\mathbf{x})}{Dt} + \Delta t \frac{\partial a_p^{n-1}}{\partial t} \nabla p^n + o(\Delta t^2)
 \end{aligned}$$

- Finally, we need to solve,

$$\begin{aligned}
 \rho^{n-1} \frac{D\mathbf{u}^{n-1}(\mathbf{x})}{Dt} + p^n \nabla a_p^n - \frac{1}{2} \Delta t \nabla \cdot \{ (p^n \nabla a_p^n) \mathbf{k}^T \} &= 0 \\
 \Rightarrow \rho^n \frac{D\mathbf{u}^{n-1}(\mathbf{x})}{Dt} + \Delta t \frac{\partial a_p^{n-1}}{\partial t} \nabla p^n + p^n \nabla a_p^n - \frac{1}{2} \Delta t \nabla \cdot \{ (p^n \nabla a_p^n) \mathbf{k}^T \} &= 0 \\
 \Rightarrow \rho^n \frac{D\mathbf{u}^{n-1}(\mathbf{x})}{Dt} + \{ a_p^n - a_p^{n-1} \} \nabla p^n + p^n \nabla a_p^n - \frac{1}{2} \Delta t \nabla \cdot \{ (p^n \nabla a_p^n) \mathbf{k}^T \} &= 0
 \end{aligned}$$

## Strong and Weak form for Modified FDV model with 1<sup>st</sup> order

- Density:

$$\begin{aligned}
 \rho^{n-1} \frac{D a_p^{n-1}(\mathbf{x})}{Dt} + \rho^{n-1} (\nabla \cdot \mathbf{k}) &= 0 \\
 \Rightarrow \int_{\Omega} \rho^{n-1} \frac{D a_p^{n-1}(\mathbf{x})}{Dt} v \, dx + \int_{\partial \Omega} \rho^{n-1} v \mathbf{k} \cdot \mathbf{n} \, dx - \int_{\Omega} \rho^{n-1} v \mathbf{k} \cdot \nabla a_p^{n-1} \, dx - \int_{\Omega} \rho^{n-1} \mathbf{k} \cdot \nabla v \, dx &= 0
 \end{aligned}$$

- Velocity:

$$\begin{aligned}
 \rho^n \frac{D\mathbf{u}^{n-1}(\mathbf{x})}{Dt} + \{ a_p^n - a_p^{n-1} \} \nabla p^n + p^n \nabla a_p^n - \frac{1}{2} \Delta t \nabla \cdot \{ (p^n \nabla a_p^n) \mathbf{k}^T \} &= 0 \\
 \Rightarrow \int_{\Omega} \rho^n \frac{D\mathbf{u}^{n-1}(\mathbf{x})}{Dt} \cdot \mathbf{v} \, dx + \int_{\Omega} \{ a_p^n - a_p^{n-1} \} \nabla p^n \cdot \mathbf{v} \, dx + \int_{\Omega} p^n \nabla a_p^n \cdot \mathbf{v} \, dx \\
 - \frac{1}{2} \Delta t \int_{\partial \Omega} p^n \{ \nabla a_p^n(\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}) \} \cdot \mathbf{n} \, d\gamma + \frac{1}{2} \Delta t \int_{\Omega} p^n \{ (\nabla a_p^n) \mathbf{k}^T \} : \nabla \mathbf{v}^T \, dx &= 0
 \end{aligned}$$

- Pressure:

$$\begin{aligned}
 p^{n-1} \frac{D a_p^{n-1}(\mathbf{x})}{Dt} + \gamma p^{n-1} (\nabla \cdot \mathbf{k}) &= 0 \\
 \Rightarrow \int_{\Omega} p^{n-1} \frac{D a_p^{n-1}(\mathbf{x})}{Dt} w \, dx + \int_{\partial \Omega} \gamma p^{n-1} w \mathbf{k} \cdot \mathbf{n} \, dx - \int_{\Omega} \gamma p^{n-1} w \mathbf{k} \cdot \nabla a_p^{n-1} \, dx - \int_{\Omega} \gamma p^{n-1} \mathbf{k} \cdot \nabla w \, dx &= 0
 \end{aligned}$$

## Riemannian metric space

- The density and the pressure transformed by Logarithm conformation :

$$a_\rho = \log \rho, a_p = \log p,$$

- The velocity:

$$\mathbf{u},$$

- Riemann Invariant:

$$\mathbf{u} - \frac{2}{\gamma-1} c, \frac{p}{\rho^\gamma}, \mathbf{u} + \frac{2}{\gamma-1} c, \left( c = \sqrt{\gamma \frac{p}{\rho}} \right)$$

- The Entropy:

$$\log \frac{p}{\rho^\gamma} = a_p - \gamma a_\rho,$$

- The Kinetic Energy:

$$\frac{1}{2} |\mathbf{u}|^2$$

- The Enstrophy :

$$\frac{1}{2} |\nabla \times \mathbf{u}|^2$$

- Finally, we use

$$\sigma = \left\{ a_\rho, a_p, \mathbf{u}, \mathbf{u} \pm \frac{2}{\gamma-1} c, \frac{p}{\rho^\gamma}, a_p - \gamma a_\rho \right\}$$

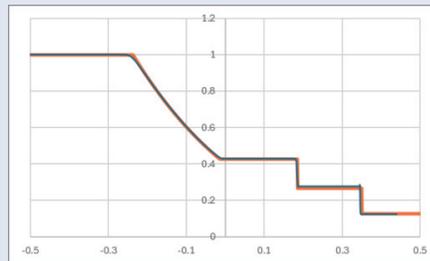
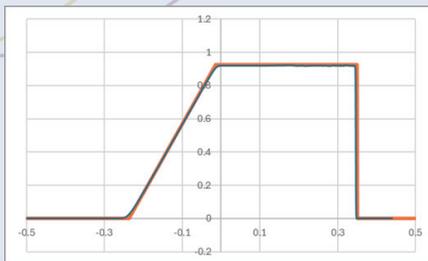
## Modified FDV model

$a_\rho, u, a_p$  for [P2-P2-P2]

$$\Delta x = 5 \times 10^{-4}, q = 0.5$$

Velocity

Density



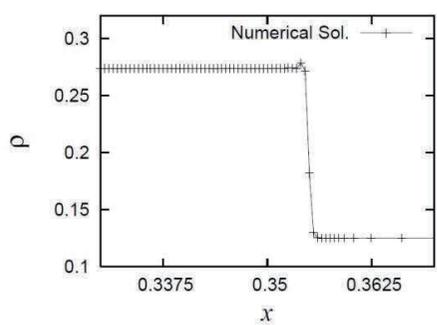
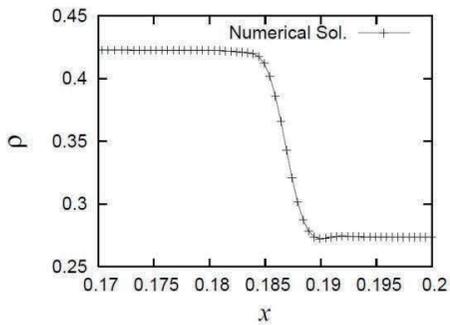
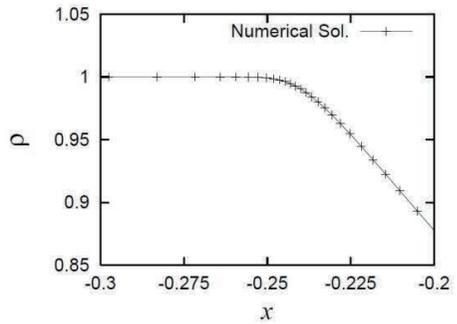
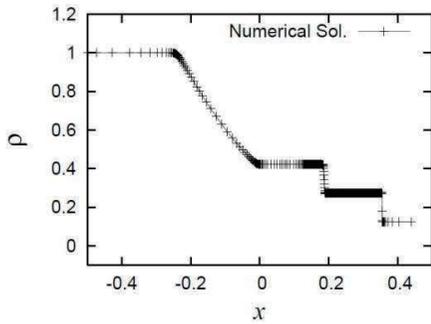
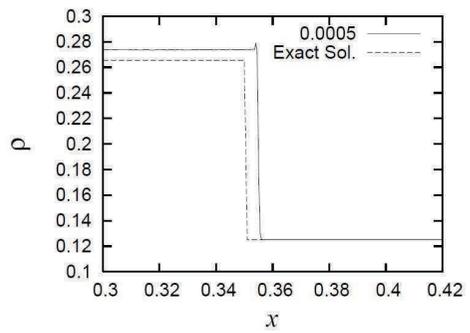
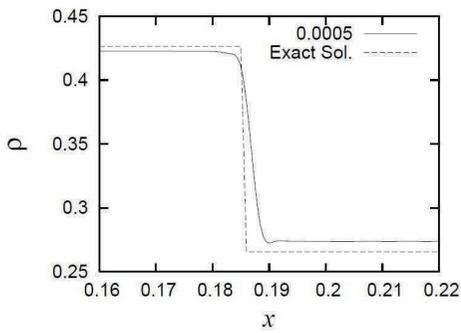
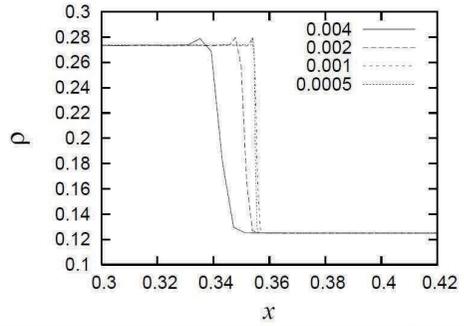
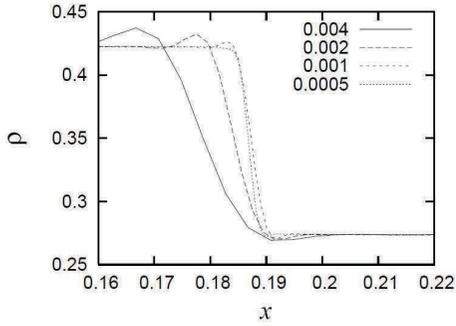


Table 1. The number of vertex NBVX in the initial domain depending on  $\Delta x = 0.004, 0.002, 0.001, 0.0005$ .

$\Delta x = 0.004$	$\Delta x = 0.002$	$\Delta x = 0.001$	$\Delta x = 0.0005$
1506	3006	6006	12006

$\Delta x$	Density	Velocity	Pressure	Momentum	Total energy	Entropy	NBVX
0.004	0.3981%	0.4311%	5.05%	0.1767%	0.09310%	2.8024%	444
0.002	0.3496%	0.4421%	5.22%	0.1804%	0.09308%	2.8561%	1014
0.001	0.3201%	0.4481%	5.30%	0.1830%	0.09309%	2.8799%	3156
0.0005	0.3024%	0.4477%	5.31%	0.1825%	0.08872%	2.8720%	9608

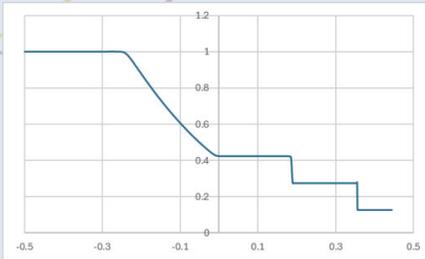
Comparing the number of vertex NBVX of the initial domain as shown in Table 1 with that of the domain at the time  $t = 0.2$ , NBVX on  $\Delta x = 0.004, 0.002, 0.001, 0.0005$  are decreasing up to 29.4%, 33.7%, 52.5%, 75.0%. Especially, the density and the momentum, the inertial energy considered on the conservation system of the compressible euler equation are decreasing enough.

## Riemann Metric Space Validation

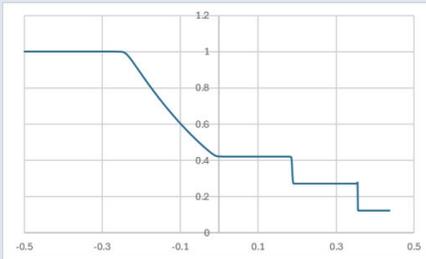
Riemann Metric Space Candidates	NBVX (Relative Error)	The density (Relative Error)
$a_p, a_p, \mathbf{u}, \mathbf{u} \pm \frac{2}{\gamma-1}c, \frac{p}{\rho^\gamma}, a_p - \gamma a_p$	9608 (75%)	0.005624 (0.302%)
$a_p, a_p, \mathbf{u}$	9085 (75.6%)	0.005624 (0.302%)
$\rho, p, \mathbf{u}$	1343 (11.2%)	0.005642 (0.305%)
$\rho, \rho \mathbf{u}, \frac{p}{\gamma-1} + \frac{1}{2}\rho \mathbf{u} ^2$	1509 (12.5%)	0.005642 (0.305%)
The kinetic energy: $\frac{1}{2}\rho \mathbf{u} ^2$	2338 (19.4%)	0.005642 (0.305%)
The Entropy: $\log \frac{p}{\rho^\gamma}$	838 (6.9%)	0.00561 (0.424%)
The Reimann Invariant: $\mathbf{u} \pm \frac{2}{\gamma-1}c, \frac{p}{\rho^\gamma}$	1964 (16.4%)	0.005643 (0.312%)

# Riemann Metric Space Validation

$\alpha_\rho, \alpha_p, \mathbf{u},$   
**NBVX:9085(75.6%),**  
**The density:0.005624(0.302%)**

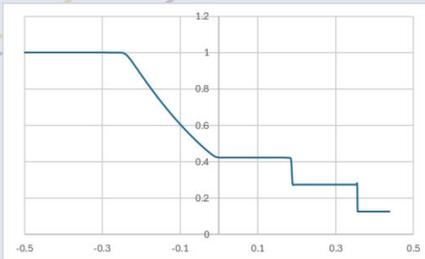


$\rho, p, \mathbf{u},$   
**NBVX:1343(11.2%),**  
**The density:0.005642(0.305%)**

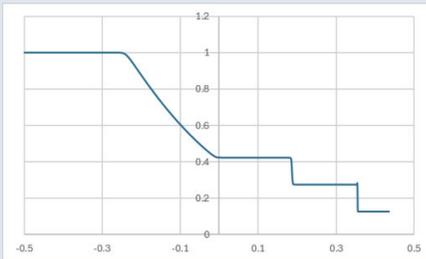


# Riemann Metric Space Validation

$\rho, \rho \mathbf{u}, \frac{p}{\gamma - 1} + \frac{1}{2} \rho |\mathbf{u}|^2$   
**NBVX:1509(12.5%),**  
**The density:0.005642(0.305%)**



The Kinetic Energy  $\frac{1}{2} \rho |\mathbf{u}|^2,$   
**NBVX:2338(19.4%),**  
**The density:0.005642(0.305%)**



# Riemann Metric Space Validation

The Entropy:  $\log \frac{p}{\rho^\gamma}$ ,

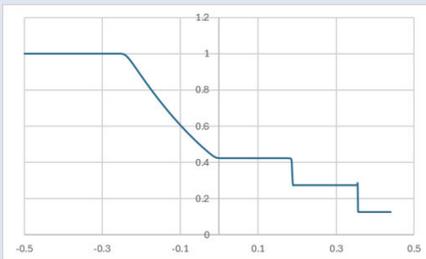
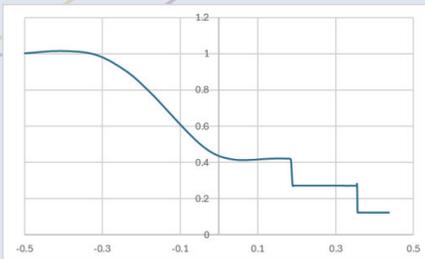
**NBVX:838(6.9%),**

**The density:0.00561(0.424%)**

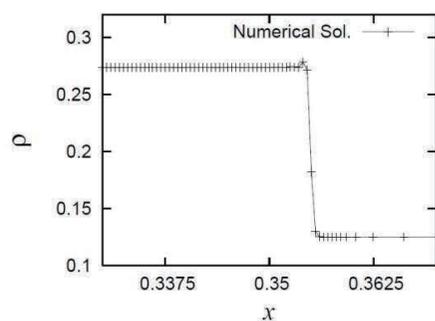
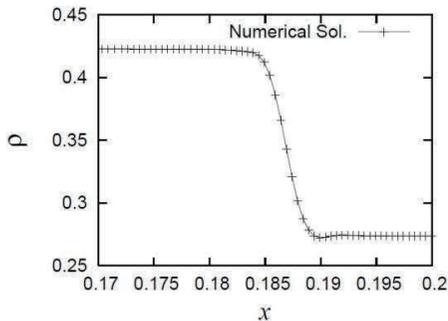
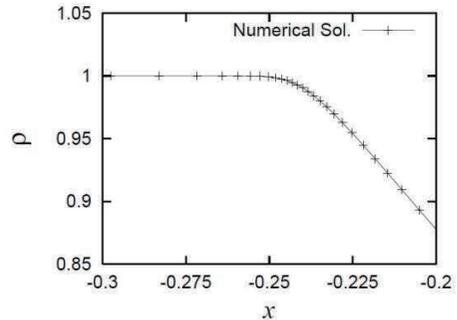
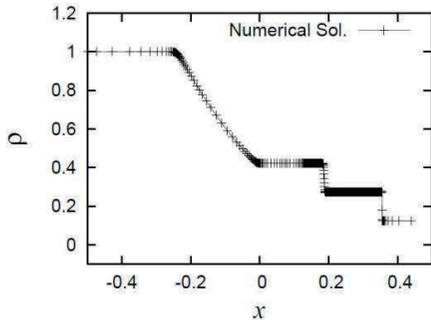
The Reimann Invariant:  $u \pm \frac{2}{\gamma-1} c, \frac{p}{\rho^\gamma}$ ,

**NBVX:1964(16.4%),**

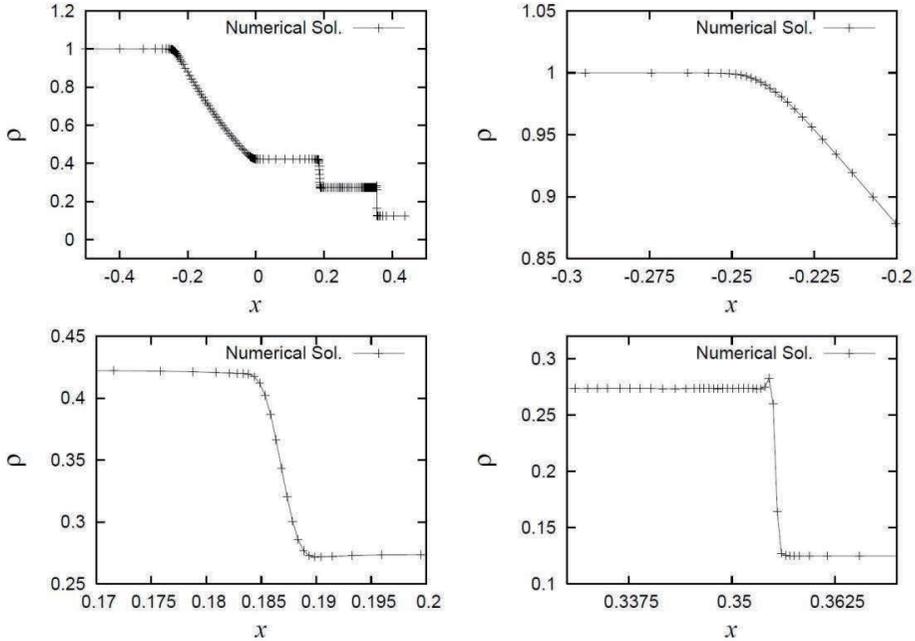
**The density:0.005643(0.312%)**



$a_\rho, a_p, u, u \pm \frac{2}{\gamma-1} c, \frac{p}{\rho^\gamma}, a_p - \gamma a_\rho$ , NBVX=9608



$\rho, p, u, NBVX=1343$



## Compressible Navier-Stokes eq.

- Logarithm conformation representation in compressible Navier-Stokes equation is

– Density:

$$\rho^{n-1} \frac{D a_p^{n-1}(\mathbf{x})}{Dt} + \rho^{n-1} (\nabla \cdot \mathbf{k}) = 0,$$

– Velocity:

$$\rho^n \frac{D \mathbf{u}^{n-1}(\mathbf{x})}{Dt} + \{1 + a_p^n - a_p^{n-1}\} \nabla p^n - \frac{1}{2} \Delta t \nabla \cdot \{ (p^n \nabla a_p^n) \mathbf{k}^T \} = \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}^n,$$

– Pressure:

$$p^{n-1} \frac{D a_p^{n-1}}{Dt} + \gamma p^{n-1} (\nabla \cdot \mathbf{u}^n) = (\gamma - 1) \nabla \mathbf{u} : \boldsymbol{\sigma} + \frac{\gamma \mu}{RePr} \exp(a_p - a_p) \nabla (a_p - a_p)$$

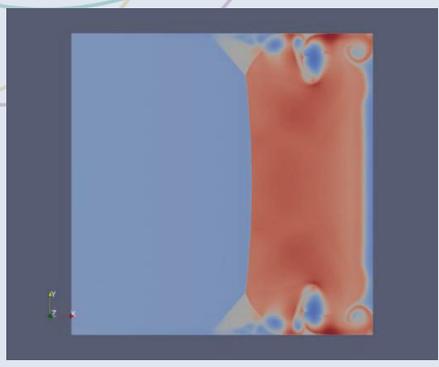
,where

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{\mu}{Re} \left( \nabla \mathbf{u}^T + (\nabla \mathbf{u}^T)^T - \frac{2}{3} (\nabla \cdot \mathbf{u}) \mathbf{I} \right)$$

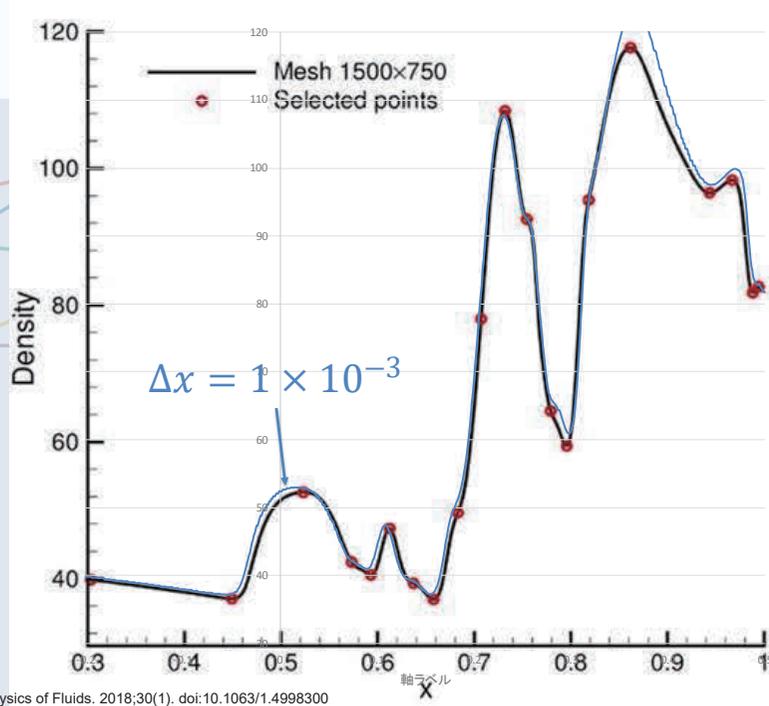
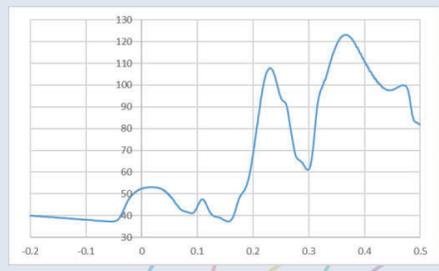
# Viscous Sod Shock Tube Problem

$Re = 200, q = 0.6, \Delta x = 1 \times 10^{-3}$

Density distribution at  $t = 1$



Density profile on the bottom wall



Physics of Fluids, 2018;30(1). doi:10.1063/1.4998300



## サロゲートモデルを活用した大域的トポロジー最適設計の試み

山崎 渉 (長岡技術科学大学大学院工学研究科)  
Wataru YAMAZAKI (Nagaoka University of Technology)

設計最適化の分野では、板厚などの直接的な寸法を最適化(調整)する寸法最適化と呼ばれる方法に始まり、その後、翼形状などの三次元的な複雑形状をパラメータ表現してそのパラメータを最適化する形状最適化と呼ばれる方法が開発された。また、当初は性能値の形状パラメータに対する勾配(感度)情報を用いた局所的な最適設計が行われていたが、近年では応答曲面法などの効率的な手法が開発され、初期形状に依存しない大域的な最適設計が許容可能な設計コストに収まり、工学的な実設計問題にも積極的に適用されている。更に構造設計分野を中心に、トポロジー最適化と呼ばれる、形状変化に加え、形態の変化(例:追加物体や穴の導入)を考慮できる最適化手法が提案されている。単純な形状設計(例:流管・翼の形状)のみならず、各種要素の結合や配置(例:流路の統合・分岐、複数枚翼の配置)についても最適設計が可能となるため、既存の形態及び設計者が経験的に想定する形態とは異なる、潜在的な革新形態を調査する事が可能である。

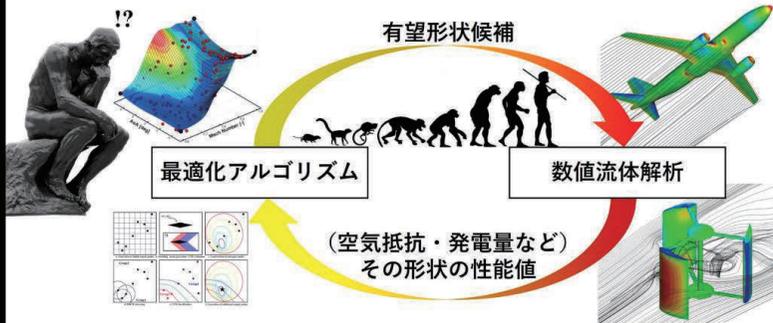
ただし、従来のトポロジー最適化は感度解析手法との組み合わせによる局所的な最適化手法であり、非線形性が強く性能値関数が多峰性を持つ流体設計問題には不向きな一面がある。局所的な最適化が行われてきたのは、その設計コストが小さい事が主たる理由である。また、様々な形態を設計対象に含めて最適化を行う上では、その形態表現自由度に対応するパラメータ(設計変数)の総数が膨大になるため、そのような大規模次元の設計変数空間で大域的最適化を行う事が現実的ではなかった事もその理由である。

著者らはこの問題に対し、機械学習技術及び応答曲面法を活用した、大域的なトポロジー最適化手法を提案している[1]。また、次元削減技術を用いて設計変数空間を低次元化する手法についても検討を進めている[2,3]。本講演は、その研究の状況について報告したものであり、以下に講演で用いたスライド(の一部)を添付する。

### References

- [1] Ban, N., and Yamazaki, W., "Black-Box Function Aerodynamic Topology Optimization Algorithm via Machine Learning Technologies," AIAA Journal, Vol.59, No.12 (2021), pp. 5147-5185.
- [2] Yamazaki, W., Buyanbaatar, N., "Comparative Study of Dimension Reduction Methods for Efficient Design Optimization," Journal of Advanced Mechanical Design, Systems, and Manufacturing, Vol.17, No.3 (2023), p.JAMDSM0036.
- [3] 高村, 今井, 山崎, 王, "複数精度 CFD と POD を用いた自動車フロントエンド冷却開口の最適化計算," 自動車技術会論文集 Vol.53, No.2 (2022), pp.437-442.

# 計算機上での形状最適設計



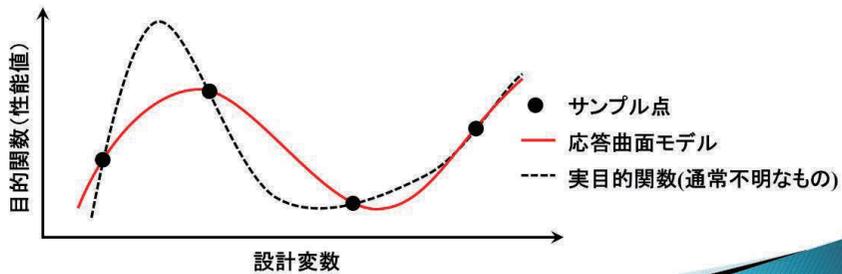
- 設計者の経験や勘に依存しない設計自動化・コスト低減
- 複数の性能値を同時に考慮した多目的最適設計
- 最適化結果からの設計知見の抽出・可視化

Nagaoka Univ. of Tech., Japan

# 応答曲面/サロゲートモデル

内挿・外挿の概念の一般化・多次元化

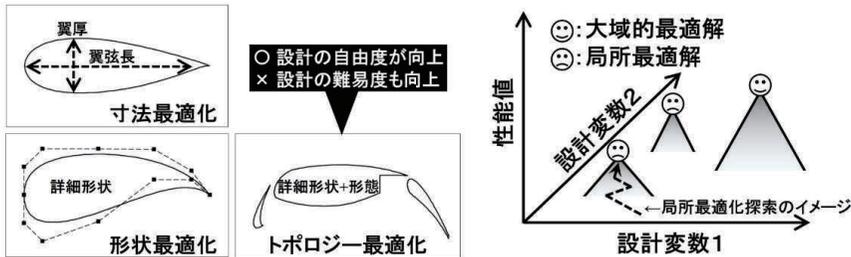
既存のデータ点(サンプル点)を参考にして  
 $n$ 次元の設計変数空間に(初等関数レベルの)近似式を構築  
(構築してしまえば、目的関数の計算コストはわずか)



Nagaoka Univ. of Tech., Japan

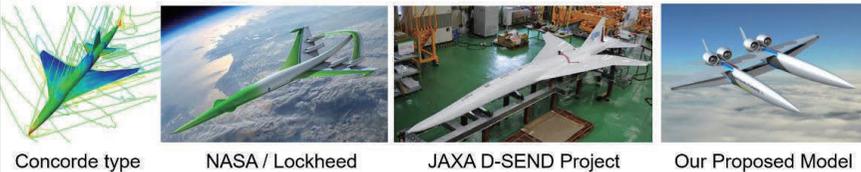
# 大域的トポロジー最適化

- ✓ トポロジー最適化技術への注目
- ✓ 通常、感度解析を活用した局所最適化探索
- ✓ 大域的探索技術の応用
- ✓ 設計変数空間次元の大規模化に関わる問題
- ✓ 任意形態のパラメトリック表現に関わる問題

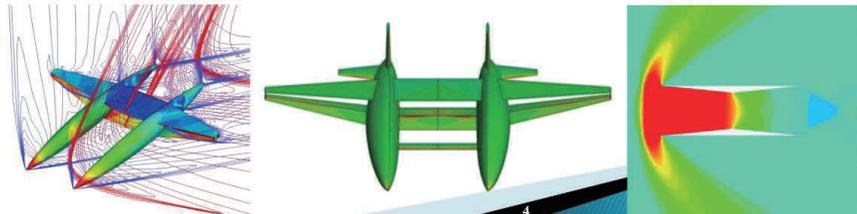


Nagaoka Univ. of Tech., Japan

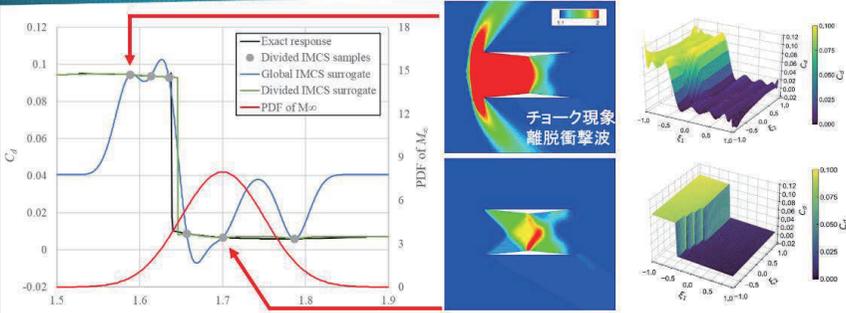
# 次世代超音速旅客機形態の検討



- ✓ 低抵抗・低ブーム(低騒音)が求められている
- ✓ 衝撃波を複数物体間で干渉させるコンセプトに注目
- ✓ 衝撃波構造および性能値が不連続に変化
- ✓ 不連続変化を応答曲面近似するのは難しい



# 不連続変化に対する応答曲面構築



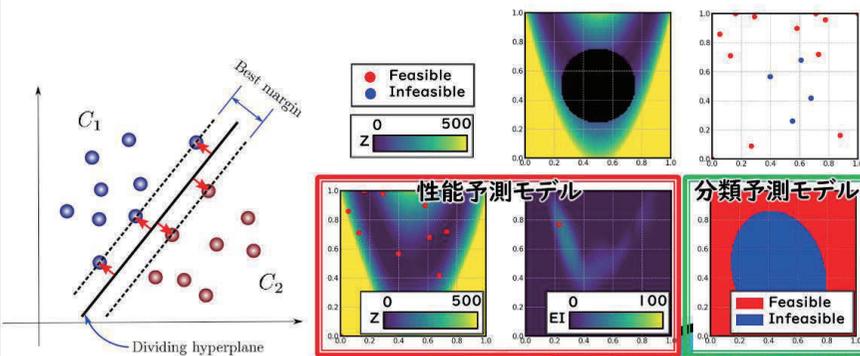
- ✓ Globalな応答曲面は振動的な振る舞い(Gibbs現象)
- ✓ 不連続位置を探索する手法
- ✓ 区間分けして別々に応答曲面を構築する手法
- ✓ ...
- ✓ チョークする形態の中で設計を進める必要性がない
- ✓ 非チョークのケースだけで応答曲面を構築

5

Nagaoka Univ. of Tech., Japan

# SVMの活用

- ✓ Support Vector Machine
- ✓ マージン最大化超平面を求めて2クラス分類
- ✓ チョーク領域 & 解析失敗領域と非チョーク・解析可能領域に分類
- ✓ 追加サンプル点は非チョーク・解析可能領域に選定
- ✓ 応答曲面モデル及びSVMを随時更新していく



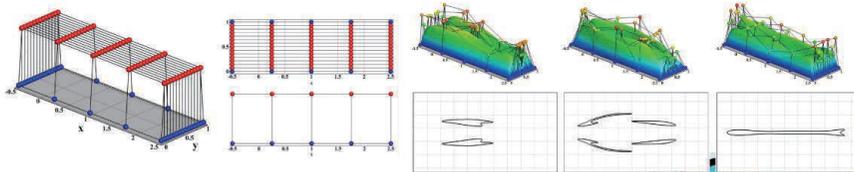
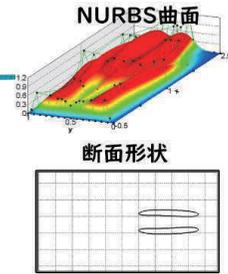
6

Nagaoka Univ. of Tech., Japan

# 形態表現手法

## NURBS曲面による形態表現

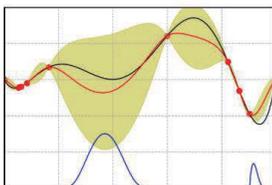
- ✓ 指定した設計範囲に制御点を配置
- ✓ 設計変数は制御点座標の決定に使用
- ✓ 制御点情報に基づいてNURBS曲面を生成
- ✓ 制約条件(断面積値)を満たすように断面形態を抽出
- ✓ 制御点数とその配置が形態表現自由度を決定
- ✓ 70設計変数で2次元翼形態(上下対称形態限定)を表現



Nagaoka Univ. of Tech., Japan

# 高次元最適化問題

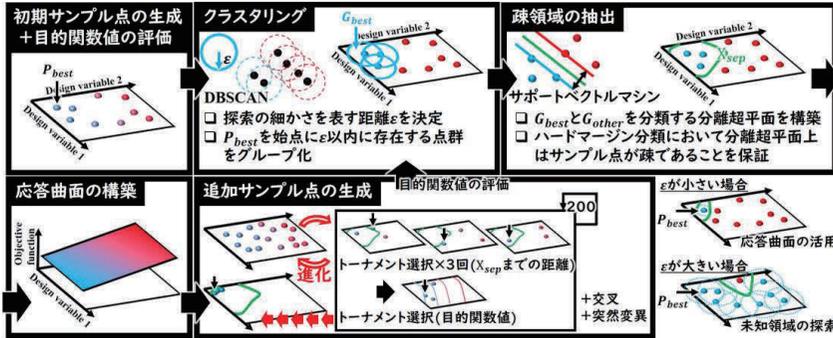
- ✓ Krigingは高次元では精度が悪く、構築コストが大きい(次元の呪い)  
(N次元問題、M個の既知サンプル点の時、 $M \times M$ の逆行列演算を多数回行って、N個のハイパーパラメータの調整(最適化)を行う)
- ✓ 簡易な応答曲面法(ハイパーパラメータなし)を採用し、  
有望領域(追加サンプル点)の選定方法を工夫したらどうか?
- ✓ バランスの良い「未知領域の探索」と「応答曲面の活用」
- ✓ バランスの良い「大域的探査」と「局所的探査」



Analytic (exact) function  
**Predicted function**  
 95% confidence interval  
 Expected improvement

Nagaoka Univ. of Tech., Japan

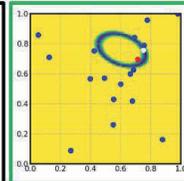
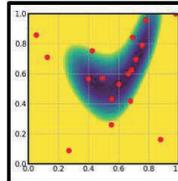
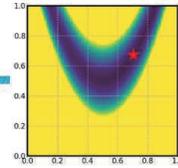
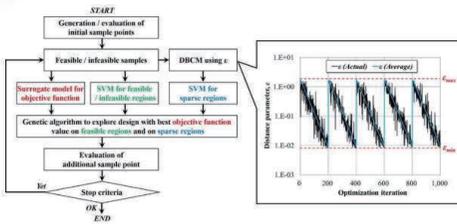
# 高次元最適化問題



- ✓ クラスタリング: DBSCAN
- ✓ パターン認識(分類): サポートベクトルマシン(SVM)
- ✓ 機械学習手法の活用

Nagaoka Univ. of Tech., Japan

## フローチャート



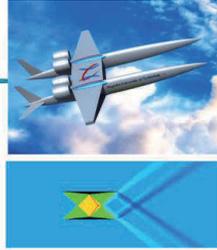
## FANTOM

- ✓ 任意の応答曲面法を活用できる大域的最適化手法
- ✓ SVMで設計空間内の解析可能/不可能領域を分類・予測
- ✓ DBCMの探査半径  $\epsilon$  の変更による大域的/局所的探索の切り替え
- ✓ 高次元設計問題や不連続最適化問題に有用

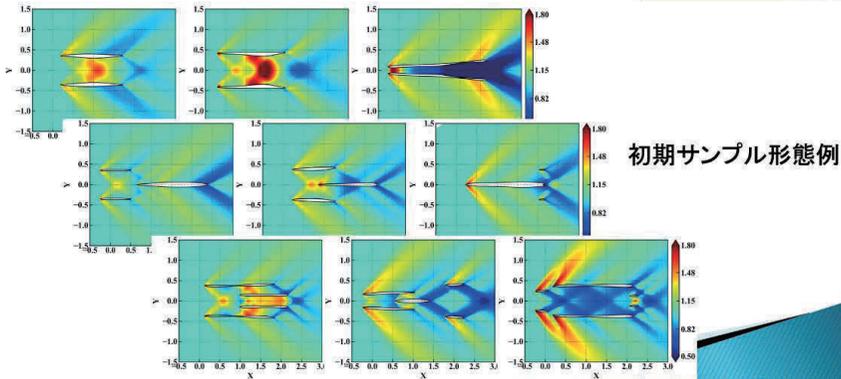
\*N.Ban, W.Yamazaki, "Black-Box Function Aerodynamic Topology Optimization Algorithm via Machine Learning Technologies", AIAA Journal, 2021.

Nagaoka Univ. of Tech., Japan

# 大域的トポロジー最適化

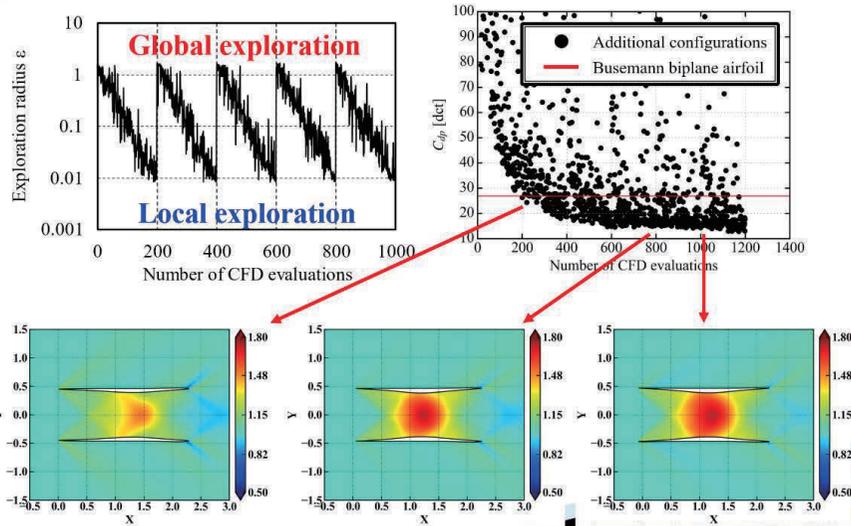


- 解析条件: 一様流マッハ数  $M_\infty=1.7$ 、迎角  $\alpha=0\text{deg}$
- 目的関数: 圧力抗力係数 ( $C_{dp}$ ) の最小化問題
- 制約条件: 翼面積一定 (0.2)
- 設計変数: NURBS surface (70変数)



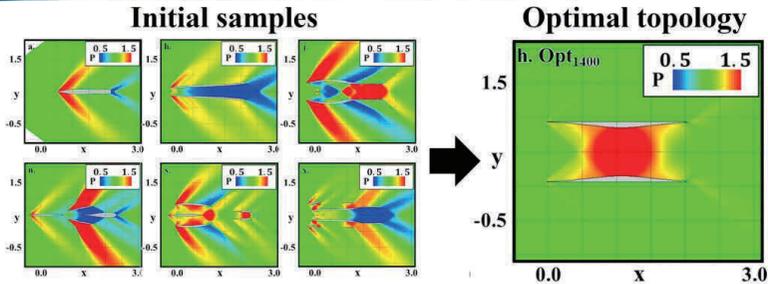
Nagaoka Univ. of Tech., Japan

# 大域的トポロジー最適化

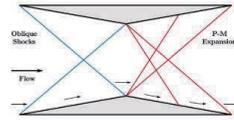


Nagaoka Univ. of Tech., Japan

# 超音速翼の大域的トポロジー最適化



- ✓ 超音速流れ場での抗力最小形態の探査
- ✓ 70設計変数空間での設計探査
- ✓ Busemann複葉翼に類似した最適形態
- ✓ 主流マッハ数の変化による影響調査
- ✓ 粘性効果の影響調査



\*N.Ban, W.Yamazaki, "Black-Box Function Aerodynamic Topology Optimization Algorithm via Machine Learning Technologies", AIAA Journal, 2021.

Nagaoka Univ. of Tech., Japan

# 次元削減手法を用いた形状定義

有望形状群

変形モード

POD etc

$dv_{new} = dv_{ave} + \Phi_1 \xi_1 + \Phi_2 \xi_2$

新規形状 POD係数

$$dv_{new} = dv_{ave} + \sum_{i=1}^{n_{dv}} \Phi_i \xi_i$$

平均形状 PODモード

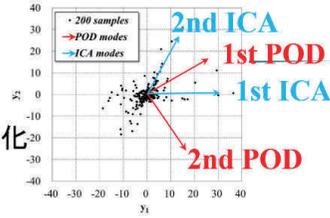
- ✓ 主要な変形モードのみを用いる
- ✓ 設計変数: POD係数の値  $\xi_i$
- ✓ 設計変数総数 = 考慮するモード数

Nagaoka Univ. of Tech., Japan

# 次元削減手法

## ✓ 固有直交分解 (POD)

第1モード: 入力データに対する分散最大化  
 第2モード: 第1モードに直交する方向

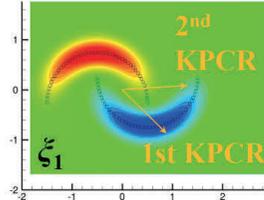


## ✓ 独立成分分析 (ICA)

ネグエントロピー (非ガウス性の指標) 最大化  
 より局所的な特徴の抽出

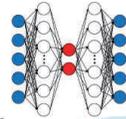
## ✓ カーネル主成分回帰 (KPCR)

カーネル法の利用 (ガウスカーネル)  
 最小二乗推定で線形モードに変換



## ✓ オートエンコーダ (AE)

ニューラルネットワークの利用  
 非線形モードによる次元削減



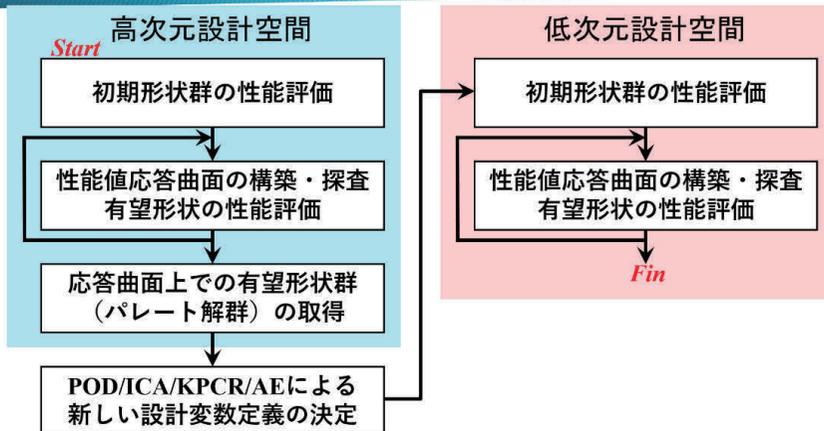
新規形状 新設計係数

$$dv_{new} = dv_{ave} + \sum_{i=1}^{n_{dv}} \Phi_i \xi_i$$

平均形状 モード

W. Yamazaki, N. Buyanmaatar, "Comparative Study of Dimension Reduction Methods for Efficient Design Optimization", JAMDSM, 2023.

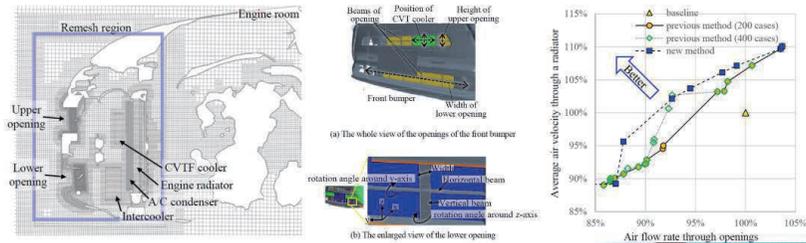
# 次元削減を用いた最適化手法



- ✓ 高次元空間で有望形態群を選定
- ✓ その重要変形モードで低次元空間を定義

# 自動車フロントエンド設計への応用

- ✓ 三菱自動車との共同研究
- ✓ フロントエンドの冷却構造に関する最適設計問題
- ✓ ラジエータ風速の最大化・開口流量の最小化
- ✓ 39設計変数空間次元→7次元
- ✓ 従来手法よりも性能の高い解を取得、計算コストは半減



複数精度CFDとPODを用いた自動車フロントエンド冷却開口の最適化計算  
自動車技術会論文集、2022

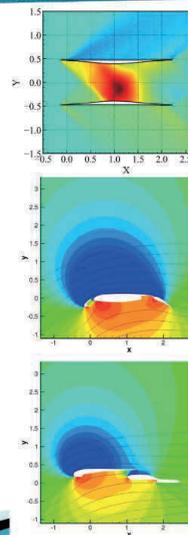
17

Nagaoka Univ. of Tech., Japan

## まとめ

- ✓ 大域的トポロジー最適設計技術の開発
- ✓ サロゲートモデルの活用
- ✓ 高次元最適化問題の問題(次元の呪い)
- ✓ 超音速流れ場での複葉翼形態の検討
- ✓ 亜音速流れ場での多要素翼形態の検討
- ✓ 設計変数定義の検討
- ✓ 設計自由度と設計空間次元の兼ね合い
- ✓ 次元削減技術の活用

Thank you for your attention!!



18

Nagaoka Univ. of Tech., Japan

# 機械学習を利用した進化的トポロジー最適化

矢地謙太郎

大阪大学大学院工学研究科機械工学専攻

## 発表の概要

本研究は、機械学習技術を基盤とした進化的トポロジー最適化の新たな枠組みを提案し、その適用可能性と有効性を検討したものである。従来のトポロジー最適化手法は、設計者の経験に頼らずに最適化構造を導出する点で優れている一方、設計空間の自由度が極めて高いことから、多峰性や非線形性の課題に直面しやすいという問題があった。また、解の探索には膨大な計算リソースとパラメータスタディが必要であり、実用化の妨げとなる要因でもあった。

本研究ではこの課題を克服するため、生成モデルを利用した「かたちの交叉」に着目し、データ駆動型の進化的トポロジー最適化手法を開発した。生成モデルにはニューラルネットワークを活用し、形状データを効率的に生成・交叉する手続きを実現している。具体的には、変分オートエンコーダ (VAE) や最適輸送理論を活用して新しい材料分布を生成する過程を交叉と捉え、進化的アルゴリズムにおける選択や突然変異といった操作を埋め込む進化的アルゴリズムを提案している。このアプローチにより、従来の勾配法では困難であった高次元の設計空間を効率的に探索できるようになり、設計解の多様性も確保することを可能とした。

さらに、位相的データ解析を導入することで、設計変数空間における解の多様性を定量的に評価する手法も組み込んでいる。従来の単純な L2 距離による評価では十分でなかった多様性の測定を、パーシステントホモロジーを用いて抜本的に改善した。その結果、設計変数空間において有意義な多様性を持つ解を得ることが可能となった。

提案手法の有効性を検証するため、熱伝導問題や熱流体問題への適用を実施した。ヒートシンク設計においては、限られた高熱伝導材料の配置を最適化することで放熱性能を向上させ、熱流体問題では冷却性能を最大化する流路構造を創成した。

本研究の成果は、設計支援ツールとしてのトポロジー最適化の可能性をさらに広げるものであり、今後は制御設計との同時最適化や意匠性を考慮した設計への展開が期待される。

## 機械学習を利用した進化的トポロジー最適化

矢地 謙太郎

大阪大学 大学院工学研究科 機械工学専攻



## 講演の内容

1. 代表的なトポロジー最適化
  - トポロジー最適化の基礎
  - (ゆくゆくは自動車性能の飛躍的向上に寄与して欲しい)適用例
2. かたちの交叉に着目したデータ駆動型トポロジー最適化
  - 生成モデルによるかたちの交叉
  - 適用例：ヒートシンク設計 etc.
3. 手法の改良に向けた最近の取り組み
  - 最適輸送理論によるかたちの交叉
  - 位相的データ解析によるかたちの多様性の評価

2

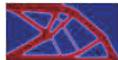
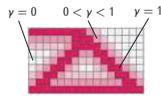
## トポロジー最適化 ～密度法～

解析領域を有限要素法などで離散化し、一般に勾配法により各要素に割り当てられた設計変数 $y$ を更新していくことで最適解を導く。

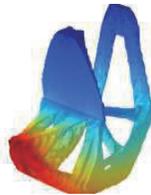
### 数理計画問題

Find  $y(x)$   
that minimize  $J = J(U, y)$ ,  
subject to  $G = G(U, y) \leq 0$ ,  
 $0 \leq y(x) \leq 1$ ,  
where  $U = U(y)$  satisfies PDEs.

勾配法で解く



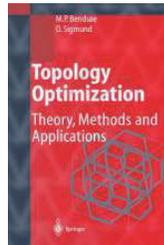
剛性最大化(2D)



剛性最大化(3D)

3

## トポロジー最適化に関連する書籍



Bendsøe & Sigmund (2003), Topology optimization: Theory, methods and applications, Springer, Berlin



西脇眞二, 奥井一浩, 菊池昇 (2013), トポロジー最適化, 丸善出版

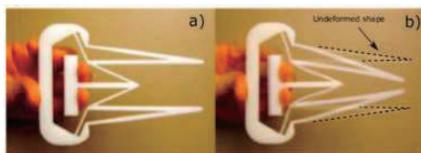


近藤雅夫, 矢地謙太郎, 西脇眞二 (2024), トポロジー最適化の基礎, コロナ社

4

## コンプライアントメカニズム

回転するヒンジ構造などを使わずに所望の変形を実現

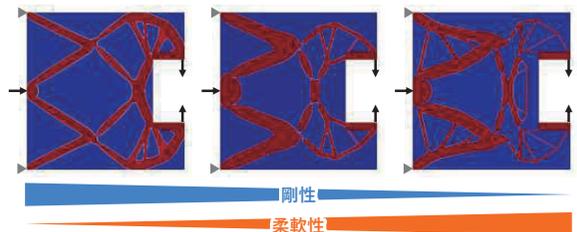


[Ferruer et al., 2017]

5

## 剛性 vs. 柔軟性：最適化の様子

[Sigmund, 1997]

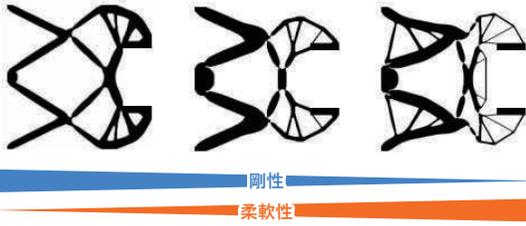


剛性

柔軟性

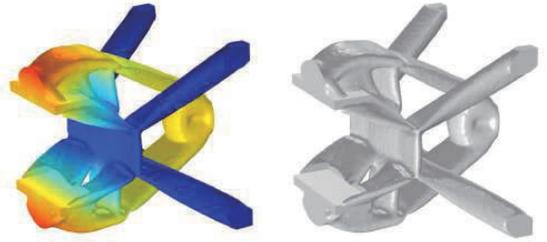
6

### 剛性 vs. 柔軟性：変形の様子



7

### 3Dグリッパー



8

### メタマテリアル

**Auxetic構造**：内部構造を上手く設計することで負のポアソン比を実現



9

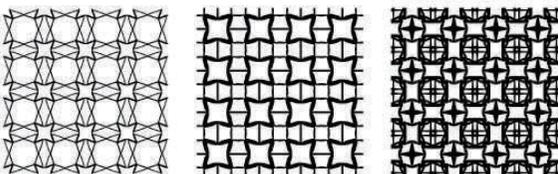
### 様々な構造パターン：最適化の様子

[Sigmund, 1994; Vogiatzis et al., 2017]



10

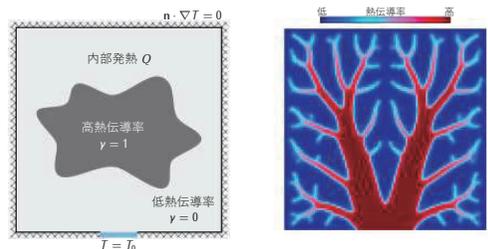
### 様々な構造パターン：変形の様子



11

### 熱伝導問題 ～ヒートシンク～

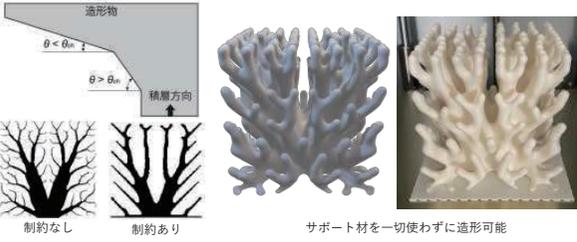
限られた高熱伝導材料を適切に配置することで放熱性能を最大化



12

## 積層造形のための幾何学的制約条件

オーバーハング制約：角度が概ね45度以上になるように最適化構造に制約を付与

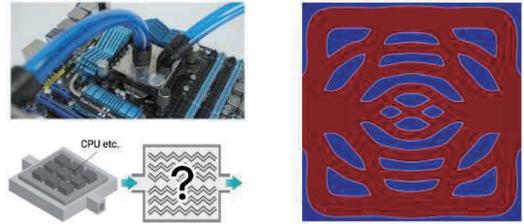


13

## 熱流体問題

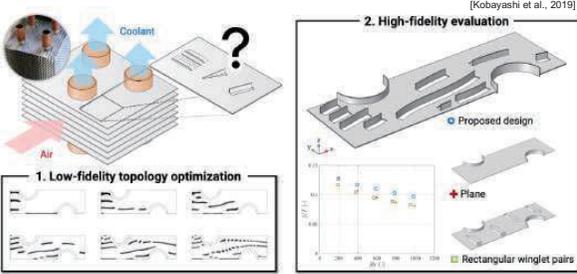
規定した圧力損失のもとで冷却性能を最大にする流路構造を創成

[Yaji et al., 2015]



14

## フィンアンドチューブ熱交換器

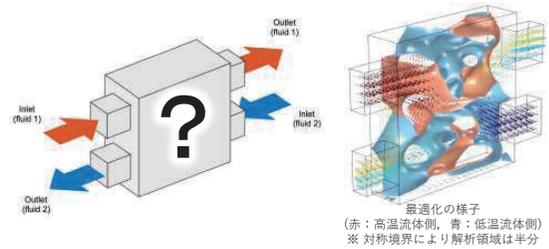


15

## 熱交換器の二流体と隔壁の同時最適化

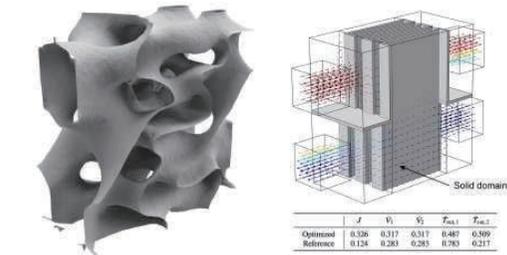
規定した圧損のもとで熱交換量を最大にする二流体と隔壁を創成

[Kobayashi et al., 2021]



16

## 参照モデルとの比較

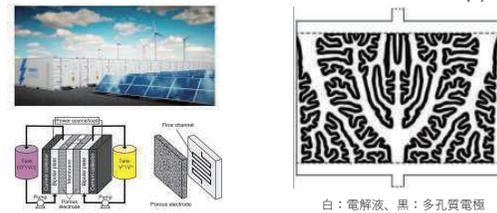


参照モデルと比較して約3倍の熱交換性能を実現(圧力損失と隔壁体積は同条件)

17

## レドックスフロー電池

[Yaji et al., 2018]



電解液と多孔質電極の分布問題として定式化することで楕円型構造が形成される。

18

## 講演の内容

### 1. 最も代表的なトポロジー最適化

- トポロジー最適化の基礎
- (ゆくゆくは自動車性能の飛躍的向上に寄与して欲しい)適用例

### 2. かたちの交叉に着目したデータ駆動型トポロジー最適化

- 生成モデルによるかたちの交叉
- 適用例：ヒートシンク設計 etc.

### 3. 手法の改良に向けた最近の取り組み

- 最適輸送理論によるかたちの交叉
- 位相的データ解析によるかたちの多様性の評価

19

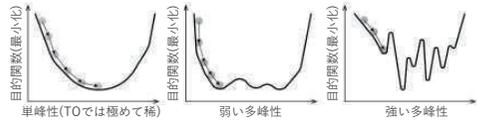
## トポロジー最適化が抱える根源的課題

### トポロジー最適化の諷い文句：

“設計者の勘や経験に依存することなく斬新な最適化構造を求めることができる”

しかしその一方で**設計自由度が高すぎる**がゆえに・・・

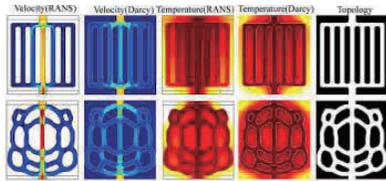
- 場合によっては膨大なパラメータスタディを要する。
- 多峰性の問題に直面しやすい(特に最適化問題の非線形性が強い場合に顕著)。



20

## 簡易モデルによるトポロジー最適化

直接解くのが大変(不可能)な問題を解けるモデルに簡略化する。



例：乱流モデルをダルシーモデルで代替 [Zhao et al., 2018]

得られた結果は簡略化による誤差を含むのでなんらかのポスト処理は必須

21

次元の呪いを回避しつつ、進化的アルゴリズムのように順問題を解くだけで最適解が求まるトポロジー最適化は実現可能か？

簡易モデルによるトポロジー最適化の結果を活用できる？

## 生成モデル

高次元のデータ群に対し、ニューラルネットワークから疑似データを生成できる。(変分オートエンコーダ、敵対的生成ネットワーク、拡散モデル etc.)

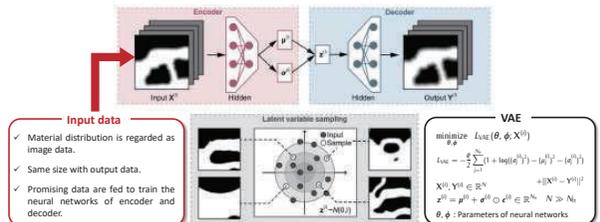


DALL-E3により生成

23

## 生成モデルによる交叉

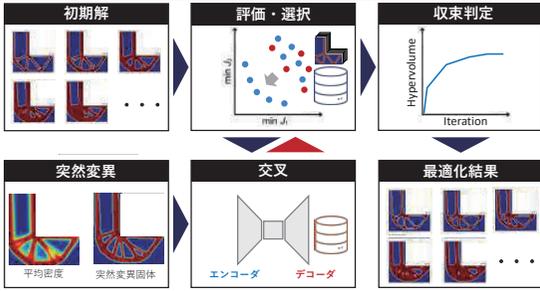
生成モデル(変分オートエンコーダ)により**交配種**を生成する。



24

## データ駆動型トポロジー最適化

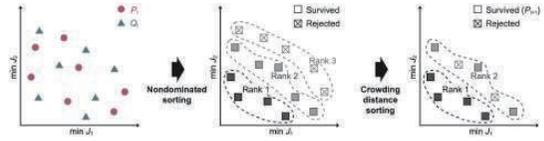
[Yamamoto et al., 2021; Yaji et al., 2022]



25

## 選択

代表的な遺伝的アルゴリズムとして知られるNSGA-IIの選択操作によりエリート解を選択する [Deb et al., 2002]



例：元々の7つの解に新たに7つの解を追加し、その中から7つを選択

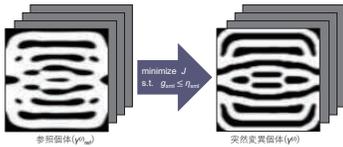
26

## 突然変異

進化の過程で似た構造の解ばかりが生き残らないように敢えて似ていない材料分布データを仕込む。

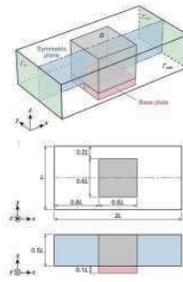
本制約条件の下でLF最適化を実行

$$g_{\text{int}}(\gamma, \gamma_{\text{int}}) = \frac{\int_D (1 - |\gamma(x) - \gamma_{\text{int}}(x)|) d\Omega}{\int_D d\Omega} \leq \theta_{\text{int}}, \quad \forall x \in D$$



27

## 例題：最大温度最小化を目的とした乱流熱伝達問題



目的関数

$$J_1 = \max\{T(x) \mid \forall x \in \Omega_b\} \quad \text{ベースプレートの最大温度}$$

$$J_2 = \int_{\Gamma_w} \rho d\Gamma / \int_{\Gamma_w} d\Gamma \quad \text{圧力損失}$$

評価モデル (k-ε turbulence model)

$$(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nabla \cdot (2\nu \mathbf{S}) + \nabla \cdot \mathbf{T}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$$

$$\mathbf{u} \cdot \nabla T = \nabla \cdot \left( \left( \frac{\nu}{Pr} + \frac{\nu_t}{Pr_t} \right) \nabla T \right)$$

初期解生成のための簡易最適化モデル [Zhao et al., 2018]

$$\nabla \cdot (-\alpha_v^{-1} \nabla p) = 0$$

$$\mathbf{u} = -\alpha_v^{-1} \nabla p$$

$$\rho C_p \mathbf{u} \cdot \nabla T = \kappa \nabla^2 T + \beta_s (T_{\text{ref}} - T)$$

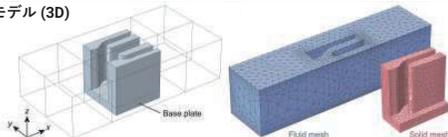
28

## 簡易最適化モデル& 評価モデル

簡易最適化モデル (2D)

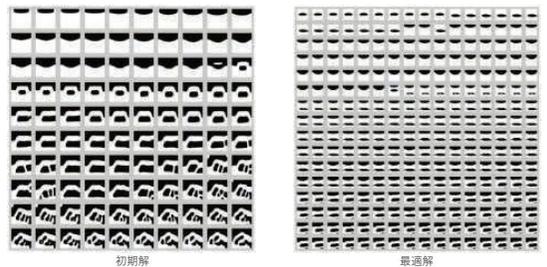


評価モデル (3D)



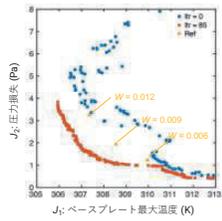
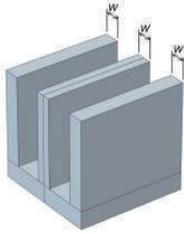
29

## 最適化結果



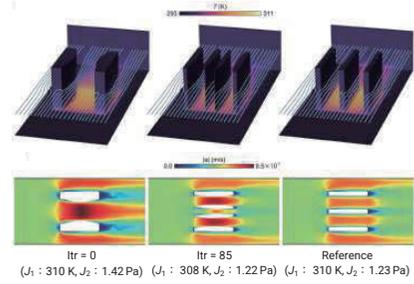
30

## 参照モデルとの比較



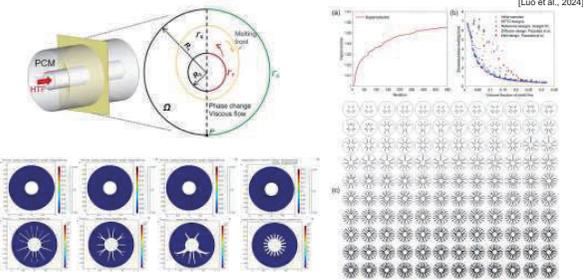
31

## 最適化構造と物理場



32

## その他の適用例②：相変変化材料(融解/凝固・非定常自然対流)



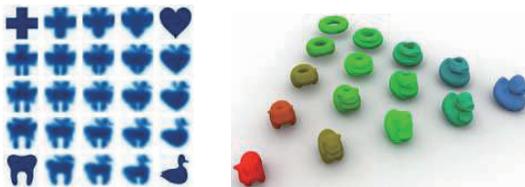
33

## 講演の内容

- 最も代表的なトポロジー最適化
  - トポロジー最適化の基礎
  - (ゆくゆくは自動車性能の飛躍の向上に寄与して欲しい)適用例
- かたちの交叉に着目したデータ駆動型トポロジー最適化
  - 生成モデルによるかたちの交叉
  - 適用例：ヒートシンク設計 etc.
- 手法の改良に向けた最近の取り組み
  - 最適輸送理論によるかたちの交叉
  - 位相的データ解析によるかたちの多様性の評価

34

## 最適輸送



⇨ 生成モデル(VAE)の代わりに使うとどうなる？

35

## 最適輸送による材料分布の生成と評価モデルの構築

[KI et al., in preparation]

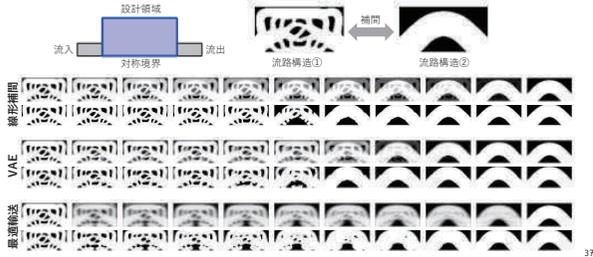
- 材料分布 $p^{(0)}$ を確率分布 $p^{(1)}$ に正規化する：
$$p^{(1)}(x,y) = \frac{p^{(0)}(x,y)}{\int_{\Omega} p^{(0)}(x,y) dx dy}$$
- 重みづけされた $p^{(0)}$ に対するWasserstein重心 $g$ を計算する：
$$g := \arg \min_p \sum_i \alpha_i W_{2,c}^2(p, p_i) \quad W_{2,c}^2(p_1, p_2) = \inf_{\tau \in \Pi(p_1, p_2)} \int_{\Omega \times \Omega} \|x_1 - x_2\|_c^2 d\tau(x_1, x_2) - cH(\tau)$$
- 得られた $g$ を正規化して材料分布 $\gamma$ に変換する：
$$\gamma(x,y) = \frac{g(x,y) - g_{\min}}{g_{\max} - g_{\min}}$$



36

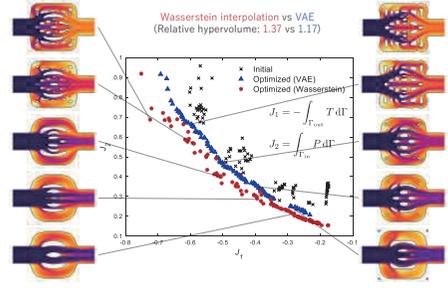
## 他の補間方法との比較

熱流体場のトポロジー最適化で得られた結果による検証 (上段：補間、下段：二値化)



37

## 最適化結果の比較(乱流熱伝達を考慮した流路設計の場合)

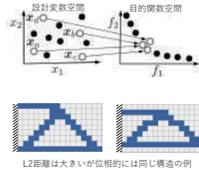


38

## 多様性の定量的評価を組み込んだ選択操作①

進化的アルゴリズムでは解集合の多様性が重要となるが、超高次元の最適化問題では設計変数空間と目的関数空間の多様性が対応しないことがよくある。

- 例：設計変数空間では多様なにそれぞれの目的関数値はあまりかわらない。
- 従来の進化的アルゴリズムでは目的関数空間で多様性を評価するが、トポロジー最適化では設計変数空間で多様性を評価すべき。
- 単純なL2距離では数ピクセルずれると全く異なる材料分布になり得るため、多様性を適切に評価できない。



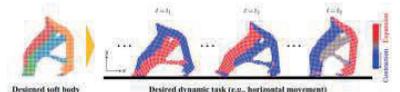
39

## おわりに

- トポロジー最適化は高自由度の下で斬新な代替案を導出できる強力な設計支援ツールである。
- トポロジー最適化は強力だが、その自由度と引き換えに解ける問題は限定的であるため、今回紹介したデータ駆動型手法が一つの突破口になり得る。
- 将来展望：制御系との同時最適設計(Control Co-Design)や人工生命(Artificial Life)への展開



[Sims, 1994]



[Yuh et al., 2023]

“Data-driven design”から“Data-driven morphogenesis”へ

40

# 不変解に基づく乱流熱伝達の予測と制御

本木 慎吾  
大阪大学大学院基礎工学研究科

近年、持続可能な社会に向けたエネルギーの有効利用の観点から、伝熱促進を目的とした効率的な流体制御技術の需要が急速に高まっている。熱交換器等の流体による熱の輸送を伴う伝熱機器のさらなる高効率化は自動車の設計開発においても重要な課題であり、自動車性能の飛躍的な向上をもたらすと期待される。

熱や運動量、および物質の輸送において重要な役割を担う乱流の解明・予測・制御は、工学から物理学分野にわたる重要な研究課題であり、国内外の多くの研究者により精力的に研究が行われてきた。特に近年、計算機技術の発展により大規模数値解析が可能となったことで、乱流中の管状渦や壁乱流における縦渦とストリークといった代表的な秩序構造の理解が進んでいる。さらに、流体運動を記述する Navier–Stokes 方程式の非線形不変解が乱流の構造および統計的性質を再現することが明らかとなり、このような不変解に基づく乱流の理論的な解明への試みが行われている [1]。

本研究では、多孔質体で構成される壁面のような透過性を有する壁面に着目し、その乱流熱伝達を明らかにした。具体的には、多孔質壁面を模擬する透過壁条件を用いた直接数値シミュレーション [2,3] および実験を実施し、壁面の多孔性に起因する大規模構造 (大規模プリューム, 大規模スパン方向渦) の出現により、自然対流および強制対流のどちらにおいても究極熱伝達 (壁面熱流束が流体の熱伝導率に依存しない熱伝達) を達成し得ることを見出した。さらに、透過壁条件を伴う Navier–Stokes 方程式の非線形不変解 (定常解) を求めることで、大規模構造と究極熱伝達の間を理論的に示した [4]。

熱対流 (温度差に起因する浮力によって駆動される対流) について、Boussinesq 方程式 (非圧縮 Navier–Stokes 方程式+温度の移流拡散方程式) の 3次元定常解がマルチスケール性を示し、乱流の秩序構造および統計法則を再現することを発見した [5]。また、その水平周期の最適化を行うことで、不変解が乱流状態よりも顕著に高い熱伝達を達成することを見出した。さらに、磁気力 (水平方向の減衰力) の導入により、熱対流における乱流熱伝達を制御し得ることを示すと同時に、伝熱面の形状と磁気力を最適化することで、極めて顕著な伝熱促進が可能であることを明らかにした。

本研究の成果は、偏微分方程式の非線形不変解に基づくアプローチの可能性を示すと同時に、自動車性能の向上にも資する高効率の熱交換技術の研究開発に新しい展開をもたらすものと期待される。

## References

- [1] G. Kawahara *et al.*, *Annu. Rev. Fluid Mech.*, **44**(1), 203–225, 2012.
- [2] K. Kawano *et al.*, *J. Fluid Mech.*, **914**, A13, 2021.
- [3] S. Motoki *et al.*, *J. Fluid Mech.*, **931**, R3, 2022.
- [4] S. Motoki *et al.*, *Phil. Trans. R. Soc. A*, **380**, 20210037, 2022.
- [5] S. Motoki *et al.*, *J. Fluid Mech.*, **914**, A14, 2021.



## 不変解に基づく乱流熱伝達の予測と制御

本木 慎吾

大阪大学 大学院基礎工学研究科

### 本日のアウトライン

2/29

- 研究背景と目的
- 透過壁面による乱流熱伝達の制御
- 不変解における対流熱伝達の最適化
- 磁気力による乱流熱伝達の制御
- まとめ

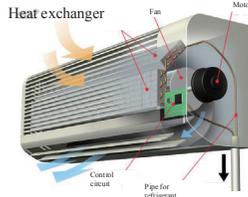
☑ 近年、**伝熱促進を目的とした流体制御技術**の需要が高まっている

Heating system for home



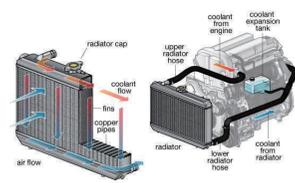
Ref: <https://blog.softinway.com/>

Air Conditioner



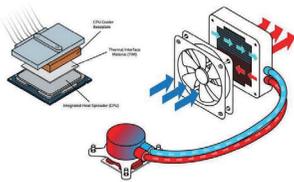
Ref: <https://www.sugilab.net/>

Automobile Radiator



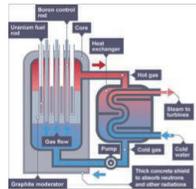
Ref: <https://www.mustangmogul.com/>

Computer Cooling

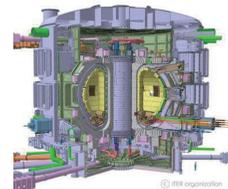


Ref: <https://www.intel.co.jp/>

Power Plant

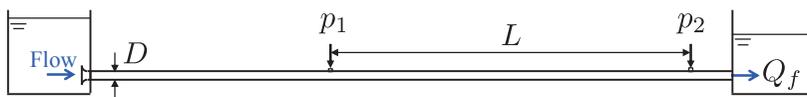


Ref: <https://www.bbc.co.uk/education/>



Ref: <https://www.fusion.qst.go.jp/ITER>

乱流輸送



Reynolds数

$$Re = \frac{u_b D}{\nu}$$

管摩擦係数

$$\lambda = \frac{2D}{L} \frac{\Delta p}{\rho u_b^2}$$

$u_b = \frac{Q_f}{\pi D^2/4}$  : 円管内平均速度

$Q_f$  : 流量

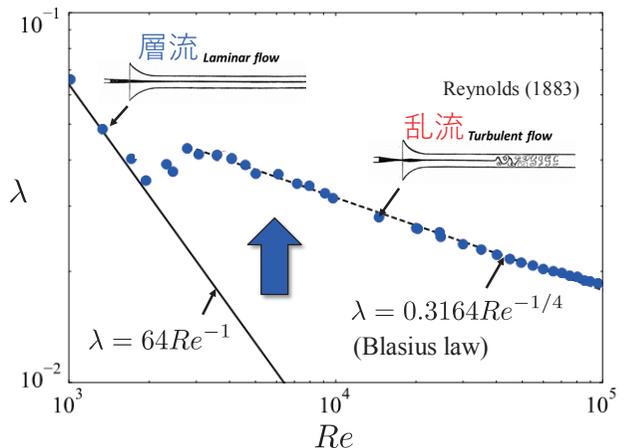
$\rho$  : 密度

$D$  : 円管内径

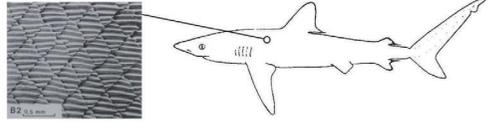
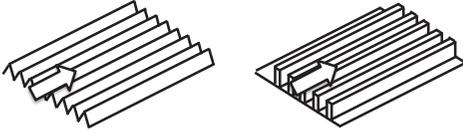
$\nu$  : 動粘性係数

$L$  : 流路長さ

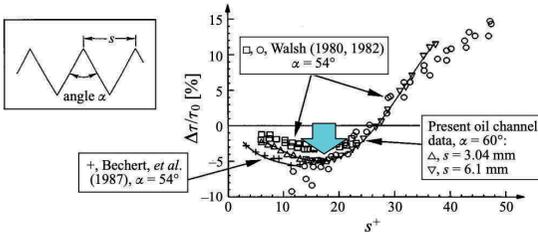
$\Delta p = p_1 - p_2$  : 圧力損失



➤ リブレット（流れ方向の微細な溝）による抵抗低減



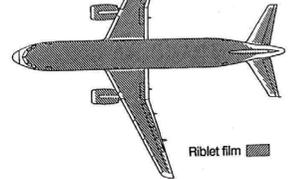
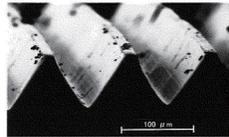
Bechert & Hage, *WIT Press* (2006)



Bechert *et al.*, *JFM* (1997)

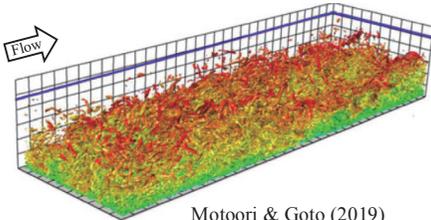
➤ 航空機を用いた実証試験において、約2%の燃費向上効果

リブレットフィルム(3M)

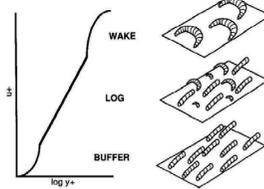


Viswanath, *PAS* (2002)

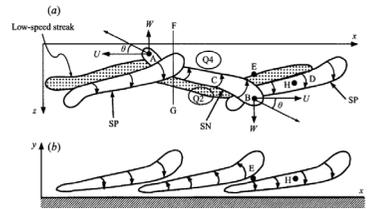
➤ 壁面せん断乱流中の秩序渦構造



Motoori & Goto (2019)



Robinson (1991)

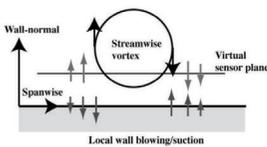


Jeong *et al.*, *JFM* (1997)

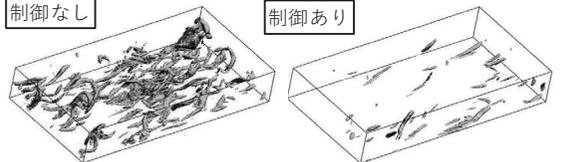
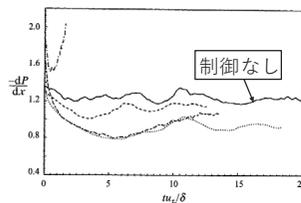
➤ Opposition制御 (Choi, Moin & Kim, 1994)

→ 縦渦(流れ方向渦)を打ち消すように壁面上の吹き出し・吸い込みを制御

同流量の流れを駆動する圧力勾配



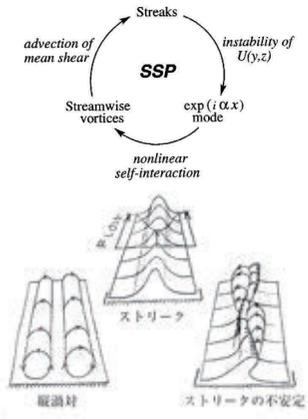
笠木, なかれ (2006)より



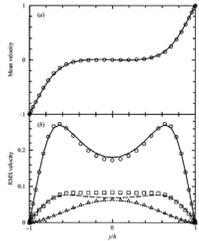
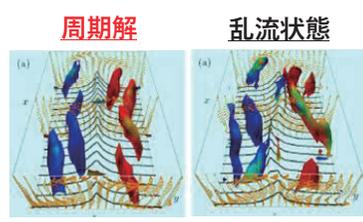
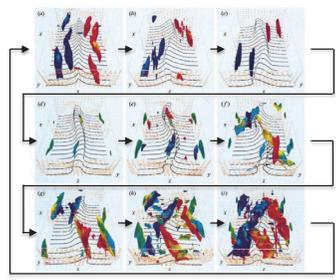
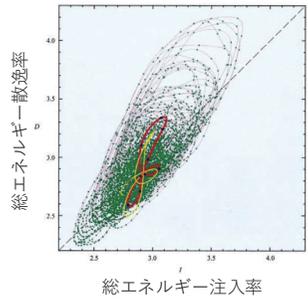
Hammond *et al.*, *PoF* (1998)

壁面乱流の自己維持機構  
(SSP: Self-Sustaining Process)

平面Couette乱流に埋め込まれた周期運動(時間周期解)  
Kawahara & Kida, *JFM* (2001)

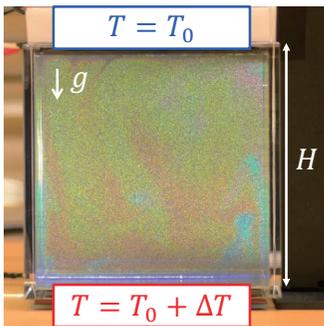


Waleffe, *PoF* (1997)  
(下図は「乱流の科学」(日野)より)



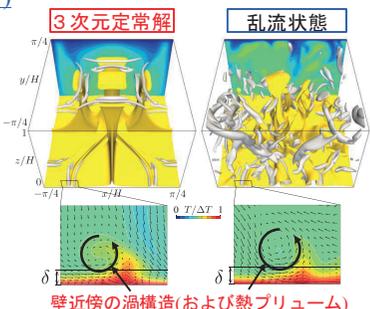
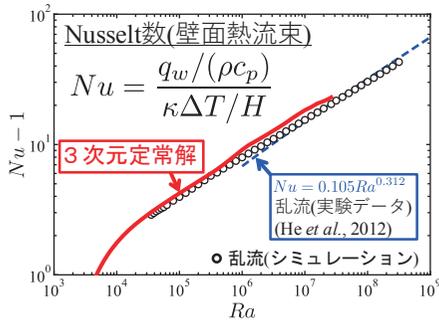
記号: 周期解  
線: 乱流状態

熱対流乱流と Boussinesq 方程式の不変解



Rayleigh-Bénard 対流における 3次元定常解

Motoki, Shimizu & Kawahara, *JFM* (2021)



Rayleigh数

$$Ra = \frac{g \alpha \Delta T H^3}{\nu \kappa}$$

Prandtl数

$$Pr = \frac{\nu}{\kappa}$$

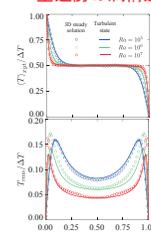
- $\rho$  : 密度
- $c_p$  : 定圧比熱
- $\alpha$  : 体積膨張係数
- $\nu$  : 動粘性係数
- $\kappa$  : 温度拡散係数

Boussinesq 方程式

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \nabla^2 \mathbf{u} + g \alpha T e_z$$

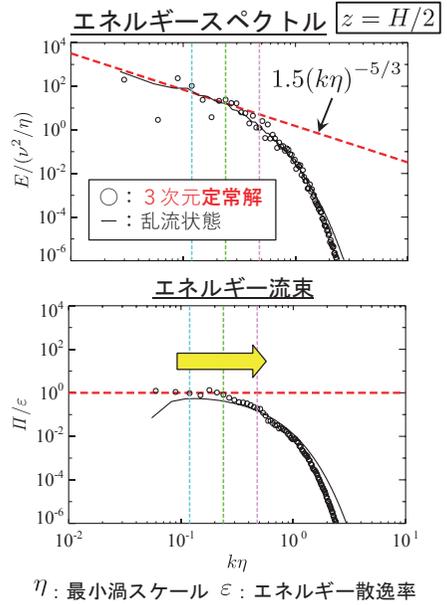
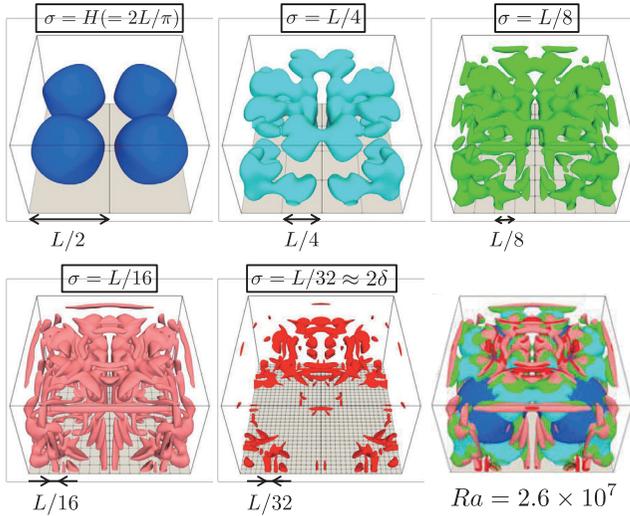
$$\frac{\partial T}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) T = \alpha \nabla^2 T$$



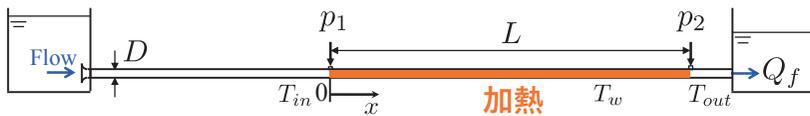
○ : 3次元定常解  
- : 乱流状態

3次元定常解における渦の階層構造

$\sigma$  : 粗視化スケール



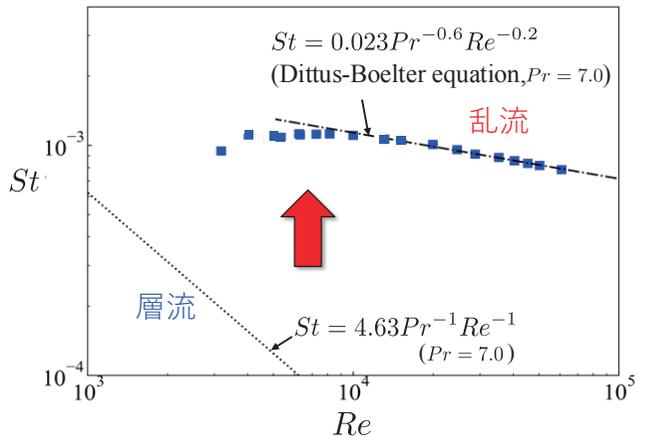
乱流熱伝達

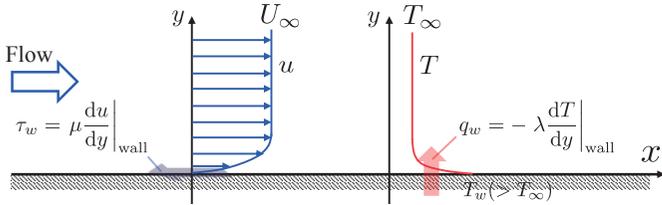


Stanton数

$$St = \frac{q_w}{\rho c_p u_b \Delta T} = \frac{Nu}{Pr Re}$$

- $q_w = \rho Q_f c_p (T_{out} - T_{in}) / A_h$  : 壁面熱流束
- $T_{in}$  : 流路入口温度
- $T_{out}$  : 流路出口温度  $\Delta T = T_w - T_b$
- $T_w$  : 壁面温度
- $T_b = T_{in} + (T_{out} - T_{in})x / L_h$  : 管内平均温度
- $A_h$  : 伝熱面積
- $L_h$  : 加熱部長さ





摩擦係数  
(無次元壁面摩擦応力)

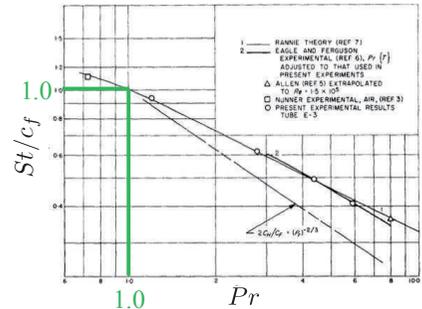
$$c_f = \frac{\tau_w}{\rho U_\infty^2}$$

Stanton数  
(無次元壁面熱流束)

$$St = \frac{q_w}{\rho c_p U_\infty (T_w - T_\infty)}$$

➤ 乱流熱伝達において

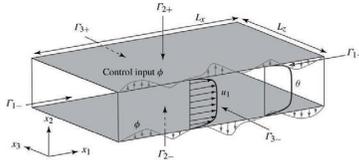
$$St \sim Pr^{-2/3} c_f \quad (\text{Chilton \& Colburn, 1934})$$



Dipprey et al., *IJHMT* (1963)

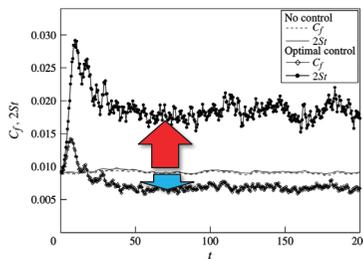
壁面吹き出し・吸い込みによる乱流熱伝達の制御

➤ 最適フィードバック制御 (Yamamoto, Hasegawa & Kasagi., *JFM*, 2013)



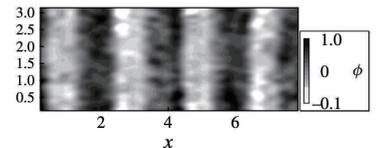
目的関数

$$J = \kappa \int_0^T \int_{\Gamma_{2\pm}} \frac{1}{2} \phi^2 dS dt - A \quad A = \frac{2St}{C_f}$$



➤ 最適制御入力

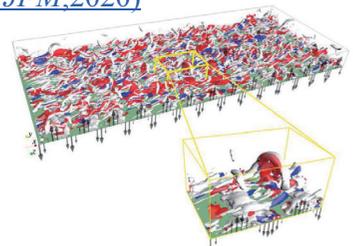
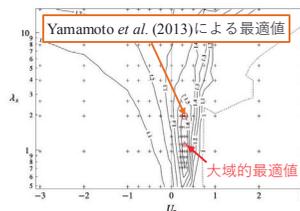
(壁面上での壁垂直方向速度)

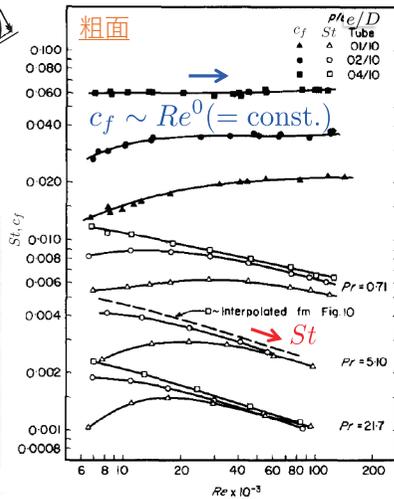
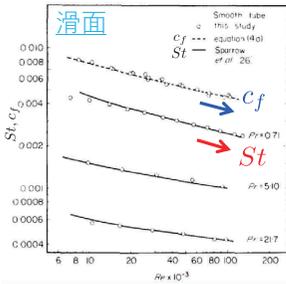
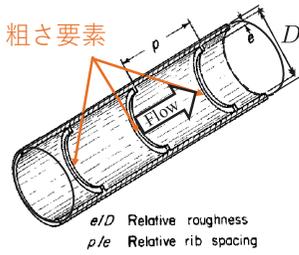


➤ 定常進行波状壁面吹き出し・吸い込み (Kaithakkal et al., *JFM*, 2020)

壁面上での壁垂直方向速度

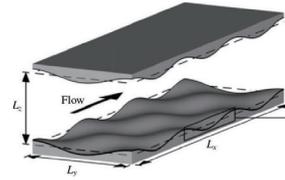
$$v_w = \phi \sin \left\{ \frac{2\pi}{\lambda_x} (x - U_p t) \right\}$$



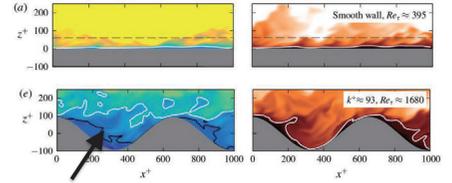


Webb, Eckert & Goldstein, *JHMT* (1971)

MacDonald et al., *JFM* (2019)



流れ方向速度 温度



流れの剥離 ⇨ 圧力損失

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$$

$$\partial_t \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \nabla^2 \mathbf{u} + f e_x$$

$$\partial_t T + (\mathbf{u} \cdot \nabla) T = \kappa \nabla^2 T + q$$

Taylorの散逸則と究極熱伝達

$$c_f \sim Re^0$$

流れのエネルギー散逸率  $\epsilon$  が流体の動粘性係数  $\nu$  に依存しないとき

$$\epsilon \sim \frac{U^3}{L}$$

**Taylorの散逸則**

円管内乱流において、

$$c_f = \frac{D/2 \Delta p}{\rho U^2 l} = \frac{\epsilon}{U^3/(D/2)} \sim Re^0$$

✓ 粗面乱流において観測される

$$St \sim Re^0$$

壁面熱流束  $q_w$  が流体の温度拡散係数  $\kappa$  に依存しないとき

$$\frac{q_w}{\rho c_p} \sim U \Delta T$$

**究極熱伝達**

円管内乱流において、

$$St = \frac{q_w/(\rho c_p)}{U \Delta T} \sim Re^0$$

✓ 粗面を含む通常の壁面せん断乱流では未だ達成されていない

$U, \Delta T, L$  : (流体の粘性率と熱伝導率に依らず)流れを特徴付ける代表速度, 代表温度差, 代表長さ

究極スケージング (究極熱伝達)

$Nu \sim Pr^{1/2} Ra^{1/2}$  Spiegel (1963), Kraichnan (1962)

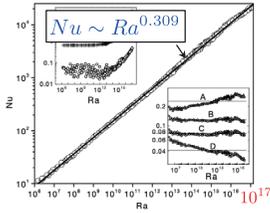
Chillà et al. (2012)	Ra	Pr	H	$\Gamma$
Mantle convection [9]	$10^7-10^9$	$10^{23}$	700 km	54
Deep oceanic convection [10]	$10^{24}-10^{27}$	7	1-4 km	$10^2-10^3$
Processor cooling device	$10^6$	0.7	1-10 cm	1
Indoor ventilation	$10^8-10^{10}$	0.7	1-10 m	1-10
Shallow moist convection [11]	$10^{18}$	0.7	2 km	$10^2$
Deep moist convection	$10^{22}$	0.7	10 km	$10^2$
Solar convection zone [12,13]	$10^{20}-10^{24}$	$10^{-7}-10^{-3}$	$2 \times 10^5$ km	10



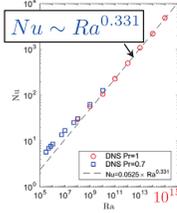
Ref: NASA

古典スケージング

$Nu \sim Ra^{1/3}$  Priestley (1954), Malkus (1954)

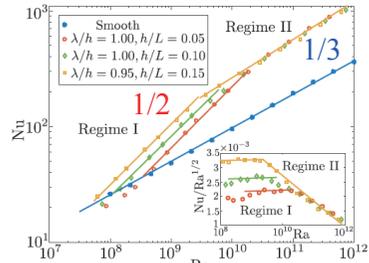
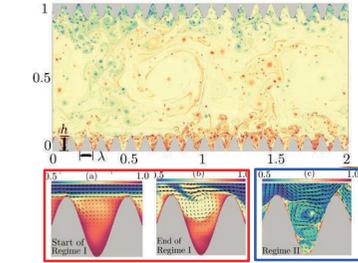


Niemela et al., Nature (2000, 実験)



Iyer et al., PNAS (2020, DNS)

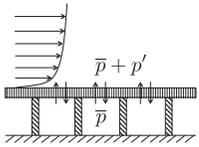
粗面間熱対流乱流 Zhu et al., PRL (2017)



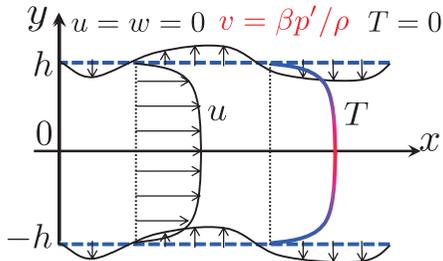
透過壁面による乱流熱伝達の制御

透過壁面条件 Jiménez et al., JFM (2001)

✓ 多孔質壁面を模した単純な境界条件



$v|_{\text{wall}} = -\beta p' / \rho$   
 $\beta = 0$  : 非貫通  
 $\beta \rightarrow \infty$  : 完全貫通  
 $\beta$  : 透過率(Permeability)



$u = w = 0 \quad v = -\beta p' / \rho \quad T = 0$

➢ 水平方向には周期境界条件

支配方程式

$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$  : 連続の式  
 $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \nabla^2 \mathbf{u}$  : Navier-Stokes方程式  
 $\frac{\partial T}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) T = \frac{q}{\rho c_p} + \kappa \nabla^2 T$  : エネルギー方程式

Reynolds数

$Re = \frac{2hU_b}{\nu}$

Prandtl数

$Pr = \frac{\nu}{\kappa} = 1$

無次元透過率

$\beta u_b$

$u_b$  : バルク平均速度

Stanton数

$St = \frac{2q_w}{\rho c_p u_b T_b} = 2 \frac{u_\tau T_\tau}{u_b T_b}$

摩擦係数

$c_f = \frac{2\tau_w}{\rho u_b^2} = 2 \frac{u_\tau^2}{u_b^2}$

$T_\tau = \mp (\kappa / u_\tau) d\langle T \rangle_{xz,t} / dy|_{y=\pm h}$        $u_\tau = (\mp \nu d\langle u \rangle_{xz,t} / dy|_{y=\pm h})^{1/2}$

エネルギー収支式 ✓追加のエネルギー注入を必要としない

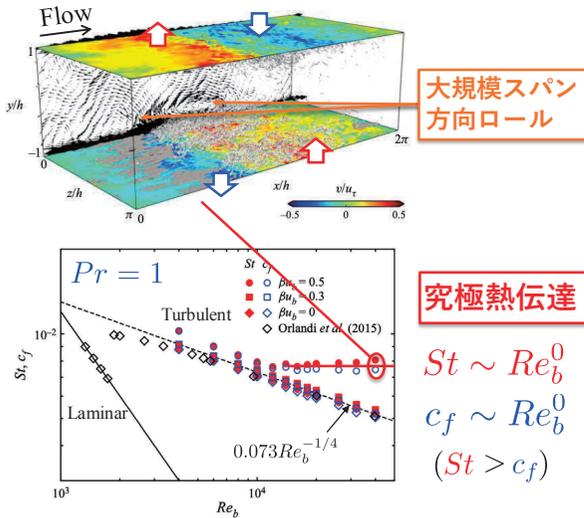
$-\frac{1}{\rho} \left\langle \frac{\partial p}{\partial x} \right\rangle_t = \varepsilon + \frac{\langle v^2 \rangle_{xz,t}|_{y=-h}}{\beta h} + \frac{-\langle v^3 \rangle_{xz,t}|_{y=-h}}{2h}$

positive(comparable)      positive(small)

# 透過壁面せん断乱流における究極熱伝達

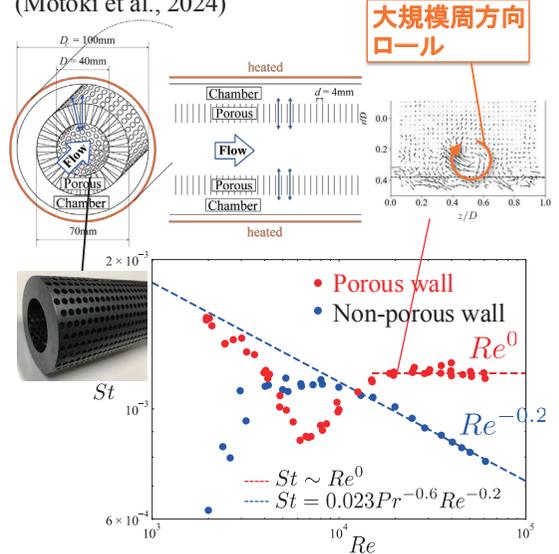
## DNS: 透過壁面チャンネル乱流

(Motoki, Tsugawa, Shimizu, Kawahara, *JFM*, 2022)



## 実験: 多孔質壁面円管内乱流

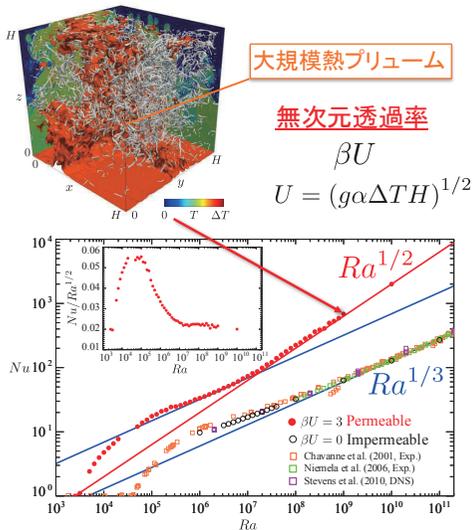
(Motoki et al., 2024)



# 透過壁面間熱対流乱流における究極熱伝達

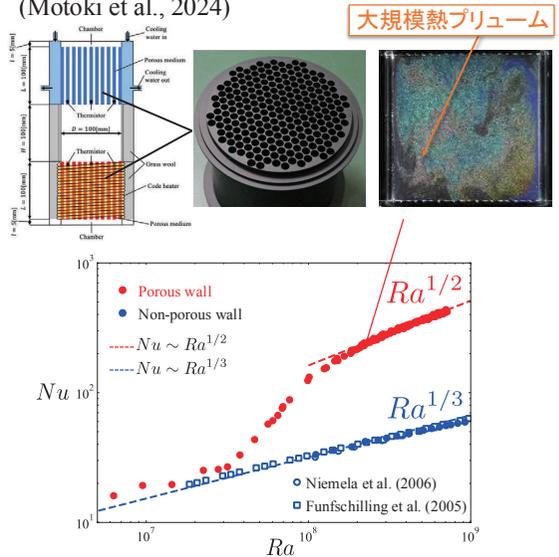
## DNS: 透過壁面間熱対流乱流

(Kawano, Motoki, Shimizu, Kawahara, *JFM*, 2021)



## 実験: 多孔質壁面熱対流乱流

(Motoki et al., 2024)



# 透過壁面間熱対流における3次元定常解

Motoki Shimizu, Kawahara, *Philos. Trans. Royal Soc. A* (2022)

$\beta U = 3$  : 透過壁

$\beta U = 0$  : 非透過壁

Boussinesq方程式

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \nabla^2 \mathbf{u} + g\alpha T e_z$$

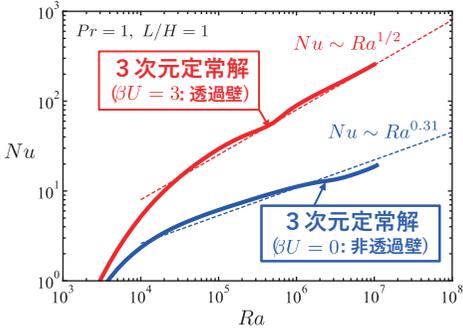
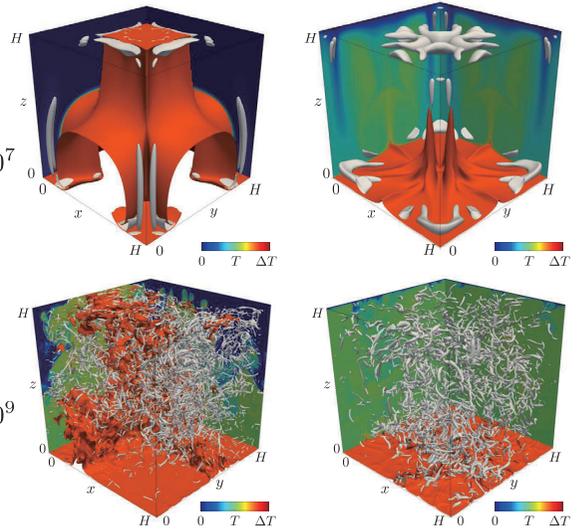
$$\frac{\partial T}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) T = \kappa \nabla^2 T$$

3次元定常解

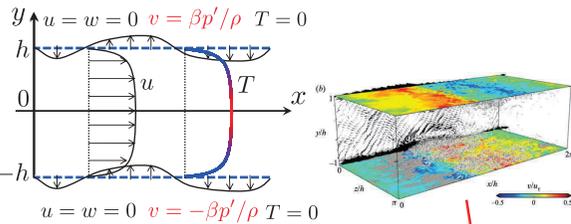
$Ra = 10^7$

乱流

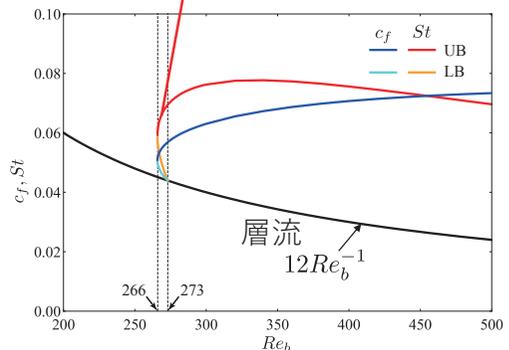
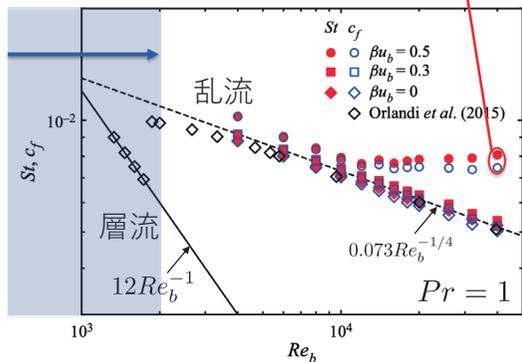
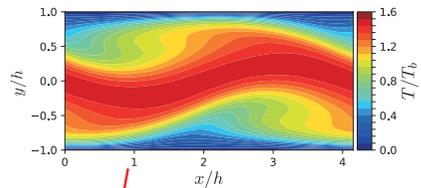
$Ra = 10^9$



# 透過壁面せん断流における定常進行波解



低 $Re_b$ 域において定常進行波解が出現



### 上界と最大熱伝達

#### 背景場法による上界 (Doering & Constantin, 1992)

$$Nu \leq 1 + \frac{1}{2} \int_0^1 \left( 1 + \frac{H}{\Delta T} \frac{d\tau(z)}{dz} \right)^2 d\left(\frac{z}{H}\right)$$

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \begin{matrix} U(z) \\ = 0 \end{matrix} + \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$$

$$T(\mathbf{x}, t) = \begin{matrix} \tau(z) \\ = 0 \end{matrix} + \theta(\mathbf{x}, t)$$

背景場 変動

$$\Rightarrow Nu \leq 0.02634 Ra^{1/2} + 1$$

Plasting & Kerswell, *JFM* (2003)

#### 最大熱伝達

maximize  $Nu$   
subject to

$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$  : 連続の式

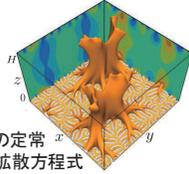
$(\mathbf{u} \cdot \nabla)T = \kappa \nabla^2 T$  : 温度の定常  
移流拡散方程式

$\langle |\boldsymbol{\omega}|^2 \rangle_{xyz}^{1/2} H^2 / \kappa = \text{const.}$  : エンストロフィー定

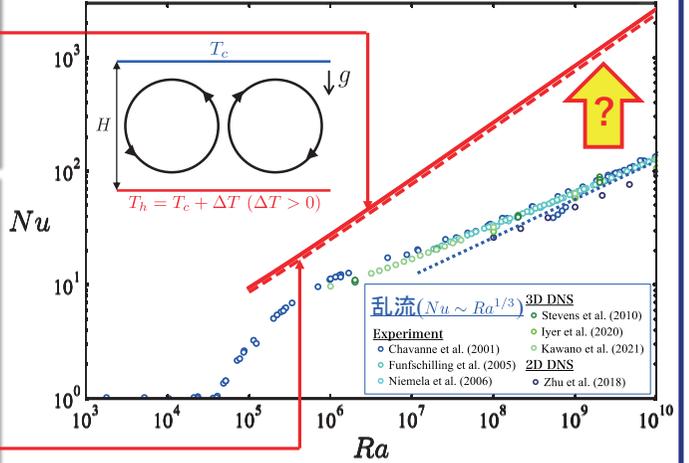
BCs

$$\Rightarrow Nu \approx 0.0236 Ra^{1/2} + 1$$

Motoki et al., *JFM* (2018)



✓ Rayleigh-Bénard対流における  
Nusselt数(壁面熱流束) $Nu$ とRayleigh数(壁面間温度差) $Ra$ の関係

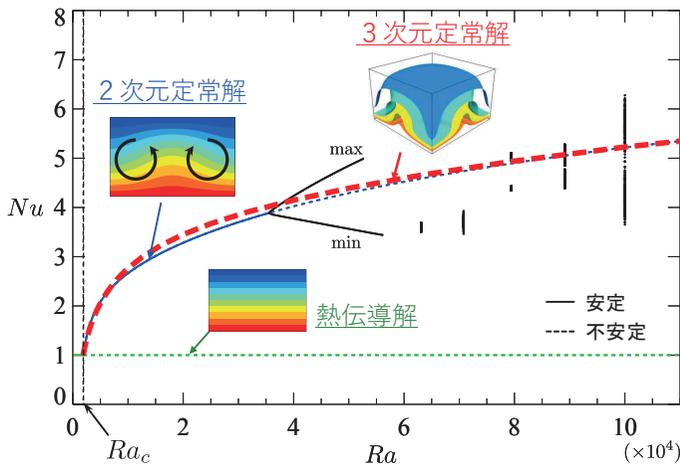


### 不変解における対流熱伝達の最適化

#### ► Boussinesq方程式(Navier-Stokes方程式)の定常解において対流熱伝達を最適化

2D: Waleffe et al. *PoF* (2015), Sondak et al., *JFM* (2015), Wen et al., *JFM* (2022)

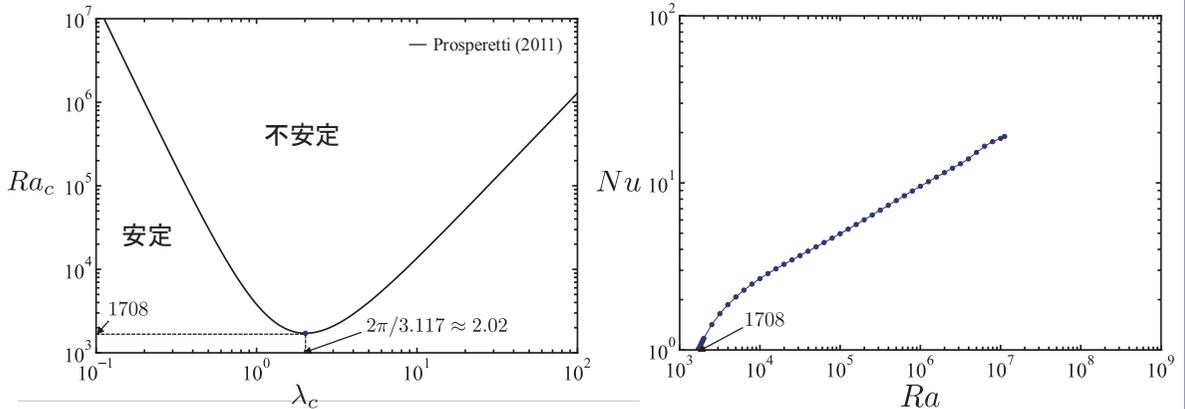
3D: Motoki, Deguchi, Shimizu & Kawahara (2024)



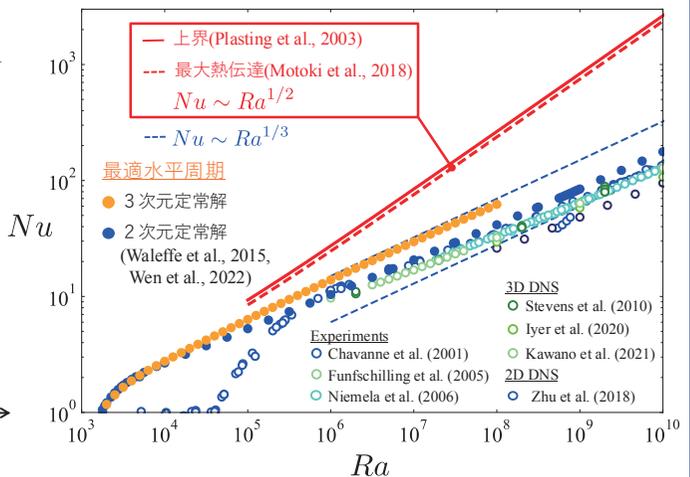
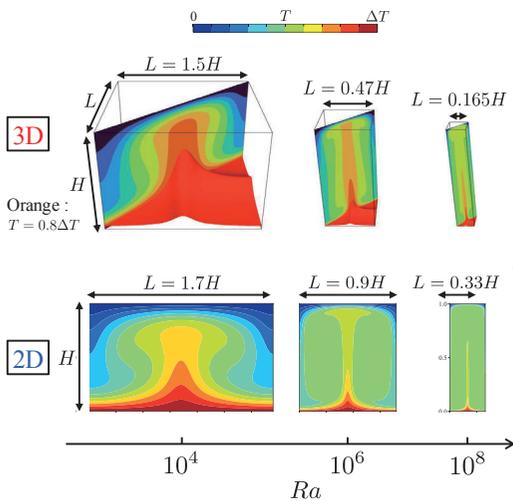
► Boussinesq方程式(Navier–Stokes方程式)の定常解において対流熱伝達を最適化

2D: Waleffe et al. *PoF* (2015), Sondak et al., *JFM* (2015), Wen et al., *JFM* (2022)

3D: Motoki, Deguchi, Shimizu & Kawahara (2024)



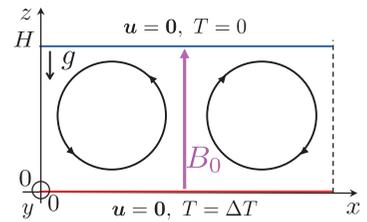
最適な水平周期を有する定常解



▶ 一様な鉛直磁場の作用する熱対流

支配方程式

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{u} &= 0 \\ \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} &= -\nabla p + \sqrt{\frac{Pr}{Ra}} (\nabla^2 \mathbf{u} + \underbrace{Ha^2 (\mathbf{j} \times \mathbf{e}_z)}_{\text{磁気力 (水平減衰力)}}) + T \mathbf{e}_z \\ \frac{\partial T}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) T &= \sqrt{\frac{1}{RaPr}} \nabla^2 T \\ \mathbf{j} &= -\nabla \phi + (\mathbf{u} \times \mathbf{e}_z) \\ \nabla^2 \phi &= \nabla \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{e}_z) \end{aligned}$$

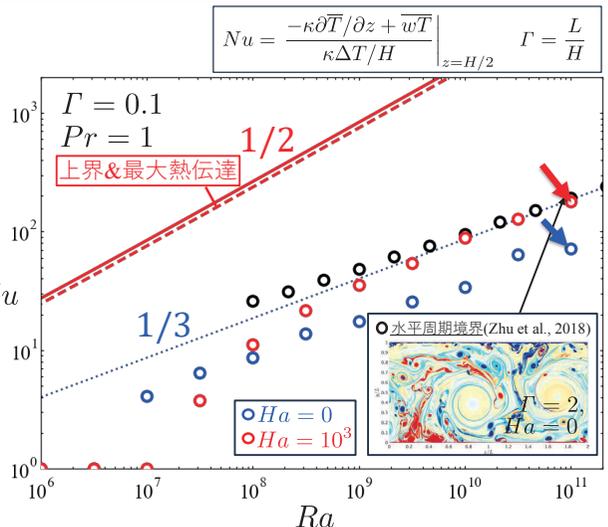
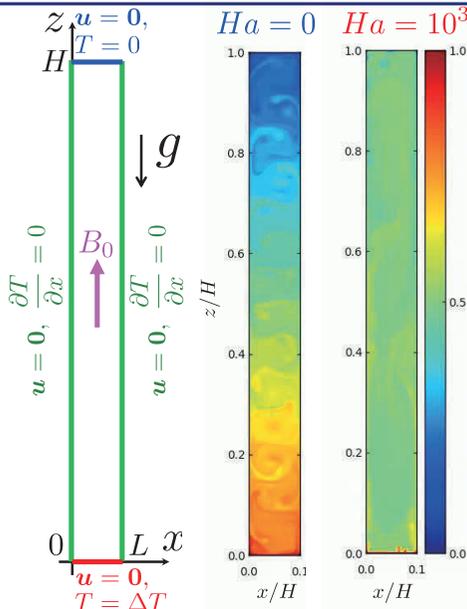


Rayleigh数      Prandtl数      Hartmann数

$$Ra = \frac{g\alpha\Delta TH^3}{\nu\kappa} \quad Pr = \frac{\nu}{\kappa} \quad Ha = B_0 H \sqrt{\frac{\sigma}{\rho\nu}} \left[ \begin{array}{l} B_0: \text{磁束密度} \\ \sigma: \text{電気伝導率} \\ \phi: \text{静電ポテンシャル} \end{array} \right]$$

- ▶ Lim et al., *JFM* (2019)
  - 適切なHaによって熱伝達が促進され得る(DNS, Pr = 8)
- ▶ Zürner et al., *JFM* (2019, 2020)
  - 液体金属(GaInSn合金, Pr = 0.029)を用いた実験

磁気力の作用する熱対流乱流



▶ 磁気力の印加により、側壁の拘束を強く受ける系(Γ = 0.1)において有意な伝熱促進効果



□透過壁面による乱流熱伝達の制御

- 壁面に透過性を導入することで、強制対流・自然対流のどちらにおいても究極熱伝達( $St \sim Re_b^0, Nu \sim Ra^{1/2}$ )を達成し得る
- **低Reynolds数域においても顕著な伝熱促進効果**

□不変解における対流熱伝達の最適化

- 熱対流において、最適な水平周期を有する定常解は乱流状態よりも高い熱伝達を示す

□磁気力による乱流熱伝達の制御

- 鉛直磁場に起因する磁気力(水平減衰力)により、鉛直方向の流動が促進し対流熱伝達が向上
- **伝熱面形状と付加的外力を最適化**することで、顕著な乱流制御・伝熱促進効果

# PINNsを活用した流体データ同化

三坂 孝志（産業技術総合研究所）

## 1. はじめに

支配方程式を拘束条件として学習を行う「物理に基づくニューラルネットワーク (Physics-informed neural network, PINN)」は、入出力を近似する代替モデルであると同時に、学習データを必ずしも必要としないため支配方程式の近似解を求める手法にもなっている[1]. 近年、機械学習技術を用いた科学技術計算のアプローチとして様々な対象への応用が行われている[2]. PINNの学習では支配方程式の微分項を評価する際に、PyTorchなどの機械学習フレームワークに備わっている自動微分機能を利用している. 一方、随伴変数法 (アジョイント法) による感度情報を利用した最適化やデータ同化は長く行われてきているが、近年、Taich[3]やNVIDIA Warp[4]など微分情報を比較的容易に利用可能な数値シミュレーションフレームワークが開発されている (Differentiable simulation). 本発表ではSlide 2に示すように、支配方程式の弱拘束 (PINN) および強拘束 (随伴変数法) による微分 (感度) 情報を用いたデータ同化という切り口で事例を紹介する.

## 2. PINNを用いたデータ同化

データ同化は実空間の観測データを用いて、仮想 (計算) 空間の数値シミュレーションにおける不確かな条件・パラメータを学習する手法である. アンサンブルカルマンフィルタや4次元変分法などのデータ同化手法が提案されているが、アンサンブル計算による計算コスト増大やアジョイントコード開発など、利用の際の障壁は小さくない (Slide 4). そこで本研究ではPINNを用いたデータ同化を検討する (Slide 5). PINNはRaissiらの2019年の論文で提案され、その論文の引用数の急増から多くの分野に影響を与えていると考えられる (Slide 6). PINNはPyTorchなどの機械学習フレームワークを用いて比較的簡単に実装することができるためデータ同化を容易にすると期待されるが、全結合ネットワークを用いて素直に実装されたPINNでは単純な低レイノルズ数円柱まわり流れを再現することも難しい場合がある (Slide 7). 特によどみ点圧力や流量保存のような数値シミュレーションにおける基本的な条件も、個別に拘束を加えなければ精度良く再現することができない. それらの改善のために様々なPINN手法が提案されている.

本研究では発想を転換し、データ同化への適用を前提として数値シミュレーション結果と観測データの差に対してPINNモデルを構築する. これにより、数値シミュレーション結果を観測データに近づけるための境界条件やパラメータの修正にPINNの微分情報を用いる. ベースとなる流れ場自体は数値シミュレーションによって得られているため、PINN単体による流れ場の再現に腐心する必要性が減ると期待される. この数値シミュレーションとPINNの重ね合わせの模式図を、一次元ポアソン方程式に関してSlide 8に示す. データ同化手法としては、アンサンブルカルマンフィルタや粒子フィルタなどのアンサンブル手法に対して、本アプローチは随伴方程式を用いた勾配法に分類できると考えられる (Slide 9). 通常、4次元変分法などのデータ同化手法では随伴方程式や対応する随伴コードが必要になるが、本アプローチではまず数値シミュレーションと観測データの差をPINNモデルで近似し、機械学習フレームワークの自動微分を用いて得た勾配情報を利用することになる. Slide 10に示すように本アプローチの利点はいくつか挙げられるが、PINN構築のための学習時間は課題となる.

本研究ではマルチブロック直交格子フレームワーク (Building Cube Method, BCM) [5]において、並列処理を行うマルチブロック領域毎にPINNを構築するアプローチを検討した (Slide 11). PINNには全結合ネットワークおよびtanh活性化関数を用い、PyTorchを用いて実装した. 支配方程式の残差および境界条件などからなる損失関数の最小化にはAdamを用いた. 解析においてはBCMフレームワーク[6]をFortranで扱い、

PINN部分をPyTorchで処理するためにForpy[7]を利用した。MPI並列はBCMフレームワーク側で扱い、各GPUにCubeを配分する[8]。Slide 12に示すように、隣接Cube間のPINNの接続はFinite basis physics-informed neural networks (FBPINNs)を用いて行う[9]。FBPINNsではCubeの重合領域で加算後の値が1となる微分可能な重み関数を考え、ニューラルネットワークの出力にその重み関数をかけて学習を行う。これによりCube境界で滑らかに接続されたPINNの出力が得られる。重合領域ではPINNの予測値やその微分値が使われるが、これらの量はそれぞれの分割領域のネットワークパラメータから計算することができることから、本研究では隣接Cube間でネットワークパラメータをやりとりした。FBPINNsは単に領域分割による並列化にとどまらず、素朴に実装されたPINNでは高周波現象の近似が難しいという難点に対して、領域分割によって1つのニューラルネットワークが扱う実効周波数を小さくして近似精度を向上させる効果がある。Slide 13に4分割した領域で二次元ラプラス方程式を解いた例を示す。

PINNを用いたデータ同化問題として、流れ場に埋め込まれた多孔質媒体に起因する巨視的抗力係数の推定を考える。Slide 14は単位直径の円柱が正方形断面の流路に埋め込まれた計算領域を示している。ここではレイノルズ数を200に設定している。多孔質媒体は円柱の後流に示される直径0.5の球状領域内に定義される。多孔質媒体に誘起される抗力は、流速に比例するようにモデル化する。多孔質媒体の抗力の大きさを制御する係数と対応する流れ場は、参照となる有限差分を真値として、そこから空間的な間引きによって抽出された擬似観測値に基づいて推定される。前述のようにPINNの損失関数は観測値と多孔質媒体を含まない有限差分との差に対して構築される(Slides 15-16)。すなわち、非圧縮性ナビエ・ストークス方程式の流れ変数 $\mathbf{u} = (u, v, w, p)^T$ を $\mathbf{u} = \mathbf{u}_F + \mathbf{u}_P$ と分解する。分解した変数を非圧縮性ナビエ・ストークス方程式に代入し、 $\mathbf{u}_F$ が多孔質媒体を含まない非圧縮性ナビエ・ストークス方程式を満たすと仮定することで、観測値と有限差分の差に対する $\mathbf{u}_P$ の方程式を得てPINNの学習に用いる。これによりPINN単体では再現の難しい流れ場を対象としつつ、PINNを用いた様々な推定を行うことができる。また、BCMフレームワークを活用することで、時空間適応的にPINNモデルを構築することも期待できる。

Slide 18に主流方向速度の断面分布の比較を示す。(a)は有限差分 $\mathbf{u}_F$ にPINN解 $\mathbf{u}_P$ を重畳した流れ場 $\mathbf{u}_F + \mathbf{u}_P$ 、(b)は擬似観測値と有限差分の差に対して抗力係数を推定しつつ構築したPINN解 $\mathbf{u}_P$ である。一方、(c)は真値として用いた有限差分、(d)は(c)から多孔質領域の無い流れ場を差し引いたPINNで予測すべき流れ場であり、(b)と比較する場である。Slide 19に多孔質媒体の抗力係数の推定履歴と損失関数の履歴を示す。真値に近い抗力係数が推定されていることが確かめられる。乱流モデルを用いた高レイノルズ数流れへの適用に関しても当日発表を行ったが、本資料からは除いている。

### 3. 随伴変数法とDifferentiable Simulation

データ同化手法として数値気象予測にも長く利用されている4次元変分法は、Sasakiによってその基礎が提案された(Slide 21)。偏微分方程式の最適制御法として随伴変数法(アジョイント法)を導入することにより、大規模気象モデルに4次元変分法を適用することが可能になった(Slide 22)。アジョイント法は形状最適化などにも用いられており、航空分野ではJamesonらによって翼最適設計への応用が行われている(Slide 23)。データ同化への応用としては、数値気象予測に加えて、航空機のフライトデータに基づく晴天乱気流の推定が行われている(Slide 24)。近年、自動微分による微分情報を利用可能な数値シミュレーションフレームワークによるDifferentiable Simulationが行われている(Slide 25)。これらのDifferentiable SimulationフレームワークはPyTorchなどの機械学習フレームワークと同様の使用感を実現しており、さらに機械学習フレームワークとの組み合わせも可能であるため、シミュレーションモデルとニューラルネットワークを直接つないだシステムも構築可能である。Slide 26および27にNvidiaの資料から引用した各種フレームワークの比較を示す。当日の発表ではインフレータブル構造体のシミュレーションモデルと圧力制御用のニューラルネットワークをつないだシステムを紹介したが、本資料からは除いている。

#### 4. おわりに

機械学習との関わりからPINNやDifferentiable Simulationなど微分情報を活用した数値シミュレーションが盛んになってきている。発表ではPINNを大規模流体問題に適用するための並列化や数値シミュレーションとの併用の可能性を述べた。また、Differentiable Simulationフレームワークの活用にも述べた。

#### 参考文献

- [1] Raissi, M., Perdikaris, P., Karniadakis, G.E., Physics-informed neural networks: A deep learning framework for solving forward and inverse problems involving nonlinear partial differential equations, *Journal of Computational Physics*, Vol. 378, pp. 686-707, 2019.
- [2] 白鳥英, 中村耀, 杉原伊織, Physics-Informed Neural Network の研究動向と液膜流れの問題への適用例, *人工知能学会誌*, Vol. 38, pp. 335-344, 2023.
- [3] Taichi Lang: High-performance parallel programming in Python, <https://www.taichi-lang.org/>.
- [4] NVIDIA Warp, <https://developer.nvidia.com/warp-python>.
- [5] Nakahashi, K., High-density mesh flow computations with pre-/post-data compressions, 17th AIAA Computational Fluid Dynamics Conference, AIAA Paper 2005-4876, 2005.
- [6] Misaka, T. Space-time adaptive model order reduction utilizing local low-dimensionality of flow field. *Journal of Computational Physics*, Vol. 493, p. 112475, 2023.
- [7] Forpy: A library for Fortran-Python interoperability, <https://github.com/ylikx/forpy>.
- [8] Misaka, T., Mizuno, Y., Nakasumi, S., Furukawa, Y., Domain-decomposed physics-informed neural network prediction on Cartesian CFD framework, *International Conference on Scientific Computing and Machine Learning 2024*, 2024.
- [9] Moseley, B., Markham, A., Nissen-Meyer, T., Finite basis physics-informed neural networks (FBPINNs): a scalable domain decomposition approach for solving differential equations, *Advances in Computational Mathematics*, Vol. 49, p. 62, 2023.

# PINNsを活用した流体データ同化

三坂 孝志 (産業技術総合研究所)

九州大学マス・フォア・インダストリ研究所  
 一般研究-研究集会 (I) 「自動車性能の飛躍的向上を目指すData-Driven設計」  
 2024年10月8日

## 目次

### Physics-Informed Neural Network (PINN)

$$MSE = \frac{1}{N_u} \sum_{i=1}^{N_u} |u(t_u^i, x_u^i) - u^i|^2 + \frac{1}{N_f} \sum_{i=1}^{N_f} |f(t_f^i, x_f^i)|^2$$

初期・境界条件からの誤差

支配方程式の残差

速い!

支配方程式で緩く拘束して学習し、予測は深層ニューラルネットワーク

### Differentiable Simulation, アジョイント法, 4次元変分法

$$J(x_0) = \frac{1}{2} \sum_{t=0}^T [y_t - h(x_t)]^T R_t^{-1} [y_t - h(x_t)] + \frac{1}{2} (x_0 - x_b)^T B^{-1} (x_0 - x_b)$$

モデル予測と計測の差

推定したい場に近い場 (正則化項)

物理モデルに従う

支配方程式で強く拘束して学習し、予測はシミュレーションモデル

## 目次

### Physics-Informed Neural Network (PINN)

$$MSE = \frac{1}{N_u} \sum_{i=1}^{N_u} |u(t_u^i, x_u^i) - u^i|^2 + \frac{1}{N_f} \sum_{i=1}^{N_f} |f(t_f^i, x_f^i)|^2$$

初期・境界条件からの誤差      支配方程式の残差

速い!

支配方程式で緩く拘束して学習し、予測は深層ニューラルネットワーク

### Differentiable Simulation, アジョイント法, 4次元変分法

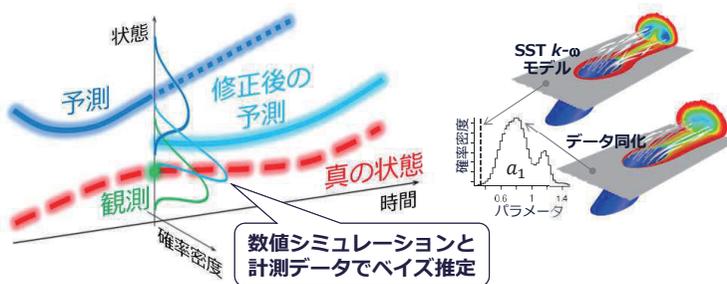
$$J(x_0) = \frac{1}{2} \sum_{t=0}^T [y_t - h(x_t)]^T R_t^{-1} [y_t - h(x_t)] + \frac{1}{2} (x_0 - x_b)^T B^{-1} (x_0 - x_b)$$

モデル予測と計測の差      推定したい場に近い場 (正則化項)

物理モデルに従う

支配方程式で強く拘束して学習し、予測はシミュレーションモデル

## データ同化

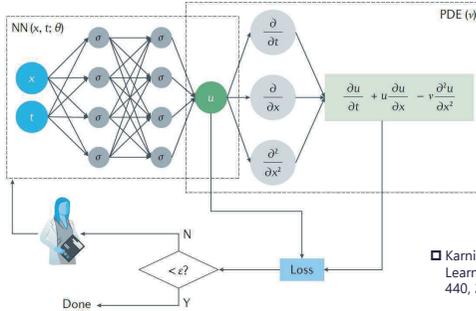


### 課題(?)

- ◆ 手間が多い (シミュレーションコードの修正, データ同化コード)
- ◆ 計算コストが増える (アンサンブル計算, アジョイント計算の繰り返しなど)
- ◆ 特定の目的に合わせてシステム構築 (汎用性低め)

# Physics-Informed Neural Network (PINN)

## ➤ PINNのネットワーク構造



## PINNの損失関数

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{BC/IC} + \mathcal{L}_{PDE}$$

学習点における  
支配方程式の残差

初期・境界条件、観測  
データ等からの誤差

□ Karniadakis, G.E., et al., Physics-Informed Machine Learning, Nature Reviews Physics, Vol. 3, pp. 422–440, 2021.

- ◆ 代替モデルであり、支配方程式の近似解法でもある
- ◆ 順問題に加えて逆問題の解析が容易
- ◆ GPU・機械学習フレームワークなどのハード・ソフト資産を有効活用

# PINNの勢い

## 1. はじめに

本稿では、偏微分方程式で記述される物理シミュレーションの分野で最近注目されている Physics-Informed Neural Networks (PINNs) [Raissi 19] を紹介する。PINNs は物理現象の支配方程式を教師とした機械学習法であり、ブラウン大学の Prof. Karniadakis の研究グループから提案された。査読誌 J. Comp. Phys. への掲載は 2018 年 11 月であったが、査読前の論文が arXiv に投稿された 2017 年 11 月の時点から注目を集めていたようである。2023 年 2 月時点での引用数は、Scopus で 2,400 回以上、Google Scholar で 5,000 回以上に達しており、さまざまな分野に活用されている。白鳥ら, 人工知能学会誌, 2023.



**Maziar Raissi**  
Assistant Professor of Applied Mathematics, University of Colorado Boulder  
種別したメールアドレス: colorado.edu、ホームページ  
Applied Mathematics Statistics Economics Finance

タイトル

2023年7月頃

Physics-informed neural networks: A deep learning framework for solving forward and inverse problems involving nonlinear partial differential equations  
M Raissi, P Perdikaris, GE Karniadakis  
Journal of Computational physics 378, 686-707

Hidden fluid mechanics: Learning velocity and pressure fields from flow visualizations  
M Raissi, A Yazdani, GE Karniadakis  
Science 367 (6481), 1026-1030

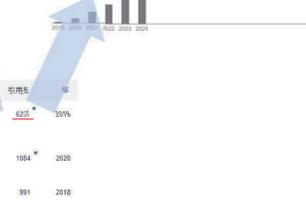
Hidden physics models: Machine learning of nonlinear partial differential equations  
M Raissi, GE Karniadakis  
Journal of Computational Physics 367, 125-141

## Physics-informed neural networks: A deep learning framework for solving forward and inverse problems involving nonlinear partial differential equations

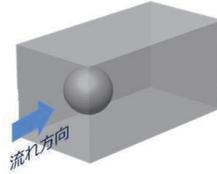
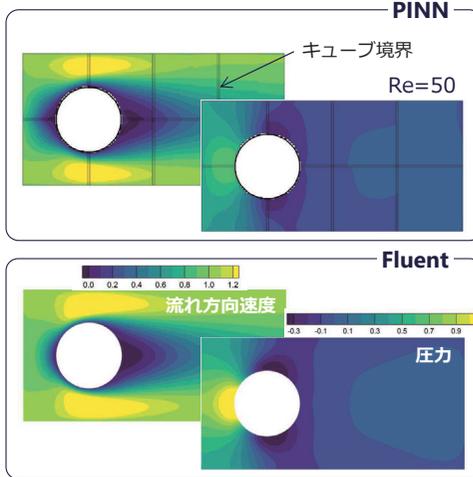
著者: Maziar Raissi, Paris Perdikaris, George E. Karniadakis  
公開日: 2019/2/1  
誌名: Journal of Computational physics  
巻: 378  
ページ: 686-707  
出版社: Academic Press

要約: We introduce physics-informed neural networks – neural networks that are trained to solve supervised learning tasks while respecting any given laws of physics described by general nonlinear partial differential equations. In this work, we present our developments in the context of solving two main classes of problems: data-driven solution and data-driven discovery of partial differential equations. Depending on the nature and arrangement of the available data, we describe two distinct types of algorithms, namely continuous time and discrete time models. The first type of models forms a new family of data-efficient spatio-temporal function approximators, while the latter type allows the use of arbitrarily accurate implicit Runge-Kutta time stepping schemes with untruncated number of stages. The effectiveness of the proposed framework is demonstrated through a collection of classical problems in fluids, quantum ...

総被引用数: 10278  
2024年8月頃



## PINNによる3次元流れ場解析の難しいところ



- ▶ よどみ点圧力が異なる
- ▶ 流量保存も拘束が必要
- ▶ 学習時間もかかる
- ▶ いろいろ難しい...

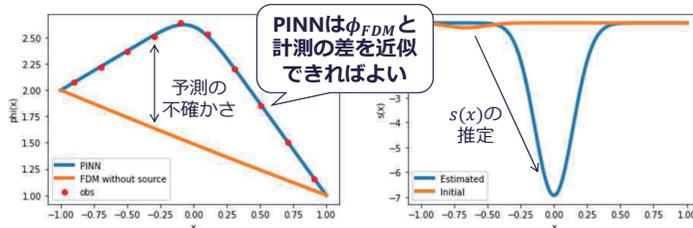
## 数値シミュレーション結果との重ね合わせ?

- ▶ PINN単体では複雑な流れ場の再現が難しい? (少なくとも標準的なPINNでは)
- ▶ 一方でPINNの推定・最適化能力は利用したい (楽々データ同化?)

→ 数値シミュレーションと計測データの差に関してPINNモデルを構築

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = s(x) \rightarrow \frac{\partial^2 \phi_{FDM}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi_{PINN}}{\partial x^2} = s(x) \rightarrow \mathcal{L}_{PDE} = \frac{\partial^2 \phi_{PINN}}{\partial x^2} - s(x)$$

$$\phi_{FDM}(-1) = 2, \phi_{FDM}(1) = 0, \phi_{PINN}(-1) = \phi_{PINN}(1) = 0$$



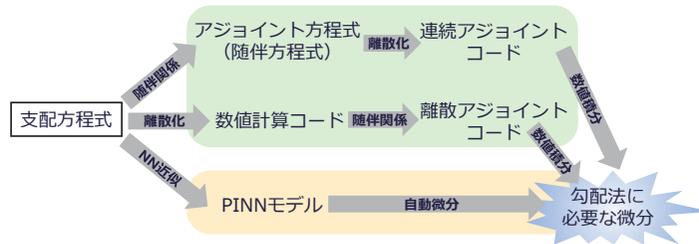
## データ同化手法としての位置づけ

### アンサンブル法 (逐次型データ同化)

アンサンブルカルマンフィルタ, 粒子フィルタなど

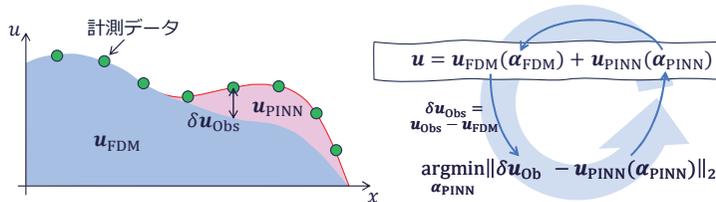
### 勾配法 (変分型データ同化)

4次元変分法など



## 目的

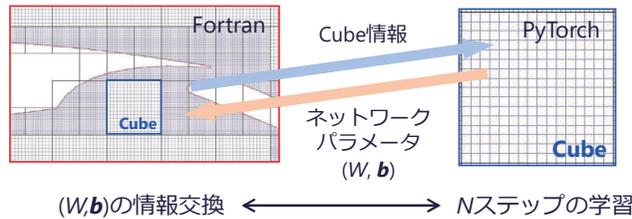
➤ データ同化問題への適用を考え, 計測データと数値シミュレーション結果の差に対してPINNサロゲートを構築する



- 🔥 境界条件は数値シミュレーション側で対応
- 🔥 推定・最適化はPINN側で対応
- 🔥 PINN自体の精度は必ずしも必要ではない
- 🔥 アンサンブルカルマンフィルタや4次元変分法より楽(?)
- 🔥 学習時間は長い (必要な領域のみPINNサロゲートを構築すれば少し緩和?)

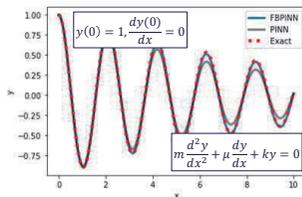
## BCMフレームワーク上でのPINNの実装(1)

- Cube毎にPINNを構築する
- BCMフレームワーク(Fortran)からCube情報を送り, PINN学習部分(Python, PyTorch)からネットワークパラメータを受け取る
- FortranとPythonの連携にはForpyを使用 (<https://github.com/ylikx/forpy>)
- データ並列はFortran側で管理し, GPU使用はPyTorch側で管理



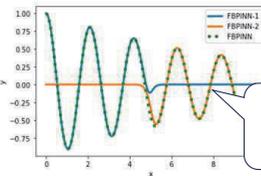
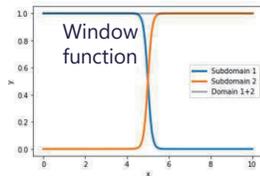
## BCMフレームワーク上でのPINNの実装(2)

- PINNの領域分割にはFinite Basis PINN (FBPINN)を使用



普通のPINNでは高周波現象の近似が難しい  
→ 領域を区切って実効周波数を小さく  
→ 並列化のための領域分割としても利用

c) マルチグリッド法 (低周波成分への対応)

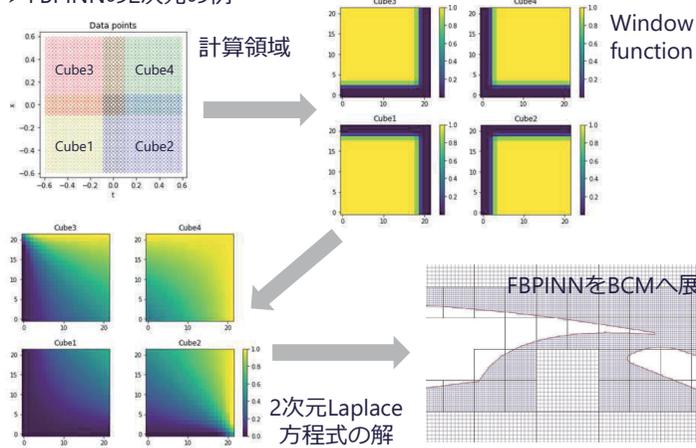


1つのPINNで約2  
周期分 (分割前  
は約4周期分)

- Moseley, B., et al., Finite basis physics-informed neural networks (FBPINNs): a scalable domain decomposition approach for solving differential equations, *Advances in Computational Mathematics*, Vol. 49, p. 62, 2023.

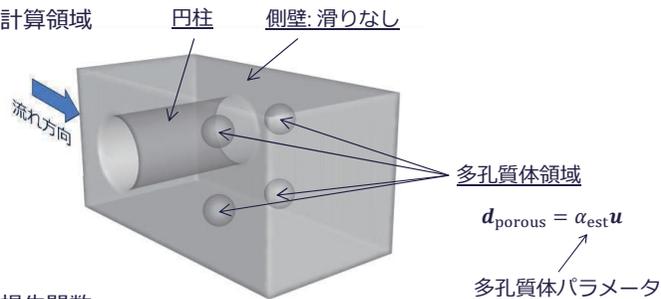
## BCMフレームワーク上でのPINNの実装(3)

### FBPINNの2次元の例



## 多孔質体のパラメータ推定問題

### 計算領域



### 損失関数

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\text{PDE}} + w\mathcal{L}_{\text{Obs}} + w\mathcal{L}_{\text{IB}} + w\mathcal{L}_{\text{BC}}$$

◆  $(x, y, z) \rightarrow (u_1, u_2, u_3, p, \tau_{11}, \tau_{12}, \tau_{13}, \tau_{22}, \tau_{23}, \tau_{33})$  の全結合ネットワーク:

3-100-100-100-10

◆ 最適化にはAdamを使用

## 支配方程式の導出

➤ 支配方程式（非圧縮性Navier-Stokes方程式）

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j}$$

$$\tau_{ij} = \nu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad \dots 1 \leq i \leq j \leq 3$$

➤  $u_i = u_{F,i} + u_{P,i}$  に分解（数値シミュレーション解とPINN解）

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = \frac{\partial (u_{F,i} + u_{P,i})}{\partial x_i} = \frac{\partial u_{F,i}}{\partial x_i} + \frac{\partial u_{P,i}}{\partial x_i} = 0$$

$$\frac{\partial (u_{F,i} + u_{P,i})}{\partial t} + (u_{F,j} + u_{P,j}) \frac{\partial (u_{F,i} + u_{P,i})}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial (p_F + p_P)}{\partial x_i} + \frac{\partial (\tau_{F,ij} + \tau_{P,ij})}{\partial x_j}$$

$$\frac{\partial u_{F,i}}{\partial t} + u_{F,j} \frac{\partial u_{F,i}}{\partial x_j} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p_F}{\partial x_i} - \frac{\partial \tau_{F,ij}}{\partial x_j} + \frac{\partial u_{P,i}}{\partial t} + u_{P,j} \frac{\partial u_{F,i}}{\partial x_j} + (u_{F,j} + u_{P,j}) \frac{\partial u_{P,i}}{\partial x_j} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p_P}{\partial x_i} - \frac{\partial \tau_{P,ij}}{\partial x_j} = 0$$

## 支配方程式の導出（低レイノルズ数流れ）

➤ 数値シミュレーション解（有限差分法）

$$\frac{\partial u_{F,i}}{\partial x_i} = 0$$

$$\frac{\partial u_{F,i}}{\partial t} + u_{F,j} \frac{\partial u_{F,i}}{\partial x_j} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p_F}{\partial x_i} - \frac{\partial \tau_{F,ij}}{\partial x_j} = 0 \quad \longrightarrow \quad \text{時間平均} \bar{u}_{F,i}$$

$$\tau_{F,ij} = \nu \left( \frac{\partial u_{F,i}}{\partial x_j} + \frac{\partial u_{F,j}}{\partial x_i} \right)$$

➤ PINN解

$$\frac{\partial u_{P,i}}{\partial x_i} = 0$$

$$\delta \text{NSE}_i = u_{P,j} \frac{\partial \bar{u}_{F,i}}{\partial x_j} + (\bar{u}_{F,j} + u_{P,j}) \frac{\partial u_{P,i}}{\partial x_j} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p_P}{\partial x_i} - \frac{\partial \tau_{P,ij}}{\partial x_j} = 0$$

$$\tau_{P,ij} = \nu \left( \frac{\partial u_{P,i}}{\partial x_j} + \frac{\partial u_{P,j}}{\partial x_i} \right)$$

## 低Re流れの $\alpha_{est}$ 推定における拘束

### 支配方程式

$$e_i = u_{P,j} \frac{\partial u_{F,i}}{\partial x_j} + (u_{F,j} + u_{P,j}) \frac{\partial u_{P,i}}{\partial x_j} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} + d_{porous,i}$$

$$e_4 = \frac{\partial u_{P,i}}{\partial x_i}$$

$$e_{ij} = \mu \left( \frac{\partial u_{P,i}}{\partial x_j} + \frac{\partial u_{P,j}}{\partial x_i} \right) - \tau_{ij} \quad \dots 1 \leq i \leq j \leq 3$$

$$\mathcal{L}_{PDE} = \sum_{1 \leq i \leq 4} \frac{1}{N_{mesh}} \sum_{N_{mesh}} \|e_i\|_2 + \sum_{1 \leq i \leq j \leq 3} \frac{1}{N_{mesh}} \sum_{N_{mesh}} \|e_{ij}\|_2$$

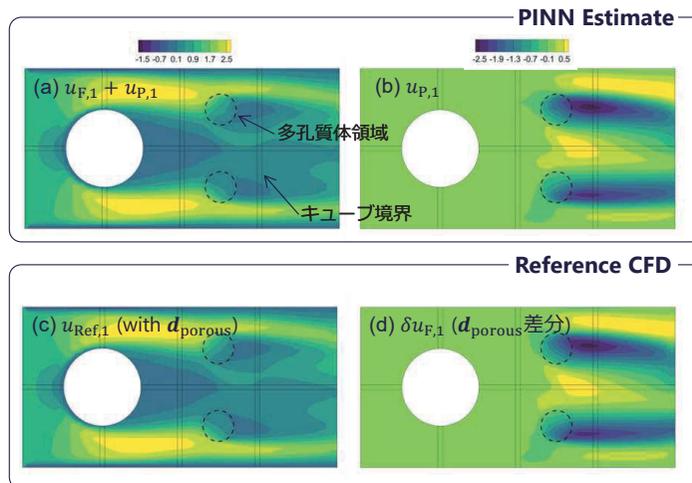
### 計測データ

$$\mathcal{L}_{Obs} = \frac{1}{N_{Obs}} \sum_{N_{Obs}} \|\delta \mathbf{u}_{Obs} - \mathbf{u}_P\|_2$$

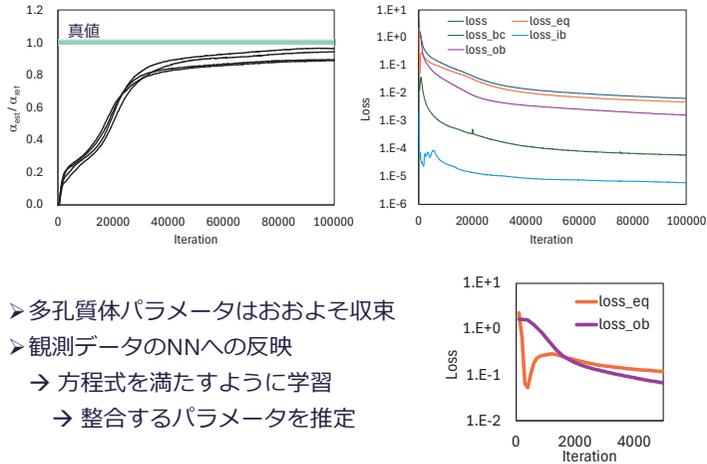
### 内部および外部境界

$$\mathcal{L}_{IB} = \frac{1}{N_{IB}} \sum_{N_{IB}} \|\mathbf{u}_{P,IB}\|_2 \quad \mathcal{L}_{BC} = \frac{1}{N_{BC}} \sum_{N_{BC}} \|\mathbf{u}_{P,BC}\|_2 \quad \dots \text{境界で速度ゼロ}$$

## 流れ方向速度の比較 (Re=200)



## 多孔質体パラメータ $\alpha_{est}$ と損失関数の履歴



- 多孔質体パラメータはおおよそ収束
- 観測データのNNへの反映
  - 方程式を満たすように学習
  - 整合するパラメータを推定

## 目次

### Physics-Informed Neural Network (PINN)

$$MSE = \frac{1}{N_u} \sum_{i=1}^{N_u} |u(t_u^i, x_u^i) - u^i|^2 + \frac{1}{N_f} \sum_{i=1}^{N_f} |f(t_f^i, x_f^i)|^2$$

初期・境界条件からの誤差      支配方程式の残差

速い!

支配方程式で緩く拘束して学習し、予測は深層ニューラルネットワーク

### Differentiable Simulation, アジョイント法, 4次元変分法

$$J(x_0) = \frac{1}{2} \sum_{t=0}^T [y_t - h(x_t)]^T R_t^{-1} [y_t - h(x_t)] + \frac{1}{2} (x_0 - x_b)^T B^{-1} (x_0 - x_b)$$

モデル予測と計測の差      推定したい場に近い場 (正則化項)

物理モデルに従う

支配方程式で強く拘束して学習し、予測はシミュレーションモデル

## データ同化における変分法の導入

### ➤ Sasaki (1958)

- 最適内挿法では物理モデルの拘束がない
- 異なる種類のデータを同化したい
- 初期値とその後の予測の整合性  
 → 気象モデルの初期値推定に変分法を導入



### ➤ Sasaki (1969)・・・時間方向に拡張（4次元変分法）

$$D_i(\varphi_{Q_{n+1}}, \varphi_{Q_n}, \dots) = 0, \quad i=1, 2, \dots, M \quad (2.2)$$

we can include these restrictions into (2.1) by means of the Lagrange method of multipliers as

$$\delta \sum_{i,j=1}^{N_x-1} \sum_{n=1}^Q (\tilde{\alpha}_{Q_{n+1}}(\varphi_{Q_{n+1}} - \tilde{\varphi}_{Q_{n+1}})^2 + \alpha_{Q_n}(\varphi_{Q_{n+1}} - \varphi_{Q_n})^2 - \sum_{i=1}^M \lambda_i D_i(\varphi_{Q_{n+1}}, \varphi_{Q_n}, \dots)) = 0 \quad (2.3)$$

コスト関数

支配方程式

where  $\lambda_i$  is the so called Lagrange multipliers. An example of the restrictions (2.2), for instance, is a set of dynamical equations such as the Navier-Stokes equation and continuity equation.

### □ Euler-Lagrange方程式

→ 解くのが大変（残差に基づく反復法）

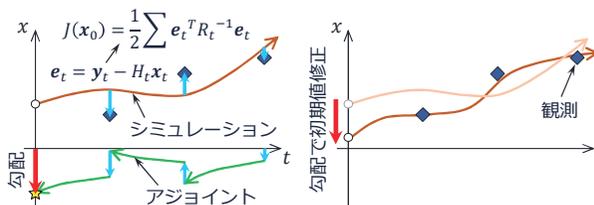
Sasaki's approach seems so straightforward in retrospect, yet the magnitude of the contribution is ever so impressive in light of the fact that such a methodology had never before been used in continuum mechanics.

J. Lewis, S. Lakshminarahan, Sasaki's Pivotal Contribution: Calculus of Variations Applied to Weather Map Analysis, Monthly Weather Review, Vol. 136, pp. 3553-3567, 2008

## 随伴変数法（アジョイント法）の導入

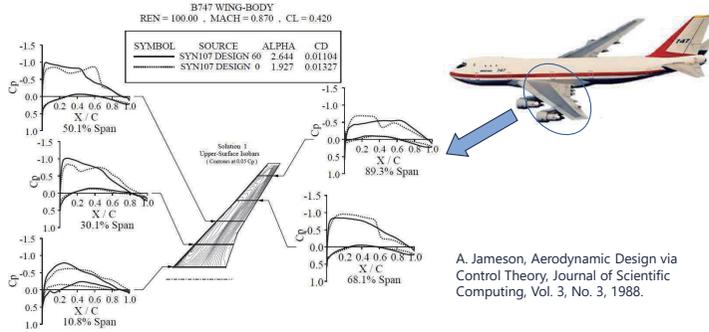
### ➤ より効率的に汎関数の最小化を行うことが可能に （随伴変数法と最小化アルゴリズムの組み合わせ）

- 偏微分方程式の最適制御法 (J.L. Lions 1971)
- 気象モデルへの応用 (Penenko&Obraztsov 1976, Le Dimet&Talagrand 1986)  
 → 大規模な気象モデルの変分問題を解くことが現実的に
- On Optimum Profiles in Stokes Flow (Pironneau 1973)  
 Lions, J. L. 1968 *Contrôle Optimal de Systèmes Gouvernés par des Equations aux Dérivées Partielles*. Paris: Dunod.



## アジョイント法による空力設計

➤ アジョイント法は航空機の翼設計でも (Jameson 1988)



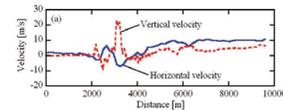
- コスト関数として空力抵抗 (4次元変分法では観測と計算の差がコスト関数)
- 翼形状がコントロールパラメータ (次元が結構大きい)

## 晴天乱気流の推定

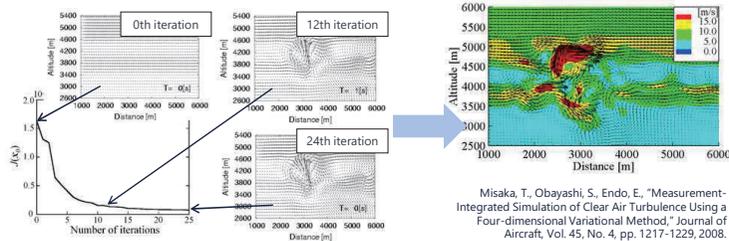
➤ 数値シミュレーション単体では乱気流を再現できない  
(初期・境界条件が不明)



フライトデータ：ほぼ唯一の直接計測データ



➤ 4次元変分法を導入することでフライトデータをもとに乱気流を再現



## Differentiable Simulation, Differentiable Physics

```

tape = wp.Tape()

# forward pass
with tape:
    wp.launch(kernel=compute1, inputs=[a, b], device="cuda")
    wp.launch(kernel=compute2, inputs=[c, d], device="cuda")
    wp.launch(kernel=loss, inputs=[d, l], device="cuda")

# reverse pass
tape.backward(1)

@wp.kernel
def compute1(a: wp.array(dtype=wp.vec3),
            b: wp.array(dtype=wp.vec3))

    # get thread index
    tid = wp.tid()

    # Load two vec3s
    x = a[tid]
    y = b[tid]

    # compute the dot product between vectors
    r = wp.dot(x, y)

    # write result back to memory
    c[tid] = r
    
```

- アジョイント法による微分を活用したシミュレーション
- **新しい点：微分情報を利用可能なフレームワークが提案**  
(TensorflowやPyTorchの使用感)
- アジョイント部分を自動生成
- シミュレーションモデルとニューラルネットワークを直接つないだ学習システム
- レンダリングも微分可能に

<https://www.nvidia.com/ja-jp/on-demand/session/gtcspring22-s41599/>

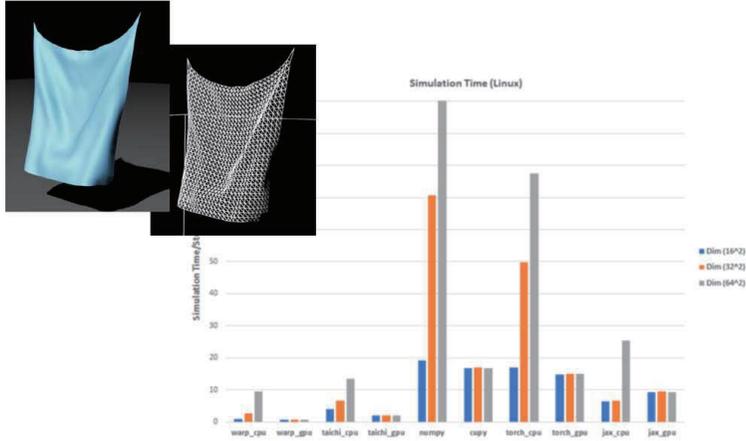
## いろいろなフレームワーク

- Taichi, Numba, Warpあたりがシミュレーション向け
- PyTorchなどの同じような使い方

	Type	x86	CUDA	Shader	Unified	MGPU	JIT	FFI	Deps	Debugging	Cached	Differentiable
Warp	Kernel	✓	✓	✗	✓	✗	✓	✓	IVRTC	✓	✓	✓
Taichi	Kernel	✓	✓	✓	✓	✗	✓	✗	LLVM	✗	✗	✓
Numba	Tensor / Kernel	✓	✓	✗	✗	✗	✓	✗	NVCC	✓	✗	✗
Slang	Kernel	✓	✓	✓	✓	✗	✓	✗	-	✗	✓	✗
CuPy	Tensor	✗	✓	✗	✗	✗	✓	✓	NVCC	✓	-	✗
PyTorch	Tensor	✓	✓	✗	✓	✓	✓	✗	NVCC	✓	-	✓
Numpy	Tensor	✓	✗	✗	✗	✗	✓	✓	-	✓	-	✗
JAX	Tensor	✓	✓	✗	✓	✓	✓	✗	-	✓	-	✓
Legate	Perf. approximately equivalent to CuPy on single GPU											
Pythran	No GPU support											

<https://www.nvidia.com/ja-jp/on-demand/session/gtcspring22-s41599/>

## Cloth Simulation in NVIDIA WARP



<https://www.nvidia.com/ja-jp/on-demand/session/gtcspring22-s41599/>

## まとめ (個人の感想です)

- **機械学習との関わりから微分を活用した数値シミュレーションがより盛んに** → PINNやDifferentiable Simulationなど
- **PINNはすぐ使えるが大規模流体問題に適用するのは難しそう** → 並列化や数値シミュレーションとの併用
- **Differentiable Simulationフレームワークの活用**に期待 → 手頃なサイズの問題向き? 大規模化は?



## 多数の空力解析結果のデータ解析による車両周り流れの特徴抽出

中島 卓司 (広島大学大学院先進理工系科学研究科)

Takuji NAKASHIMA (Hiroshima University)

近年の自動車の空力開発では、大規模な計算資源を用いて多数の候補車両形状の空力解析が実施され、より良い空力性能を持つ車両形状が追及されている。一方で、それらの解析結果は膨大なデータ量となることから、人手によってその全てを分析、評価することは困難である。より効果的に設計技術者を支援し、実際の製品開発に貢献するためには、活用されていない大規模データを統計的に解析し、設計に有用な知識を抽出することも重要である。このような流れの特徴抽出例としては、多目的最適化で得られたパレート解に対する固有直交分解(POD)法の適用[1, 2]が報告されている。また、自動車の空力技術者はこれまで、自動車周辺の流れの構造やトポロジーに着目して、空力性能と流れの現象との関係を議論してきた。そこで、多数の車両の空力解析結果に対するデータ解析を行い、抽出された自動車周りの流れの特徴と空力性能との関係について統計的分析を行えば、これまで熟練の空力技術者しか持ちえなかった流れと空力性能の関係性のノウハウが客観的情報として得られることが期待される。

そこで本研究では、約 200 台の 1/5 スケールのセダン型自動車モデルを対象とした空力解析結果から特徴的な流れを抽出するため、各車両周り流れの時間平均速度場のデータ群に POD と同様なデータ解析手法である PCA (主成分分析) を適用した[3]。さらに、抽出した流れの構造と自動車モデルの空力性能との関係を統計的に分析し、空力特性と相関のある流れの特徴を明らかにした。その結果、従来の知見[4]と一致する、セダン型自動車の空気抵抗を増大させる流れパターンが抽出された。また、特徴的な流れを抽出する際に、各車両の空力係数値を考慮する PLS (部分最小二乗) 法の適用についても検討し、共通な潜在構造を抽出する特徴量抽出法では、目的変数への寄与が大きいモードが優先的に抽出されることが確認された。

### 参考文献

- 1) Oyama, A., Nonomura, T., and Fujii, K.: Data mining of Pareto-optimal transonic airfoil shapes using proper orthogonal decomposition. *Journal of Aircraft*, vol.47, no.5, pp.1756-1762, 2010.
- 2) Oyama, A., Verburg, P., Nonomura, T., Hoeijmakers, H. and Fujii, K.: Flow Field Data Mining of Pareto-Optimal Airfoils Using Proper Orthogonal Decomposition. *The Proceedings of 48th AIAA Aerospace Sciences Meeting Including the New Horizons Forum and Aerospace Exposition*, AIAA 2010-1140, 2010.
- 3) 池田 隼, 中野 樹, 福本 浩章, 大山 聖, 平岡 武宜, 清水 圭吾, 中島 卓司, 坪倉 誠: 空気抵抗および揚力の低減を目的としたセダン型簡易車両の多目的形状最適化. 第 97 期流体工学部門講演会講演論文集, Session ID IS-15, 2019.
- 4) 農沢 隆秀, 岡田 義浩, 大平 洋樹, 岡本 哲, 中村 貴樹: 自動車の空気抵抗を増大させる車体周りの流れ構造: 第 2 報, セダン車体の特徴的な流れ構造(流体工学, 流体機械). 日本機械学会論文集, 75 巻, 757 号, p. 1807-1813, 2009.

## Contents

- 背景
- 分析対象とした車両群が生成された多目的最適化の話
- 得られた個体群（車両群）の分析・特徴抽出
  - 車両形状の分析（クラスタリング）
  - 流れ場の特徴抽出（PCA/PODなど）
  - 空力性能との回帰分析（PCR, PLSR etc..）
- まとめ

1

## 自動車空力に対する要求

- 燃費, 走行安定性, 空力騒音, etc..
- 性能間のトレードオフ
  - $C_D$  (燃費) vs  $C_L$  (操縦安定性), 熱害 (冷却), NV (空力騒音, 空力加振?)
  - 風洞 vs 実路: 正対風 $C_D$  vs 横風 $C_D$



- 多目的最適化問題
  - 多数の“形状制御点” (設計変数)
    - Ref. “Shape changes that influence the aerodynamic forces”  
(T. Schuetz, “Aerodynamics of Road Vehicles Fifth Edition” p.252, Fig.4.51)
  - 多数の“要求性能” (目的関数)
    - Ref. “Spectrum of tasks for vehicle aerodynamics”  
(T. Schuetz, “Aerodynamics of Road Vehicles Fifth Edition” p.2)

2

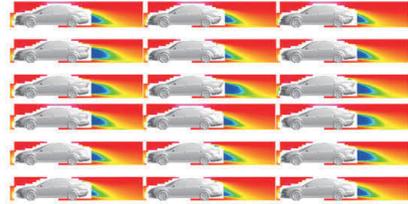
## 計算科学/情報工学（Data-Driven的な諸々）に期待されること

- 形状最適化
  - 遺伝的アルゴリズム
  - Kriging / ベイズ最適化
- データマイニング
  - 特徴抽出
    - Ex. Flow data mining from Pareto solutions  
(Oyama et al., 2010)
  - 暗黙知の明確化（形式知化?）
- 性能予測の(超)高速化
  - サロゲートモデル（機械学習）
  - 次元縮約モデル (ROM)
  - PINNs

3

## なぜ、流れ場の特徴抽出？

- 形をこうするべき、ではなく、流れをこうするべき、という制約の緩和ができないか？
  - より高度/効率的なデザインと空力性能の両立へ



形そのものを直接制約しない

例えば、NGな流れのパターンを指定する

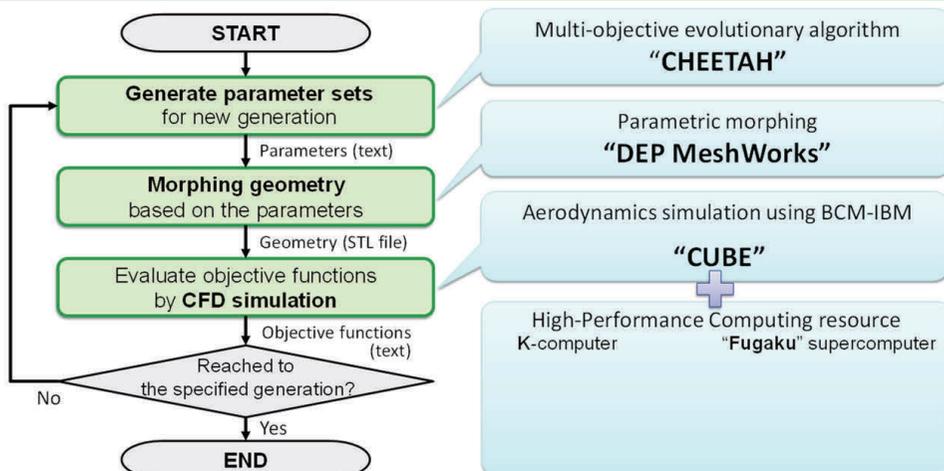
4

## Contents

- 背景
- 分析対象とした車両群が生成された多目的最適化の話
- 得られた個体群（車両群）の分析・特徴抽出
  - 車両形状の分析（クラスタリング）
  - 流れ場の特徴抽出（PCA/PODなど）
  - 空力性能との回帰分析（PCR, PLSR etc..）
- まとめ

5

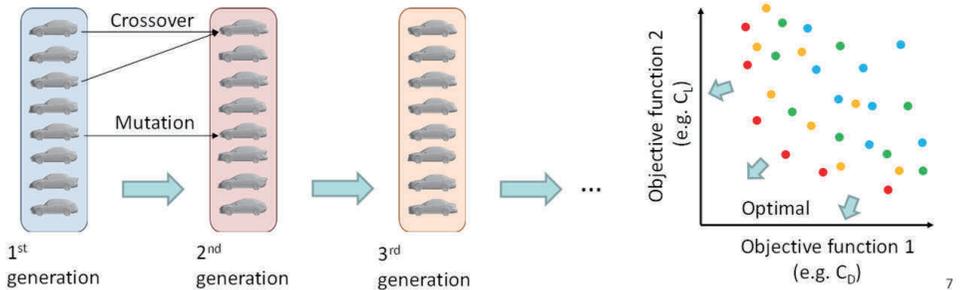
## 適用した最適化フレームワーク



6

## “CHEETAH”による多目的最適化

- **Global optimization** ability is required → *evolutionary algorithm*
  - Due to **non-linearity** of fluid dynamics
- **CHEETAH**: CHEbyshev-Epsilon opTimizer AlgoriThm (Jaimes, 2015)
  - Multi-objective evolutionary algorithm suitable for parallel computing
  - Developed in JAXA (Japan Aerospace Exploration Agency)



7

## “CUBE”による空力解析

- **CUBE: Complex Unified Simulation Framework** (Jansson et al., 2018, Onishi & Tsubokura, 2021)
  - 階層構造有限体積法: ビルディング-キューブ法 (BCM)
    - A solver for coupled phenomena: fluid/structure/acoustics/chemical reaction...
    - **Building Cube Method** for the unified data structure (Nakahashi, 2003)
      - Easy tune for both single node and parallel performance
  - 埋め込み境界法 (IBM) (Fadlun et al., 2000)
    - (1) Dirty CAD treatment (Onishi et al., 2013, 2021)
    - (2) Moving Boundary Method (Bale et al., 2020)
    - (3) Unified Compressible/Incompressible analysis (Li et al., 2016)
    - (4) Unified Fluid/Structure analysis (Nishiguchi et al., 2019)

8

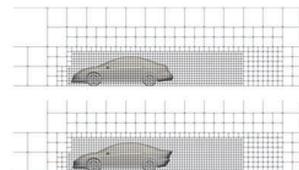
## “CUBE”による空力解析

- **CUBE: Complex Unified Simulation Framework** (Jansson et al., 2018, Onishi & Tsubokura, 2021)
  - Key features
    - 階層構造有限体積法: ビルディング-キューブ法 (BCM)
    - 埋め込み境界法 (IBM)
  - 支配方程式: 非圧縮性 Navier-Stokes 方程式

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_i} = 0$$

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \right) - \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} + f_i$$

$$\left[ \begin{array}{lll} u: \text{Flow velocity} & t: \text{Time} & \rho: \text{Air density} \\ p: \text{Pressure} & \nu: \text{Dynamic viscosity} & f: \text{External body-force for IBM} \end{array} \right]$$



- 最適化フレームワークの構成要素としての利点
  - 前処理が極めて平易
  - 同一の解析格子を使用して、類似な寸法の複数の車体を解析可能
    - 外力項  $f_i$  の分布のみを変える

9

## 最適化の対象・条件

- 1/5-スケールセダン型車両模型の多目的形状最適化 (ポスト"京"プロジェクトで実施)
- 目的関数: 4つ
  - 抵抗係数・揚力係数
  - ×
  - 正対風 (Yaw  $\beta = 0^\circ$ ) と弱横風(同 $3^\circ$ )
  - すべて最小化
- 設計変数: 8パラメータ
  - 下図の8点を車長方向に変位
    - 2mm 間隔 (実車スケールで10mm間隔に相当)
- 11世代×18個体の進化計算



Target sedan-type automobile model

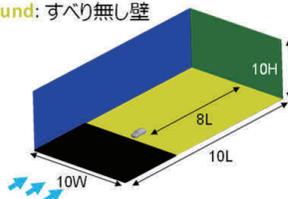


Control points for morphing

10

## 数値解析条件

- 物理条件 (縮尺風洞模型試験を想定)
  - 風速: 20.5 m/s
  - 密度:  $1.14 \text{ kg/m}^3$
  - 粘性:  $1.82 \times 10^{-5} \text{ Pa}\cdot\text{s}$
  - Re数:  $1.20 \times 10^6$
  - 解析時間: 2.0 s
- 解析領域と境界条件
  - Inlet: 定常一様流 20.5m/s
  - Outlet: 対流流出境界
  - Sidewall, roof, far ground: すべり壁
  - Near ground: すべり無し壁



- 数値モデル・スキーム
  - 乱流モデル: 無し (Implicit LES)
  - 空間離散スキーム (対流項):
    - QUICKスキーム
  - 解析格子:
    - Cube数 (mesh blocks): 23,458
    - セル数: 96,083,968
    - 最小格子幅: 1.4 mm
  - 時間積分法: Crank-Nicolson
    - Delta t:  $1.0 \times 10^{-5} \text{ s}$
  - 圧力Poisson解法: Red/Black SOR
- 計算機資源
  - K-computer
  - コア数: 2936cores (367nodes@K)
  - 解析時間: 14 hours/case

11

## Contents

- 背景と目的
- 分析対象とした車両群が生成された多目的最適化の話
- 得られた個体群 (車両群) の分析・特徴抽出
  - 車両形状の分析 (クラスタリング)
  - 流れ場の特徴抽出 (PCA/PODなど)
  - 空力性能との回帰分析 (PCR, PLSR etc..)
- まとめ

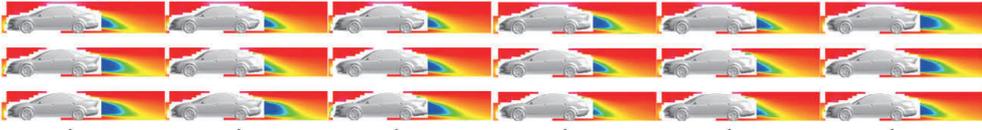
12

## PCA (POD) による車両回り速度場の特徴抽出

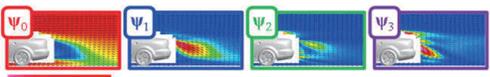
- 198台分の車両モデル周りの解析結果 (時間平均流速分布) → 主成分を分析

Time-averaged velocity fields @  $\beta=0^\circ$  of 198 samples

※ Here, only 18 samples in 2<sup>nd</sup> generation are shown.



主成分 (PODモード)



各車両周り流れの流速分布は共通のパターン  $\Psi_j$  (= 主成分) の線形結合 (重み係数  $a_i$ ) で表される

Vehicle A  $\approx a_0 \Psi_0 + a_{1,A} \Psi_1 + a_{2,A} \Psi_2 + a_{3,A} \Psi_3 + \dots$

Vehicle B  $\approx a_0 \Psi_0 + a_{1,B} \Psi_1 + a_{2,B} \Psi_2 + a_{3,B} \Psi_3 + \dots$

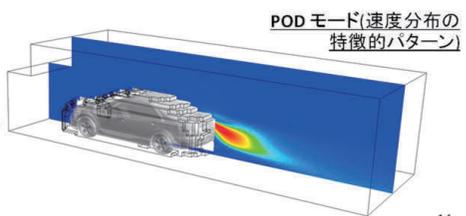
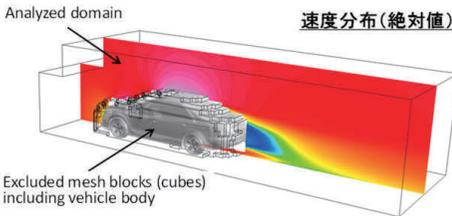
↓ same      ↓ same      ↓ same

Note) Mode vectors are inverted from the distributed PDF file for ease of explanation.

## PCA (POD) による車両回り速度場の特徴抽出

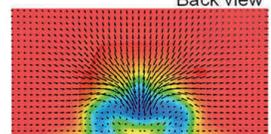
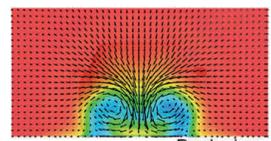
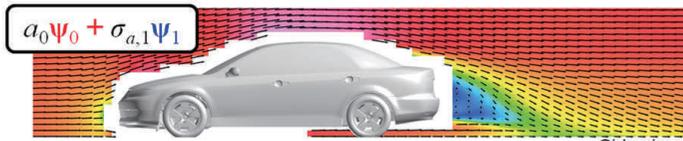
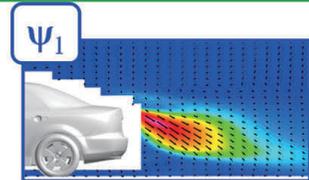
- 分析対象データ

- 正対風 ( $\beta = 0^\circ$ ) 条件の流れ場のみを分析
- 車両周りの高解像度領域 (下図) のデータのみを対象に分析
  - メモリ節約のため、格子を4倍粗視化して自由度削減
    - 4.7M nodes × 3 components × 198 samples (cases) = 2.8G degree of freedom.
- 車体が含まれるブロック (Cube) は対象から除外
  - 車体形状差の直接的な影響を避けるため



## 平均流れ場の第1主成分

- 第1主成分が表す特徴的流れ場：
  - 幅中央断面：車体後方の下降流 (車体上面後端から斜め下向きの速度変化)
  - 主流直交断面：後引き渦対
- 再構築した流れ場の可視化：



## Contents

- 背景と目的
- 分析対象とした車両群が生成された多目的最適化の話
- 得られた個体群（車両群）の分析・特徴抽出
  - 車両形状の分析（クラスタリング）
  - 流れ場の特徴抽出（PCA/PODなど）
  - 空力性能との回帰分析（PCR, PLSR etc..）
- まとめ

16

## PCA（POD）による車両回り速度場と空力性能の関心の主成分回帰分析

### 主成分得点と空力係数の回帰分析

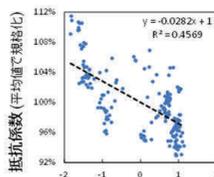
※ PCR: Principal Components Regression

一般にPCR（主成分回帰）と呼ばれる手法※

$$\begin{aligned}
 \text{ある個体Aの後流} &\approx a_0 \Psi_0 + a_{1,A} \Psi_1 + a_{2,A} \Psi_2 + a_{3,A} \Psi_3 + \dots \\
 \text{別の個体Bの後流} &\approx a_0 \Psi_0 + a_{1,B} \Psi_1 + a_{2,B} \Psi_2 + a_{3,B} \Psi_3 + \dots
 \end{aligned}$$

抵抗係数や揚力係数  
 $C_{D,A}, C_{L,A}$   
 $C_{D,B}, C_{L,B}$

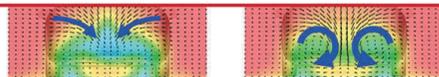
主要流れ構造  
(第1主成分)



第1主成分と抵抗係数の関係  
規格化第1主成分得点  $a_{1,i} / \sigma(a_1)$

第1主成分が表す速度場の特徴:  $a_0 \Psi_0 \pm \sigma(a_1) \Psi_1$  を可視化

下降流が強く、強い後曳き渦を生じると抵抗が増大する  
→ 既往の知見と一致する傾向

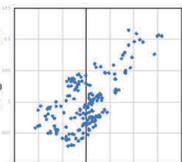


低抵抗  
主流流速コンターと断面内ベクトル@主流直交断面:L4後方

## 抽出された特徴的流速分布（第3 PODモード）

- 全車両の平均速度分布からのずれの空間パターン
  - 等値面: 速度変化（ずれ）の大きさ  $|U| = 0.015 U_0$
  - 等値面の色:  $U_x$  の増減を表現（増加 / 減少）
- 回帰分析結果より、統計的に抗力 ( $C_D$ ) 増大と相関のあるモード

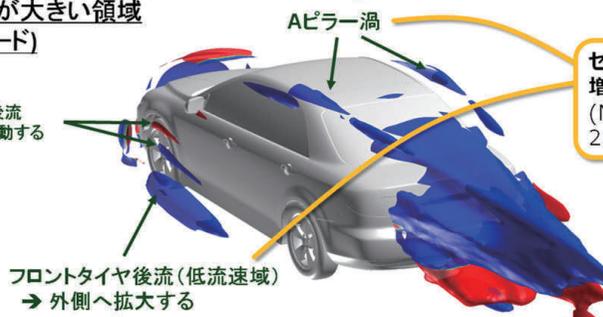
(規格化後)



主成分得点

速度変化量大きい領域  
(第3 PODモード)

ボディサイド後流  
→ 下方へ移動する



セダン型車両の抵抗を増大させる既知の渦構造 (Nouzawa et al., 2009) と対応

## Contents

- 背景と目的
- 分析対象とした車両群が生成された多目的最適化の話
- 得られた個体群（車両群）の分析・特徴抽出
  - 車両形状の分析（クラスタリング）
  - 流れ場の特徴抽出（PCA/POD）
  - 空力性能との回帰分析（PCR）
- まとめ

19

## まとめ

- PCA（or それに類する手法）による流れ場の特徴抽出を行い、重み係数（例えば主成分得点）と空力係数値との回帰分析から、抽出した特徴的な流れ場のパターンと空力性能との関係を分析した
  - 従来知見と一致する、空気抵抗を増大させる流れパターンが抽出された
  - PLSのような目的変数の情報を含めた特徴量抽出法では、（当然ながら）目的変数への寄与が大きいモードが優先的に抽出された

20

## 医工学分野における流体データ同化の課題

大谷 智仁 (大阪大学大学院基礎工学研究科)

Tomohiro OTANI (The University of Osaka, Graduate School of Engineering Science)

医工学分野において、患者個別の医用データに基づく循環器の血流場の理解や、その診断支援の試みが始まって約四半世紀が経過した。この過程で、患者個々の血管形状に対する血流動態の数値流体力学計算[1]や、磁気共鳴イメージング (Magnetic resonance imaging: MRI) による血液流速分布の非侵襲計測[2]など、血流動態や血管への力学負荷の評価技術の開発が進められ、具体的な疾患に対する応用や商用展開へ発展した。一方で、数値計算に用いられる理想化・簡易化や、計算条件の不確かさ、MRI 計測における分解能の制約や複数の系統誤差 (バイアス) の混入など、各々の手法の制約・限界が可視化されることになり、分野全体における技術的イノベーションの需要が高まっている。

上記課題の解決手法の一つとして、MRI 画像の各画素で定義される流速ベクトルを計測データとする流体データ同化技術の導入が提案された [3]。本手法は計測と数値計算それぞれの流速分布の誤差最小化問題であり、数値計算の初期値・境界値を制御変数とおく数値最適化問題として整理され、随伴変数法や深層学習による計算手法の開発が進められている。ただし、誤差関数の定義にあたり、MRI に対するバイアス混入が問題となるが、誤差の度合や分布を記述する観測モデルが無く、MRI に対する流体データ同化の適用対象は、誤差の影響が小さいと考えられる、単純な大血管流れなどに制約されてきた。

著者らは上記課題の解決を目指し、既知の流速分布に対して、実際の MRI の計測条件を反映した MRI 流動計測の数値シミュレータの構築を進めている [4]。本研究では、外部磁場の印可に伴う巨視的な磁化運動を解き、磁気信号の取得から速度再構成までの一連の手順を全て記述することで、計測や信号処理における複数種類の誤差混入やその度合を出力する。本講演は、分野全体の研究開発の動向や、著者らの研究の進捗について報告したものであり、以下に講演で用いたスライド(の一部)を添付する。

### References

1. Mittal R, Seo JH, Vedula V, Choi YJ, Liu H, Huang HH, et al. Computational modeling of cardiac hemodynamics: Current status and future outlook. *J Comput Phys.* 2016;305: 1065–1082.
2. Soulat G, McCarthy P, Markl M. 4D flow with MRI. *Annu Rev Biomed Eng.* 2020;22: 103–126.
3. Nolte D, Bertoglio C. Inverse problems in blood flow modeling: A review. *Int J Numer Method Biomed Eng.* 2022;38: e3613.
4. Otani T, Sekine T, Sato Y, Alves EC, Wada S. An Eulerian formulation for the computational modeling of phase-contrast MRI. *Magn Reson Med.* 2025;93: 828–841.

## 対象とする生体流れのスケール (ex.血液)

形状・物性のマルチスケール性  
各スケールにおいて適切なモデル化が提案

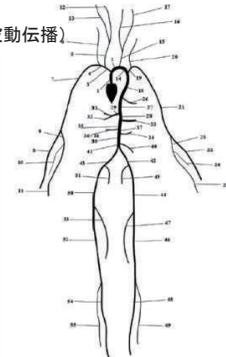
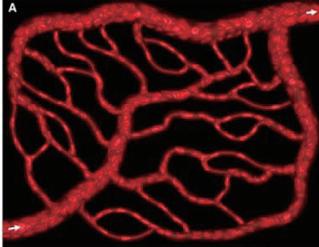
臓器・血管レベル

全身循環  
拍動管流れ (波動伝播)

### 血球流動

粒子懸濁液・固液混相流れ

非圧縮流れ/臨床問題の中心



Balogh & Bagchi, *Biophys J*, 2017

Sherwin et al., *J Eng Math*, 2003

[ $\mu\text{m}$ ]

[mm]

[cm]

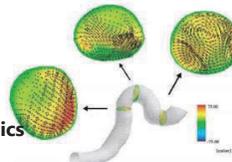
[m]

Biomechanics Lab., Dept. Mechanical Science & Bioengineering,  
Graduate School of Engineering Science, The University of Osaka, Japan

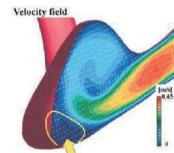
5/28

## 患者別血流解析の技術開発の動向 (2000')

- ◆ **Personalized simulations using clinical images**  
Oshima et al., *CMAME*, 2001
- ◆ **Risk assessment using large patient datasets**  
Shojima, Oshima et al., *Stroke*, 2004, 2005
- ◆ **Fluid-structure interaction of arterial hemodynamics**  
Torii, Oshima et al., *Jpn Soc Mech Eng J*, 2004, *Compt Mech*, 2006
- ◆ **3D-0D coupling to model peripheral resistances**  
Torii, Oshima et al., *Compt Mech*, 2010



Oshima et al., *CMAME*, 2001



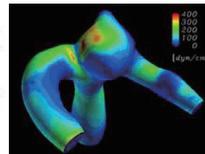
Shojima, Oshima et al.,  
*Stroke*, 2004



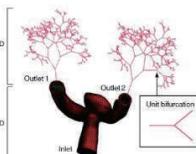
Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 191 (2001) 661-671

Computer methods  
in applied  
mechanics and  
engineering

www.elsevier.com/locate/cma



Torii, Oshima et al.,  
*Compt Mech*, 2006



Torii, Oshima et al.,  
*Compt Mech*, 2010

Finite element simulation of blood flow in the cerebral artery

Marie Oshima <sup>a,\*</sup>, Ryo Torii <sup>b</sup>, Toshio Kobayashi <sup>a</sup>,  
Nobuyuki Taniguchi <sup>c</sup>, Kiyoshi Takagi <sup>d</sup>

日本の血流計算は自動車の空力解析のラボから派生

Biomechanics Lab., Dept. Mechanical Science & Bioengineering,  
Graduate School of Engineering Science, The University of Osaka, Japan

6/28

## 流体力学（計算）の医用応用・反省と次の展開

### 産業応用・空力設計の派生として医用応用へ参入

- ・ 目的関数（の存在）が不明  
→ 計算結果から何を評価すればいいか不明過度な期待と拙速なコモディティ化，幻滅期へ
- ・ （患者個々の）計算条件が不明  
→ 画一的な条件に基づく血管形状の性能評価に  
→ 本気でやると際限がない ex. 流体構造連成，血液の非ニュートン性，抹消抵抗の自己調節能

### 次の展開は可能か？

- ・ 原点回帰：現象理解のツールとして数値計算を利用  
(ex. 血管成長・変性の数理モデル化，循環器形状の生理機能の理解：理想化・単純化)
- ・ **患者個々の流れ**に対する流動特性の評価・医用応用  
(ex. 計測（超音波・MRI）・データ同化)



Biomechanics Lab., Dept. Mechanical Science & Bioengineering,  
Graduate School of Engineering Science, The University of Osaka, Japan

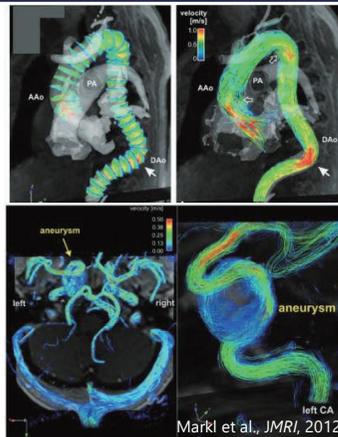
9/28

## MRIによる流体計測：医用MRIの開発の経緯

- ・ 速度場の計測アルゴリズムの確立  
(一方向・定常流れを仮定)  
*Moran, Magn Reson Imaging, 1982*
- ・ 効率的な3次元計測アルゴリズムの提案  
*Pelc et al., Magn Reson Med., 1991*
- ・ 心電図同期により，拍動流の計測に対応  
*Markl et al., J Magn Reson Imaging, 2003*
- ・ 循環器血流計測のツールとして，  
4D flow MRI と呼称，基礎研究から社会実装へ  
*Markl et al., J Magn Reson Imaging, 2012*

日本磁気共鳴医学会の公式誌での特集号  
4D flow Special issue, *Magn Reson Med Sci*, 21(2), 2022

医学の基礎研究ツールとして普及しているが，  
他分野にはあまり普及していない？



Biomechanics Lab., Dept. Mechanical Science & Bioengineering,  
Graduate School of Engineering Science, The University of Osaka, Japan

11/28

# MRIによる流動計測：使用用途の例

**3次元流動場の非侵襲・直接計測手法**

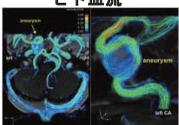
競合手法 (ex. 点計測、光学系粒子追跡) における実験系の理想化・簡易化が必要  
 Fukushima et al., *Annu Rev Fluid Mech*, 1999

期待される計測対象：

- 未知の複雑流路の流れ (ex. 生体内・多孔質媒体)
- 物性が異なる複数流体の流れ (混相流)
- 粒子状物体の流れ, etc.

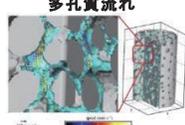
空間分解能 : 0.1-1 mm (医用MRI, 静磁場1.5-3T)

**ヒト血流**

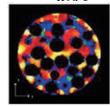


Markl JMRI, 2012

**多孔質流れ**



**2相流**



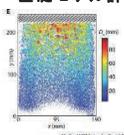
Gladden & Sederman, *JMR*, 2013

**植物根**



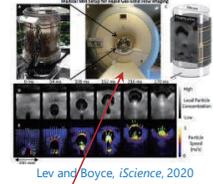
Faget et al., *Ann Bot*, 2013

**粒子流れ**



Penn, *Sci Adv*, 2017

**土砂流れ**



Lev and Boyce, *iScience*, 2020

生体 (ヒト・動植物) の生理機能理解・診断応用

物体内の流れの機序解明, 土砂・粒子流動に関する流路構造の最適設計

基礎モデル評価・改良

**医用MRI**

3次元流動場 (流速分布) を直接計測可能, 計測技術として魅力的な気がするが, 医用応用に特化? (歴史的な経緯?)

Biomechanics Lab., Dept. Mechanical Science & Bioengineering, Graduate School of Engineering Science, The University of Osaka, Japan 12/28

# 医用MRIに対する流体データ同化

MRI計測情報：定常・もしくは周期流れの速度場  
 →3次元・4次元変分法による境界条件の最適制御問題に帰着

D'Elia et al., *J Sci Compt*, 2012, Guerra et al., *IJNLM*, 2014, Koltukluoglu & Blanco, *JFM*, 2018, Funke et al., *IJNME*, 2019

**深層学習による高解像度化**

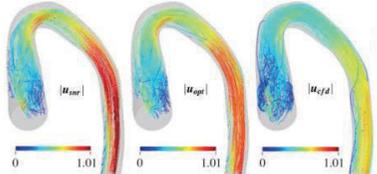
Ferdian et al., *Front Phys*, 2020, *Med Image Anal*, 2023

既存の流体データ同化と同様に, 計測データは離散的にサンプリングされたと仮定, 系統誤差：考慮せず  
 偶然誤差：正規分布を仮定

実際のMRIは多岐の系統誤差が混入 (ハード・ソフトウェア共に影響)  
 従来の血流計算と同様, 他分野の技術 **表面的な導入**



D'Elia et al., *J Sci Compt*, 2012



Koltukluoglu & Blanco, *J Fluid Mech*, 2018

Biomechanics Lab., Dept. Mechanical Science & Bioengineering, Graduate School of Engineering Science, The University of Osaka, Japan 13/28

## 流れのMRIに対する学術的な体系化の欠落

MRI: 分析化学における核磁気共鳴 (NMR) を用いた対象の内部構造の計測手法  
1970年代に基礎原理が確立後、産業界を中心に医用機器として発展

流体計測: MRIの多岐の応用の一つに位置付け  
(ex. 物性, 粘弾性, 分子拡散, 脳神経活動)

計測原理: 1980年代に確立, 流れの定常性, 一様性を仮定  
→ 仮定との乖離に基づく系統誤差の発生

実務的な計測手法: 一般的な形態計測用途の手法をそのまま流用  
→ 出力データが手法に大きく依存, 選択はユーザーの状況と経験

流速場に対する計測データを適切に解釈し,  
計測データの系統・偶然誤差の性質の把握, 計測性能の把握, 限界を体系的に提示したい:  
**連続体物理に基づく, MRI流体計測の数値シミュレーション技術の確立**



## MRIのモデル化: 核磁気共鳴 (巨視的観点から)

計測対象の1方向(z軸)に静磁場を印可,  
対象中の原子中の核スピンの  
静磁場方向を軸に歳差運動を形成  
(巨視的磁化ベクトルM, 以下, 磁化と呼称)

$$\frac{d\mathbf{M}}{dt} = \gamma \mathbf{M} \times \mathbf{B}$$

回転磁場を**一時的に**印可し, 磁化をxy平面に傾斜 (**励起**)  
(回転周期: 磁化の固有周波数に対応)

回転磁場の印可後, 磁化は定常状態へ回復 (**緩和**)

$$\frac{d\mathbf{M}}{dt} = \gamma \mathbf{M} \times \mathbf{B} - \frac{M_z - M_0}{T_1} \mathbf{e}_z - \frac{M_x}{T_2} \mathbf{e}_x - \frac{M_y}{T_2} \mathbf{e}_y$$

X,y方向それぞれに受信コイルを配置,  
磁化の回転に起因する誘導起電力を計測

$$S_{Re} = \int M_x dv \quad S_{Im} = \int M_y dv$$

$$S = S_{Re} + iS_{Im} = \int M_{xy} \exp(i\omega t) dv$$

**Bloch equation, 1946**

\*NMR分光: 信号の時系列データからT<sub>1</sub>, T<sub>2</sub>緩和時間を計測, 対象中の原子構造を把握



## MRIのモデル化：核磁気共鳴を利用したイメージング (Ex. 2D)

磁化 $M$ を**時間**、**空間**に対する連続関数と仮定

磁化の励起後、勾配磁場を印可・制御

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 + \mathbf{G}_x x + \mathbf{G}_y y \quad \mathbf{G}_x = \frac{\partial B_z}{\partial x}, \mathbf{G}_y = \frac{\partial B_z}{\partial y}$$

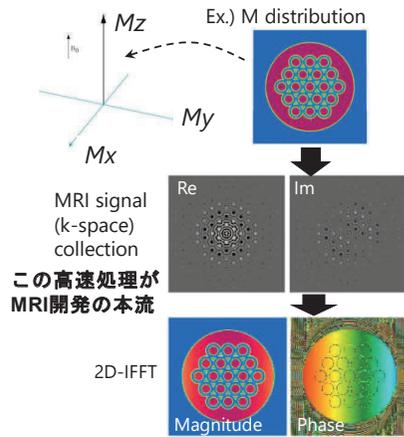
—磁化の回転周期が空間的に変化、  
NMR信号を修正

$$S = \int M_{xy} \exp(i\omega t) dv$$

$$\Rightarrow S(k_x, k_y) = \int M_r(x, y) \exp(ik_x x + ik_y y) dv$$

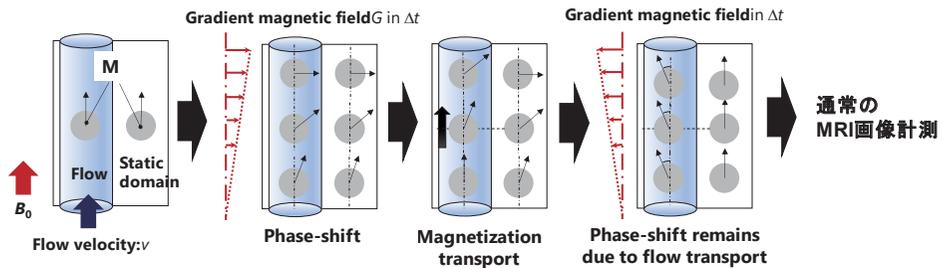
$$k_x = \gamma G_x t, k_y = \gamma G_y t$$

全ての $k_x, k_y$ に対応するNMR信号を計測し、  
(必要データが集まるまで、複数回の磁化励起が必須)  
iFFTにより、**磁化ベクトルの空間分布**を取得  
(普段目にするMRI画像は、**磁化の絶対値**)



## MRIのモデル化：流体計測 (位相コントラスト法)

磁化の励起からNMR信号の計測までに、流れ方向に正負の勾配磁場 (双極磁場) を交互に印可、流速に比例する位相差を磁化に設定しておく。



iFFT後、磁化の位相差を流速に変換する

- ・ボクセル内で流速分布が一定と仮定
- ・励起、双極磁場印可、NMR信号の間の時刻ずれを無視 (流速場を方向、定常と仮定)

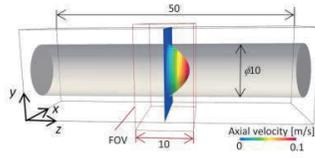
## 計算例：定常円筒流れ

### 円筒流れ

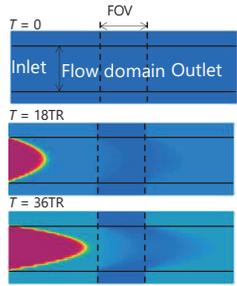
軸方向速度: 0.1 m/s (max)  
MRI voxel: 32x32x1

### MRIスキャン条件

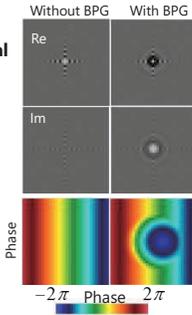
TE: 3 ms / TR: 5 ms  
Flip angle: 5 deg. Venc: 0.12 m/s



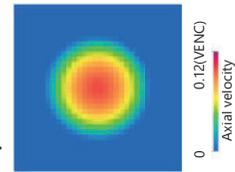
### 磁化輸送



### MRI signal collection

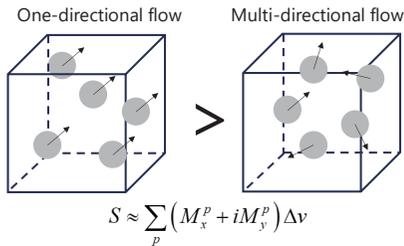


### 速度再構成



## 流体計測の拡張：ボクセル内の速度分散

### Multiple directional flow in a voxel causes MRI signal loss (intravoxel dephasing)



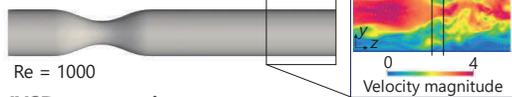
#### For diffusion:

Translational diffusion  
(cf., Price et al.,  
*Concepts Magn Reson*, 1997)

#### For flow disturbances:

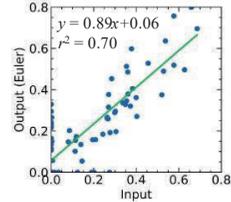
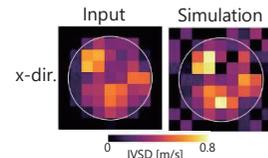
Intravoxel velocity standard deviation (IVSD)  
(Dyverfeldt et al., *MRM*, 2006)

### Ex.) Flow in downside of stenosis



### IVSD computation

(2D scan, 8x8x1, TE = 0.5 ms)



Velocity distribution: assumed to be Gaussian



## MI レクチャーノートシリーズ刊行にあたり

本レクチャーノートシリーズは、文部科学省 21 世紀 COE プログラム「機能数学の構築と展開」(H15-19 年度)において作成した COE Lecture Notes の続刊であり、文部科学省大学院教育改革支援プログラム「産業界が求める数学博士と新修士養成」(H19-21 年度)および、同グローバル COE プログラム「マス・フォア・インダストリ教育研究拠点」(H20-24 年度)において行われた講義の講義録として出版されてきた。平成 23 年 4 月のマス・フォア・インダストリ研究所 (IMI) 設立と平成 25 年 4 月の IMI の文部科学省共同利用・共同研究拠点として「産業数学の先進的・基礎的共同研究拠点」の認定を受け、今後、レクチャーノートは、マス・フォア・インダストリに関わる国内外の研究者による講義の講義録、会議録等として出版し、マス・フォア・インダストリの本格的な展開に資するものとする。

2022 年 10 月

マス・フォア・インダストリ研究所  
所長 梶原 健司

## 2024年度採択分 九州大学マス・フォア・インダストリ研究所 共同利用研究集会 自動車性能の飛躍的向上を目指す Data-Driven 設計

発行 2025年 2月 24日  
編集 中澤嵩  
発行 九州大学マス・フォア・インダストリ研究所  
九州大学大学院数理学府  
〒819-0395 福岡市西区元岡744  
九州大学数理・IMI 事務室  
TEL 092-802-4402 FAX 092-802-4405  
URL <https://www.imi.kyushu-u.ac.jp/>

印刷 城島印刷株式会社  
〒810-0012 福岡市中央区白金 2 丁目 9 番 6 号  
TEL 092-531-7102 FAX 092-524-4411

## シリーズ既刊

Issue	Author/Editor	Title	Published
COE Lecture Note	Mitsuhiro T. NAKAO Kazuhiro YOKOYAMA	Computer Assisted Proofs - Numeric and Symbolic Approaches - 199pages	August 22, 2006
COE Lecture Note	M.J.Shai HARAN	Arithmetical Investigations - Representation theory, Orthogonal polynomials and Quantum interpolations- 174pages	August 22, 2006
COE Lecture Note Vol.3	Michal BENES Masato KIMURA Tatsuyuki NAKAKI	Proceedings of Czech-Japanese Seminar in Applied Mathematics 2005 155pages	October 13, 2006
COE Lecture Note Vol.4	宮田 健治	辺要素有限要素法による磁界解析 - 機能数理学特別講義 21pages	May 15, 2007
COE Lecture Note Vol.5	Francois APERY	Univariate Elimination Subresultants - Bezout formula, Laurent series and vanishing conditions - 89pages	September 25, 2007
COE Lecture Note Vol.6	Michal BENES Masato KIMURA Tatsuyuki NAKAKI	Proceedings of Czech-Japanese Seminar in Applied Mathematics 2006 209pages	October 12, 2007
COE Lecture Note Vol.7	若山 正人 中尾 充宏	九州大学産業技術数理研究センター キックオフミーティング 138pages	October 15, 2007
COE Lecture Note Vol.8	Alberto PARMEGGIANI	Introduction to the Spectral Theory of Non-Commutative Harmonic Oscillators 233pages	January 31, 2008
COE Lecture Note Vol.9	Michael I. TRIBELSKY	Introduction to Mathematical modeling 23pages	February 15, 2008
COE Lecture Note Vol.10	Jacques FARAUT	Infinite Dimensional Spherical Analysis 74pages	March 14, 2008
COE Lecture Note Vol.11	Gerrit van DIJK	Gelfand Pairs And Beyond 60pages	August 25, 2008
COE Lecture Note Vol.12	Faculty of Mathematics, Kyushu University	Consortium "MATH for INDUSTRY" First Forum 87pages	September 16, 2008
COE Lecture Note Vol.13	九州大学大学院 数理学研究院	プロシーディング「損保数理に現れる確率モデル」 — 日新火災・九州大学 共同研究2008年11月 研究会 — 82pages	February 6, 2009

## シリーズ既刊

Issue	Author/Editor	Title	Published
COE Lecture Note Vol.14	Michal Beneš, Tohru Tsujikawa Shigetoshi Yazaki	Proceedings of Czech-Japanese Seminar in Applied Mathematics 2008 77pages	February 12, 2009
COE Lecture Note Vol.15	Faculty of Mathematics, Kyushu University	International Workshop on Verified Computations and Related Topics 129pages	February 23, 2009
COE Lecture Note Vol.16	Alexander Samokhin	Volume Integral Equation Method in Problems of Mathematical Physics 50pages	February 24, 2009
COE Lecture Note Vol.17	矢嶋 徹 及川 正行 梶原 健司 辻 英一 福本 康秀	非線形波動の数理と物理 66pages	February 27, 2009
COE Lecture Note Vol.18	Tim Hoffmann	Discrete Differential Geometry of Curves and Surfaces 75pages	April 21, 2009
COE Lecture Note Vol.19	Ichiro Suzuki	The Pattern Formation Problem for Autonomous Mobile Robots —Special Lecture in Functional Mathematics— 23pages	April 30, 2009
COE Lecture Note Vol.20	Yasuhide Fukumoto Yasunori Maekawa	Math-for-Industry Tutorial: Spectral theories of non-Hermitian operators and their application 184pages	June 19, 2009
COE Lecture Note Vol.21	Faculty of Mathematics, Kyushu University	Forum "Math-for-Industry" Casimir Force, Casimir Operators and the Riemann Hypothesis 95pages	November 9, 2009
COE Lecture Note Vol.22	Masakazu Suzuki Hoon Hong Hirokazu Anai Chee Yap Yousuke Sato Hiroshi Yoshida	The Joint Conference of ASCM 2009 and MACIS 2009: Asian Symposium on Computer Mathematics Mathematical Aspects of Computer and Information Sciences 436pages	December 14, 2009
COE Lecture Note Vol.23	荒川 恒男 金子 昌信	多重ゼータ値入門 111pages	February 15, 2010
COE Lecture Note Vol.24	Fulton B.Gonzalez	Notes on Integral Geometry and Harmonic Analysis 125pages	March 12, 2010
COE Lecture Note Vol.25	Wayne Rossman	Discrete Constant Mean Curvature Surfaces via Conserved Quantities 130pages	May 31, 2010
COE Lecture Note Vol.26	Mihai Ciucu	Perfect Matchings and Applications 66pages	July 2, 2010

## シリーズ既刊

Issue	Author/Editor	Title	Published
COE Lecture Note Vol.27	九州大学大学院 数理学研究院	Forum “Math-for-Industry” and Study Group Workshop Information security, visualization, and inverse problems, on the basis of optimization techniques 100pages	October 21, 2010
COE Lecture Note Vol.28	ANDREAS LANGER	MODULAR FORMS, ELLIPTIC AND MODULAR CURVES LECTURES AT KYUSHU UNIVERSITY 2010 62pages	November 26, 2010
COE Lecture Note Vol.29	木田 雅成 原田 昌晃 横山 俊一	Magma で広がる数学の世界 157pages	December 27, 2010
COE Lecture Note Vol.30	原 隆 松井 卓 廣島 文生	Mathematical Quantum Field Theory and Renormalization Theory 201pages	January 31, 2011
COE Lecture Note Vol.31	若山 正人 福本 康秀 高木 剛 山本 昌宏	Study Group Workshop 2010 Lecture & Report 128pages	February 8, 2011
COE Lecture Note Vol.32	Institute of Mathematics for Industry, Kyushu University	Forum “Math-for-Industry” 2011 “TSUNAMI-Mathematical Modelling” Using Mathematics for Natural Disaster Prediction, Recovery and Provision for the Future 90pages	September 30, 2011
COE Lecture Note Vol.33	若山 正人 福本 康秀 高木 剛 山本 昌宏	Study Group Workshop 2011 Lecture & Report 140pages	October 27, 2011
COE Lecture Note Vol.34	Adrian Muntean Vladimír Chalupecký	Homogenization Method and Multiscale Modeling 72pages	October 28, 2011
COE Lecture Note Vol.35	横山 俊一 夫 紀恵 林 卓也	計算機代数システムの進展 210pages	November 30, 2011
COE Lecture Note Vol.36	Michal Beneš Masato Kimura Shigetoshi Yazaki	Proceedings of Czech-Japanese Seminar in Applied Mathematics 2010 107pages	January 27, 2012
COE Lecture Note Vol.37	若山 正人 高木 剛 Kirill Morozov 平岡 裕章 木村 正人 白井 朋之 西井 龍映 柴 伸一郎 穴井 宏和 福本 康秀	平成23年度 数学・数理科学と諸科学・産業との連携研究ワーク ショップ 拡がっていく数学 ～期待される“見えない力”～ 154pages	February 20, 2012

## シリーズ既刊

Issue	Author/Editor	Title	Published
COE Lecture Note Vol.38	Fumio Hiroshima Itaru Sasaki Herbert Spohn Akito Suzuki	Enhanced Binding in Quantum Field Theory 204pages	March 12, 2012
COE Lecture Note Vol.39	Institute of Mathematics for Industry, Kyushu University	Multiscale Mathematics: Hierarchy of collective phenomena and interrelations between hierarchical structures 180pages	March 13, 2012
COE Lecture Note Vol.40	井ノ口順一 太田 泰広 寛 三郎 梶原 健司 松浦 望	離散可積分系・離散微分幾何チュートリアル2012 152pages	March 15, 2012
COE Lecture Note Vol.41	Institute of Mathematics for Industry, Kyushu University	Forum “Math-for-Industry” 2012 “Information Recovery and Discovery” 91pages	October 22, 2012
COE Lecture Note Vol.42	佐伯 修 若山 正人 山本 昌宏	Study Group Workshop 2012 Abstract, Lecture & Report 178pages	November 19, 2012
COE Lecture Note Vol.43	Institute of Mathematics for Industry, Kyushu University	Combinatorics and Numerical Analysis Joint Workshop 103pages	December 27, 2012
COE Lecture Note Vol.44	萩原 学	モダン符号理論からポストモダン符号理論への展望 107pages	January 30, 2013
COE Lecture Note Vol.45	金山 寛	Joint Research Workshop of Institute of Mathematics for Industry (IMI), Kyushu University “Propagation of Ultra-large-scale Computation by the Domain-decomposition-method for Industrial Problems (PUCDIP 2012)” 121pages	February 19, 2013
COE Lecture Note Vol.46	西井 龍映 栄 伸一郎 岡田 勘三 落合 啓之 小磯 深幸 斎藤 新悟 白井 朋之	科学・技術の研究課題への数学アプローチ —数学モデリングの基礎と展開— 325pages	February 28, 2013
COE Lecture Note Vol.47	SOO TECK LEE	BRANCHING RULES AND BRANCHING ALGEBRAS FOR THE COMPLEX CLASSICAL GROUPS 40pages	March 8, 2013
COE Lecture Note Vol.48	溝口 佳寛 脇 隼人 平坂 貢 谷口 哲至 鳥袋 修	博多ワークショップ「組み合わせとその応用」 124pages	March 28, 2013

## シリーズ既刊

Issue	Author/Editor	Title	Published
COE Lecture Note Vol.49	照井 章 小原 功任 濱田 龍義 横山 俊一 穴井 宏和 横田 博史	マス・フォア・インダストリ研究所 共同利用研究集会 II 数式処理研究と産学連携の新たな発展 137pages	August 9, 2013
MI Lecture Note Vol.50	Ken Anjyo Hiroyuki Ochiai Yoshinori Dobashi Yoshihiro Mizoguchi Shizuo Kaji	Symposium MEIS2013: Mathematical Progress in Expressive Image Synthesis 154pages	October 21, 2013
MI Lecture Note Vol.51	Institute of Mathematics for Industry, Kyushu University	Forum “Math-for-Industry” 2013 “The Impact of Applications on Mathematics” 97pages	October 30, 2013
MI Lecture Note Vol.52	佐伯 修 岡田 勘三 高木 剛 若山 正人 山本 昌宏	Study Group Workshop 2013 Abstract, Lecture & Report 142pages	November 15, 2013
MI Lecture Note Vol.53	四方 義啓 櫻井 幸一 安田 貴徳 Xavier Dahan	平成25年度 九州大学マス・フォア・インダストリ研究所 共同利用研究集会 安全・安心社会基盤構築のための代数構造 ～サイバー社会の信頼性確保のための数理学～ 158pages	December 26, 2013
MI Lecture Note Vol.54	Takashi Takiguchi Hiroshi Fujiwara	Inverse problems for practice, the present and the future 93pages	January 30, 2014
MI Lecture Note Vol.55	栄 伸一郎 溝口 佳寛 脇 隼人 洪田 敬史	Study Group Workshop 2013 数学協働プログラム Lecture & Report 98pages	February 10, 2014
MI Lecture Note Vol.56	Yoshihiro Mizoguchi Hayato Waki Takafumi Shibuta Tetsuji Taniguchi Osamu Shimabukuro Makoto Tagami Hirotake Kurihara Shuya Chiba	Hakata Workshop 2014 ~ Discrete Mathematics and its Applications ~ 141pages	March 28, 2014
MI Lecture Note Vol.57	Institute of Mathematics for Industry, Kyushu University	Forum “Math-for-Industry” 2014: “Applications + Practical Conceptualization + Mathematics = fruitful Innovation” 93pages	October 23, 2014
MI Lecture Note Vol.58	安生健一 落合啓之	Symposium MEIS2014: Mathematical Progress in Expressive Image Synthesis 135pages	November 12, 2014

## シリーズ既刊

Issue	Author/Editor	Title	Published
MI Lecture Note Vol.59	西井 龍映 岡田 勘三 梶原 健司 高木 剛 若山 正人 脇 隼人 山本 昌宏	Study Group Workshop 2014 数学協働プログラム Abstract, Lecture & Report 196pages	November 14, 2014
MI Lecture Note Vol.60	西浦 博	平成26年度九州大学 IMI 共同利用研究・研究集会 (I) 感染症数理モデルの実用化と産業及び政策での活用のための新たな展開 120pages	November 28, 2014
MI Lecture Note Vol.61	溝口 佳寛 Jacques Garrigue 萩原 学 Reynald Affeldt	研究集会 高信頼な理論と実装のための定理証明および定理証明器 Theorem proving and provers for reliable theory and implementations (TPP2014) 138pages	February 26, 2015
MI Lecture Note Vol.62	白井 朋之	Workshop on “ $\beta$ -transformation and related topics” 59pages	March 10, 2015
MI Lecture Note Vol.63	白井 朋之	Workshop on “Probabilistic models with determinantal structure” 107pages	August 20, 2015
MI Lecture Note Vol.64	落合 啓之 土橋 宜典	Symposium MEIS2015: Mathematical Progress in Expressive Image Synthesis 124pages	September 18, 2015
MI Lecture Note Vol.65	Institute of Mathematics for Industry, Kyushu University	Forum “Math-for-Industry” 2015 “The Role and Importance of Mathematics in Innovation” 74pages	October 23, 2015
MI Lecture Note Vol.66	岡田 勘三 藤澤 克己 白井 朋之 若山 正人 脇 隼人 Philip Broadbridge 山本 昌宏	Study Group Workshop 2015 Abstract, Lecture & Report 156pages	November 5, 2015
MI Lecture Note Vol.67	Institute of Mathematics for Industry, Kyushu University	IMI-La Trobe Joint Conference “Mathematics for Materials Science and Processing” 66pages	February 5, 2016
MI Lecture Note Vol.68	古庄 英和 小谷 久寿 新甫 洋史	結び目と Grothendieck-Teichmüller 群 116pages	February 22, 2016
MI Lecture Note Vol.69	土橋 宜典 鍛冶 静雄	Symposium MEIS2016: Mathematical Progress in Expressive Image Synthesis 82pages	October 24, 2016
MI Lecture Note Vol.70	Institute of Mathematics for Industry, Kyushu University	Forum “Math-for-Industry” 2016 “Agriculture as a metaphor for creativity in all human endeavors” 98pages	November 2, 2016
MI Lecture Note Vol.71	小磯 深幸 二宮 嘉行 山本 昌宏	Study Group Workshop 2016 Abstract, Lecture & Report 143pages	November 21, 2016

## シリーズ既刊

Issue	Author/Editor	Title	Published
MI Lecture Note Vol.72	新井 朝雄 小嶋 泉 廣島 文生	Mathematical quantum field theory and related topics 133pages	January 27, 2017
MI Lecture Note Vol.73	穴田 啓晃 Kirill Morozov 須賀 祐治 奥村 伸也 櫻井 幸一	Secret Sharing for Dependability, Usability and Security of Network Storage and Its Mathematical Modeling 211pages	March 15, 2017
MI Lecture Note Vol.74	QUISPEL, G. Reinout W. BADER, Philipp MCLAREN, David I. TAGAMI, Daisuke	IMI-La Trobe Joint Conference Geometric Numerical Integration and its Applications 71pages	March 31, 2017
MI Lecture Note Vol.75	手塚 集 田上 大助 山本 昌宏	Study Group Workshop 2017 Abstract, Lecture & Report 118pages	October 20, 2017
MI Lecture Note Vol.76	宇田川誠一	Tzitzéica 方程式の有限間隙解に付随した極小曲面の構成理論 —Tzitzéica 方程式の楕円関数解を出発点として— 68pages	August 4, 2017
MI Lecture Note Vol.77	松谷 茂樹 佐伯 修 中川 淳一 田上 大助 上坂 正晃 Pierluigi Cesana 濱田 裕康	平成29年度 九州大学マス・フォア・インダストリ研究所 共同利用研究会 (I) 結晶の界面, 転位, 構造の数理 148pages	December 20, 2017
MI Lecture Note Vol.78	瀧澤 重志 小林 和博 佐藤憲一郎 斎藤 努 清水 正明 間瀬 正啓 藤澤 克樹 神山 直之	平成29年度 九州大学マス・フォア・インダストリ研究所 プロジェクト研究 研究会 (I) 防災・避難計画の数理モデルの高度化と社会実装へ向けて 136pages	February 26, 2018
MI Lecture Note Vol.79	神山 直之 畔上 秀幸	平成29年度 AIMaP チュートリアル 最適化理論の基礎と応用 96pages	February 28, 2018
MI Lecture Note Vol.80	Kirill Morozov Hiroaki Anada Yuji Suga	IMI Workshop of the Joint Research Projects Cryptographic Technologies for Securing Network Storage and Their Mathematical Modeling 116pages	March 30, 2018
MI Lecture Note Vol.81	Tsuyoshi Takagi Masato Wakayama Keisuke Tanaka Noboru Kunihiro Kazufumi Kimoto Yasuhiko Ikematsu	IMI Workshop of the Joint Research Projects International Symposium on Mathematics, Quantum Theory, and Cryptography 246pages	September 25, 2019
MI Lecture Note Vol.82	池森 俊文	令和2年度 AIMaP チュートリアル 新型コロナウイルス感染症にかかわる諸問題の数理 145pages	March 22, 2021

## シリーズ既刊

Issue	Author/Editor	Title	Published
MI Lecture Note Vol.83	早川健太郎 軸丸 芳揮 横須賀洋平 可香谷 隆 林 和希 堺 雄亮	シェル理論・膜理論への微分幾何学からのアプローチと その建築曲面設計への応用 49pages	July 28, 2021
MI Lecture Note Vol.84	Taketoshi Kawabe Yoshihiro Mizoguchi Junichi Kako Masakazu Mukai Yuji Yasui	SICE-JSAE-AIMaP Tutorial Advanced Automotive Control and Mathematics 110pages	December 27, 2021
MI Lecture Note Vol.85	Hiroaki Anada Yasuhiko Ikematsu Koji Nuida Satsuya Ohata Yuntao Wang	IMI Workshop of the Joint Usage Research Projects Exploring Mathematical and Practical Principles of Secure Computation and Secret Sharing 114pages	February 9, 2022
MI Lecture Note Vol.86	濱田 直希 穴井 宏和 梅田 裕平 千葉 一永 佐藤 寛之 能島 裕介 加藤田雄太朗 一木 俊助 早野 健太 佐伯 修	2020年度採択分 九州大学マス・フォア・インダストリ研究所 共同利用研究集会 進化計算の数理 135pages	February 22, 2022
MI Lecture Note Vol.87	Osamu Saeki, Ho Tu Bao, Shizuo Kaji, Kenji Kajiwara, Nguyen Ha Nam, Ta Hai Tung, Melanie Roberts, Masato Wakayama, Le Minh Ha, Philip Broadbridge	Proceedings of Forum “Math-for-Industry” 2021 -Mathematics for Digital Economy- 122pages	March 28, 2022
MI Lecture Note Vol.88	Daniel PACKWOOD Pierluigi CESANA, Shigenori FUJIKAWA, Yasuhide FUKUMOTO, Petros SOFRONIS, Alex STAYKOV	Perspectives on Artificial Intelligence and Machine Learning in Materials Science, February 4-6, 2022 74pages	November 8, 2022

## シリーズ既刊

Issue	Author/Editor	Title	Published
MI Lecture Note Vol.89	松谷 茂樹 落合 啓之 井上 和俊 小磯 深幸 佐伯 修 白井 朋之 垂水 竜一 内藤 久資 中川 淳一 濱田 裕康 松江 要 加葉田雄太郎	2022年度採択分 九州大学マス・フォア・インダストリ研究所 共同利用研究集会 材料科学における幾何と代数 III 356pages	December 7, 2022
MI Lecture Note Vol.90	中山 尚子 谷川 拓司 品野 勇治 近藤 正章 石原 亨 鍛冶 静雄 藤澤 克樹	2022年度採択分 九州大学マス・フォア・インダストリ研究所 共同利用研究集会 データ格付けサービス実現のための数理基盤の構築 58pages	December 12, 2022
MI Lecture Note Vol.91	Katsuki Fujisawa Shizuo Kaji Toru Ishihara Masaaki Kondo Yuji Shinano Takuji Tanigawa Naoko Nakayama	IMI Workshop of the Joint Usage Research Projects Construction of Mathematical Basis for Realizing Data Rating Service 610pages	December 27, 2022
MI Lecture Note Vol.92	丹田 聡 三宮 俊 廣島 文生	2022年度採択分 九州大学マス・フォア・インダストリ研究所 共同利用研究集会 時間・量子測定・準古典近似の理論と実験 ～古典論と量子論の境界～ 150pages	January 6, 2023
MI Lecture Note Vol.93	Philip Broadbridge Luke Bennetts Melanie Roberts Kenji Kajiwara	Proceedings of Forum “Math-for-Industry” 2022 -Mathematics of Public Health and Sustainability- 170pages	June 19, 2023
MI Lecture Note Vol.94	國廣 昇 池松 泰彦 伊豆 哲也 穴田 啓晃 縫田 光司	2023年度採択分 九州大学マス・フォア・インダストリ研究所 共同利用研究集会 現代暗号に対する安全性解析・攻撃の数理 260pages	January 11, 2024
MI Lecture Note Vol.96	澤田 茉伊	2023年度採択分 九州大学マス・フォア・インダストリ研究所 共同利用研究集会 デジタル化時代に求められる斜面防災の思考法 70pages	March 18, 2024

## シリーズ既刊

Issue	Author/Editor	Title	Published
MI Lecture Note Vol.97	Shariffah Suhaila Syed Jamaludin Zaiton Mat Isa Nur Arina Bazilah Aziz Taufiq Khairi Ahmad Khairuddin Shaymaa M.H.Darwish Ahmad Razin Zainal Abidin Norhaiza Ahmad Zainal Abdul Aziz Hang See Pheng Mohd Ali Khameini Ahmad	International Project Research-Workshop (I) Proceedings of 4 <sup>th</sup> Malaysia Mathematics in Industry Study Group (MMISG2023) 172pages	March 28, 2024



Institute of Mathematics for Industry  
Kyushu University

九州大学マス・フォア・インダストリ研究所  
九州大学大学院 数理学府

〒819-0395 福岡市西区元岡744 TEL 092-802-4402 FAX 092-802-4405  
URL <https://www.imi.kyushu-u.ac.jp/>