

九州大学 IMI 共同利用研究（短期共同研究）

エクスペンダーグラフにまつわる数理学と応用 2

公開型講演 アブストラクト集

2026 年 9 月 7 日（月）～9 月 10 日（木）

九州大学 伊都キャンパス W 1 号館 D 棟 4 階 IMI オーディトリウム（W1-D-413）/ Zoom ハイブリッド

松田 隼一朗（ソウル大学校、韓国）9 月 7 日（月）14:00-15:00

題目： 量子グラフの Alon-Boppana の下界について

Title： On the Alon-Boppana bound for quantum graphs

概要： 量子グラフとは頂点集合上の関数環を非可換環に置き換えた古典グラフの非可換類似物である。古典グラフの場合と同様に、スペクトルギャップに共通の下界を持つ d -正則量子グラフの族としてエクスペンダー量子グラフが定義される。Alon-Boppana の下界とは d -正則エクスペンダーの隣接行列の第二固有値の漸近的な下界 $2\sqrt{d-1}$ のことであるが、一般の量子グラフについて同じ評価が成り立つかは明らかになっていない。本講演では、エクスペンダー量子グラフへの近年のアプローチを概観し、Alon-Boppana の下界に関する部分的な結果を述べる。

Abstract： Quantum graphs are a non-commutative analogue of classical graphs, replacing the function algebra over the vertices with a non-commutative algebra. As in the classical case, expander quantum graphs are defined as d -regular graphs with a common lower bound for the spectral gap. Alon-Boppana bound is the asymptotic lower bound $2\sqrt{d-1}$ for the second-largest eigenvalue of d -regular expander graphs, which remains unknown for general quantum graphs. In this talk, I will give an overview of recent approaches to expander quantum graphs and present partial results on the Alon-Boppana bound.

三澤 竜太郎（東北大学） 9 月 7 日（月）15:30-16:30

題目： 有限量子空間上の量子グラフ：独立性、Lovász 型 theta 数、Shannon capacity

Title： Quantum Graphs on Finite Quantum Spaces: Independence, Lovász-Type Theta Numbers, and Shannon Capacity

概要： 有限グラフの独立数は、互いに隣接しない頂点からなる部分集合の最大サイズを測る。この量を strong 積の反復に沿って正則化すると Shannon capacity が得られ、Lovász theta 数はその計算可能な上界を与える。本講演では、有限集合を有限次元 C^* -代数 A

に置き換え、量子隣接作用素 Γ によって記述される有限量子空間上の量子グラフを考える。量子グラフでは独立性の量子化が一意ではないため、 $\mathbf{A}$ 内の射影 $\mathbf{p}$ を量子部分集合とみなし、 Γ に対応する辺空間 $\mathbf{E}_\Gamma$ が圧縮後に消える条件 $\mathbf{L}_\mathbf{p} \mathbf{E}_\Gamma \mathbf{L}_\mathbf{p} = \mathbf{0}$ を満たすものを独立とする。ここで、 $\mathbf{L}_\mathbf{p}$ は $\mathbf{L}_\mathbf{p}(\mathbf{x}) = \mathbf{p}\mathbf{x}$ で定まる左乗法作用素である。このような射影の標準トレースによる最大サイズを量子独立数とし、量子 strong 積に関する正則化を、対応する量子 Shannon capacity と定める。さらに、通常的作用素正性と量子 Schur 積に由来する正性を用いて、量子隣接作用素から直接記述される Lovász 型半正定値計画を導入する。可換な場合には通常の独立数、Lovász theta 数、および Shannon capacity が回復されることを説明し、theta 型量の strong 積に対する乗法性、既存の量子 Lovász 型不変量との関係、および漸近容量の上界としての適切性を論じる。最後に、行列代数上に現れる古典対応物を持たない量子グラフを題材として、対称性による半正定値計画の縮約、厳密値計算の方法、および今後の問題を紹介する。

Abstract : For a finite graph, the independence number is the maximum size of a set of pairwise nonadjacent vertices. Regularizing this parameter under repeated strong products gives the Shannon capacity, while the Lovász theta number provides a computable upper bound. In this talk, we replace a finite set by a finite-dimensional $\mathbf{C}^*$ -algebra $\mathbf{A}$ and consider quantum graphs on the resulting finite quantum space, described by a quantum adjacency operator Γ . Since there is more than one possible notion of quantum independence, we focus on projections $\mathbf{p}$ in $\mathbf{A}$ for which the edge space $\mathbf{E}_\Gamma$ vanishes after compression, namely $\mathbf{L}_\mathbf{p} \mathbf{E}_\Gamma \mathbf{L}_\mathbf{p} = \mathbf{0}$, where $\mathbf{L}_\mathbf{p}$ denotes left multiplication by $\mathbf{p}$. Maximizing the trace size of such projections defines a quantum independence number, and its regularization under the quantum strong product defines the associated quantum Shannon capacity. We then introduce Lovász-type semidefinite programs formulated directly in terms of the quantum adjacency operator, using both ordinary operator positivity and positivity induced by the quantum Schur product. We explain how the classical independence number, Lovász theta number, and Shannon capacity are recovered in the commutative case, and discuss multiplicativity under strong products, comparison with existing quantum Lovász-type parameters, and the conditions required for asymptotic capacity bounds. Finally, we consider nonclassical quantum graphs on matrix algebras and present symmetry reduction of the corresponding semidefinite programs, methods for exact-value computations, and related open problems.

山崎 義徳（愛媛大学） 9 月 8 日（火） 11:00-12:00

題目： 有限体上の二次超曲面に対する Schreier グラフの性質について

Title : On properties of Schreier graphs for quadratic hypersurfaces over finite fields

概要： 本講演では、有限体上の多変数二次形式に付随する鏡映群が、その非零零点集合に作用することによって定まる Schreier グラフについて考察する。短い閉路の数え上げをはじめとするグラフの基本的な性質を紹介するとともに、鏡映群の部分群構造を用いて、グラフ

の連結性やエクspander性についても議論する。本講演の内容は、福岡大学の佐竹翔平氏との共同研究に基づく。

Abstract : In this talk, we study the Schreier graph defined by the action of the associated reflection group on the nontrivial zero locus of a multivariable quadratic form over a finite field. We present basic properties of this graph, including the enumeration of short cycles, and discuss its connectivity and expansion properties using the subgroup structure of the reflection group. This talk is based on joint work with Shohei Satake (Fukuoka University).

行田 康晃（名古屋大学） 9月8日（火）14:00-15:00

題目： 一般化マルコフ数に対応するマルコフーラグランジュ定数

Title : Markov-Lagrange Constants Associated with Generalized Markov Numbers

概要： 古典的なマルコフ数とは、マルコフ方程式 $x^2 + y^2 + z^2 = 3xyz$ の正整数解に現れる整数であり、ディオファントス近似やマルコフーラグランジュスペクトラムの離散部分と深く関係している。本講演では、この関係を一般化マルコフ方程式 $x^2 + y^2 + z^2 + k_1 yz + k_2 zx + k_3 xy = (3 + k_1 + k_2 + k_3)xyz$ の枠組みへ拡張する方法を解説する。ここで k_1, k_2, k_3 は非負整数であり、その正整数解に現れる整数を一般化マルコフ数と呼ぶ。主定理として、 (k_1, k_2, k_3) -一般化マルコフ数 n とその現れる位置 i から定まる量 $\frac{\sqrt{((3 + k_1 + k_2 + k_3)n - k_i)^2 - 4}}{n}$ が、ある二次無理数のマルコフーラグランジュ定数として実現されることを紹介する。

Abstract : Classical Markov numbers are the integers appearing in positive integer solutions of the Markov equation $x^2 + y^2 + z^2 = 3xyz$. They play an important role in Diophantine approximation and are known to describe the discrete part of the Markov-Lagrange spectrum. In this talk, I will explain how this relationship extends to generalized Markov numbers associated with the generalized Markov equation $x^2 + y^2 + z^2 + k_1 yz + k_2 zx + k_3 xy = (3 + k_1 + k_2 + k_3)xyz$, where k_1, k_2 , and k_3 are nonnegative integers. As the main theorem, I will show that, for a (k_1, k_2, k_3) -generalized Markov number n and the position i in which it appears, the quantity $\frac{\sqrt{((3 + k_1 + k_2 + k_3)n - k_i)^2 - 4}}{n}$ is realized as the Markov-Lagrange constant of a certain quadratic irrational number.

題目： 群作用署名方式：基礎知識とグラフ理論的応用可能性

Title : Group Action Signatures: Foundations and Graph-Theoretic Opportunities

概要： 本講演は英語で行われますが、スライドは英語と日本語の二か国語です。暗号学の専門知識を求める聴衆を対象に、デジタル署名とその暗号学的基礎を紹介します。

我々は、群作用に基づく署名に焦点を当てます。これは近年注目を集めている有望な耐量子計算機暗号の候補で、従来の方式とは異なり、量子コンピュータに脆弱な数論的仮定に依存しません。その構築方法、依存する暗号学的仮定、および現在の限界について説明します。

講演の核心部分では、これらの署名をグラフ理論的視点から探求します。特定の群作用署名の構築がグラフ理論を用いて自然に解釈できることを示し、エクспанダーグラフや二部グラフが、効率的で安全な方式の構築に新たな道筋を提供しうることを論じます。我々は、そのような応用に求められている特定グラフの性質を探求します。現在の知識では即時の実装は困難ですが、グラフ理論家が貢献できる具体的な未解決問題を提示します。本講演は、暗号学とグラフ理論の橋渡しを目指し、これら未踏のつながりを共同で探求することを目的としています。

Abstract : This talk in English, but with dual-language slides (English/Japanese), introduces digital signatures and their cryptographic foundations to an audience unfamiliar with cryptography. We focus on group action-based signatures, a promising post-quantum candidate that has attracted significant research interest in recent years: unlike traditional schemes, they do not rely on number-theoretic assumptions which are quantum-vulnerable. We explain their construction, the cryptographic assumptions they depend on, and their current limitations.

The core of the talk explores a graph-theoretic perspective on these signatures. We demonstrate how certain group action signature constructions can be naturally interpreted using graph theory, and argue that expander graphs and bipartite graphs may offer new avenues for constructing efficient and secure schemes. We identify specific graph properties that would be required for such applications. While our current knowledge prevents immediate implementation, we lay out concrete open problems where graph theorists could make impactful contributions. The talk aims to reinforce the links between cryptography and graph theory, inviting collaboration to explore these uncharted connections.

野崎 雄太（北海道大学）

9 月 9 日（水） 11:00-12:00

題目： 組合せ遷移にまつわる数学

Title : Mathematics behind combinatorial reconfiguration

概要： 計算機科学、とりわけアルゴリズム分野において、組合せ遷移と呼ばれる問題群が近年盛んに研究されている。たとえば、グラフの頂点彩色が 2 つ与えられたとき、一方の彩色から頂点の色を 1 つずつ変更し、彩色の条件を満たしつつ他方に到達できるか、という判定問題の計算複雑性が挙げられる。本講演では、組合せ遷移に関する共同研究を通して出会った様々な数学を紹介する。

Abstract : Combinatorial reconfiguration has been studied extensively in theoretical computer science, particularly in the area of algorithms. For example, given two vertex colorings of a graph, one may ask whether it is possible to transform one coloring into the other by changing the color of a single vertex at a time while maintaining a proper coloring throughout the process. The computational complexity of this decision problem has been investigated extensively. In this talk, I will introduce several mathematical topics that I encountered through my collaborative research on combinatorial reconfiguration.

泉 泰介（大阪大学）

9 月 9 日（水） 14:00-15:00

題目： エクспанダーグラフと分散計算

Title : Expander Graphs and Distributed Computing

概要： 分散計算とは、リンクにて結合された複数の計算主体がメッセージ交換を通じて協調的に計算・系制御を行う枠組みである。アルゴリズム理論においては、特にグラフ理論的な側面から見た分散計算の計算可能性および計算複雑性に関する研究がおよそ半世紀にわたり続いており、多種多様な計算モデル・問題群に対する知見が得られている。本発表では、分散計算の文脈においてグラフのエクспанダー性がどのように活用・応用されているかを概説する。

Abstract : Distributed computing is a computational framework in which multiple computing entities connected by communication links collaboratively perform computation and control systems through the exchange of messages. In the field of algorithm theory, the computability and computational complexity of distributed computing, particularly from a graph-theoretic perspective, have been studied for roughly half a century. It develops a rich theoretical field providing a broad range of insights into diverse computational models and problem classes. In this talk, I will provide an overview of how the expansion properties of graphs are exploited and applied in the context of distributed computing.

題目： 圏上の非可換確率論 — 基礎から量子場まで —

Title : Noncommutative Probability on Categories — From Foundation to Quantum Fields

概要： 本講演では、「圏代数」と「圏上の状態」のペアを研究することで、圏論と非可換確率論（量子確率論）を橋渡しする新しい枠組みである「圏上の非可換確率論」を紹介する。

本講演で扱う圏代数は、任意の小さな圏に対して定義される単位的代数である。これは圏の射の合成構造を反映した関数の畳み込み代数として定義される。この概念は、群代数、モノイド代数、および行列代数を包含するものであり、「一般化された行列代数」として理解することができる。特に、圏が $\dagger$ -圏（ダガー圏）であり、リグ（半環） R が適切な対合（例えば複素数体 C のような $*$ -リグ）を持つ場合、 R 上の圏代数は自然に $*$ -代数となる。

次に、これらの圏代数上の線型汎関数として「圏上の状態」を導入する。状態は射の集合上の正定値関数を与え、集合（離散圏）上の確率測度を一般の圏へと概念的に一般化したものと見なすことができる。さらに、与えられた任意の状態に対して、GNS（ゲルファント＝ナイマルク＝シーガル）構成の一般化を通じて、圏代数の表現を構築することが可能である。これにより、抽象的な圏の射を（半）ヒルベルト空間（正確にはリグ上の半ヒルベルト加群）上の作用素として理解することができるようになる。

これらの基礎事項の説明に続き、本枠組みに基づく量子場への新しいアプローチを提示する。その基本的なアイデアは、時空に対応する特定の圏における圏代数と状態を利用することで、圏論的構造としての「相対論」と、非可換確率論的構造としての「量子性」を直接的に統合することにある。時間が許せば、この新しい枠組みと、代数的量子場理論（AQFT）やトポロジカル量子場理論（TQFT）といった従来の理論との概念的な関係についても議論したい。

Abstract : This talk introduces noncommutative probability on categories, an emerging framework that bridges category theory and noncommutative probability (quantum probability) by studying the pair consisting of a "category algebra" and a "state on a category".

The category algebra discussed in this talk is a unital algebra defined for any arbitrary small category. It is defined as a convolution algebra of functions that reflects the composition structure of the category's arrows. This concept encompasses group algebras, monoid algebras, and matrix algebras, and can be understood as a generalized matrix algebra. Notably, if the category is a $\dagger$ -category and the rig R possesses a suitable involution (e.g., a $*$ -rig such as the complex field C), the category algebra over R naturally becomes a $*$ -algebra.

Next, we introduce "states on categories" as linear functionals on these category algebras. A state provides a positive semidefinite function on the set of arrows and can be viewed as a conceptual

generalization of probability measures on sets (discrete categories) to general categories. Furthermore, for any given state, a representation of the category algebra can be constructed through a generalization of the GNS (Gelfand-Naimark-Segal) construction. This allows us to understand abstract categorical arrows as operators on (semi-)Hilbert spaces.

Following the explanation of these basic matters, we will present a new approach to quantum fields based on this framework. The fundamental idea is to directly integrate relativity as a category-theoretic structure and quantumness as a noncommutative probabilistic structure by utilizing category algebras and states on certain categories corresponding to spacetime. Time permitting, we will also discuss the conceptual relationships between this new framework and conventional approaches such as Algebraic Quantum Field Theory (AQFT) and Topological Quantum Field Theory (TQFT).

Semin Oh (慶北大学校, 韓国) 9月10日(木) 11:00-12:00

題目: Domination and independent domination in Johnson graphs $J(n, 3)$

Abstract: The Johnson graph $J(n, k)$ has as vertices the k -subsets of $\{1, \dots, n\}$, two subsets being adjacent when they share exactly $k - 1$ elements. This talk presents complete solutions for two domination parameters of $J(n, 3)$. The independent domination number $i(J(n, 3))$ is determined for every n by translating a 1974 theorem of Novák on edge bases of complete uniform hypergraphs into Johnson-graph language. The domination number $\gamma(J(n, 3))$ is determined for all odd $n \geq 7$ (arXiv:2606.10326), proving a 2025 conjecture of Cornet, Dravec and Torres. Combined with their result for even n , this gives $\gamma(J(n, 3)) = \varphi_n$ for every $n \geq 6$. Here φ_n is an explicit formula built from the Fort–Hedlund covering numbers. Both parameters are asymptotic to $n^2/12$. This is joint work with Seung-ah Lee (Pusan National University).

宋 珠愛 (九州大学) 9月10日(木) 14:00-15:00

題目: 有理関数半体の幾何: 平行半直線を持つ抽象トロピカル曲線に焦点を当てて

Title: Geometry from Rational Function Semifields: Focusing on Abstract Tropical Curves with Parallel Rays

概要: 有理関数半体という代数構造から、素合同と呼ばれる代数構造を点とし、ザリスキ位相や構造層を載せることで幾何を構成することに成功した。この幾何を素合同スペクトラム ($\mathbf{CSpec}$) と呼ぶ。本講演では特に一次元の場合、すなわち平行半直線を持つ抽象トロピカル曲線 Γ_{par} (metric graph) の有理関数半体 $\mathbf{K} := \text{Rat}(\Gamma_{\text{par}})$ から得られる素合同スペクトラム $\mathbf{CSpec}(\mathbf{K})$ について、その構造を詳しく説明する。特に $\mathbf{CSpec}(\mathbf{K})$ の点の全分類とそれらが与えるハッセ図を説明し、そこから Γ_{par} に自然に一対一対応する点集合 $\mathbf{X}$ を選び出す。さらに $\mathbf{X}$ に $\mathbf{K}$ の代数構造から一意に定まる距離構造が定める位相がザリスキ

位相の制限に一致することと、この距離構造に関し一対一対応が平行半直線を保つ等長同型写像であることを紹介する。

Abstract : We construct a geometric object from the algebraic structure of a rational function semifield by regarding prime congruences as points and equipping them with a Zariski topology and a structure sheaf. We call this geometry the prime congruence spectrum (or ***CSpec***). In this talk, we focus on the one-dimensional case, namely the prime congruence spectrum ***CSpec(K)*** associated with the rational function semifield $K := \text{Rat}(\Gamma_{\text{par}})$ of an abstract tropical curve with parallel rays Γ_{par} (a metric graph). We explain the detailed structure of ***CSpec(K)***, including the complete classification of its points and the Hasse diagram determined by the inclusion relations among prime congruences. From this classification, we extract a subset X of points that naturally corresponds bijectively to Γ_{par} . Furthermore, we show that the metric structure on X , uniquely determined by the algebraic structure of K , coincides with the restriction of the Zariski topology. We also explain that the resulting correspondence is an isometry preserving the parallel-ray structure.

松本 直己 (琉球大学) 9 月 10 日 (木) 15:30-16:30

題目 : 3-正則グラフにおけるゲーム辺連結度

Title : Game edge-connectivity of cubic graphs

概要 : グラフ G のゲーム辺連結度とは、グラフの辺連結度に組合せゲームの要素を取り入れて定義されるグラフの不変量である。この定義に現れる組合せゲームは、シャノンのスイッチングゲームから着想を得て導入されたものである。簡単に説明すると、このゲームでは、先手と後手が交互に1本の辺を選ぶ。先手はグラフをできるだけ早く非連結にすることを目指して選んだ辺を除去し、後手は先手の目的を阻止するために、選んだ辺を縮約する。シャノンのスイッチングゲームと同様に、2個以上の互いに辺素な全域木が存在すれば、後手はグラフを切断されることなく、1頂点になるまで縮約可能である。本講演では、この条件が一般には成り立たない3-正則グラフに着目し、ゲーム辺連結度に関する未解決問題とその周辺の話題について紹介する。

Abstract : The game edge-connectivity of a graph is a graph invariant obtained by incorporating a combinatorial game into the notion of edge-connectivity. This game was inspired by Shannon switching game. Roughly speaking, in this game, the first and second players alternately choose one edge. The first player removes the chosen edge, aiming to disconnect the graph as quickly as possible, while the second player contracts the chosen edge in order to prevent the first player from doing so. As in Shannon switching game, if there exist two or more pairwise edge-disjoint spanning trees, then the second player can contract the graph to a single vertex without it ever being disconnected. In this talk, we focus on 3-regular graphs, for which this condition does not hold in general, and discuss open problems concerning game edge-connectivity and related topics.